Semaine 16 du 29/01/2024

1 Questions de cours

1) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

2) Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $(a, b) \in \mathbf{K}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
On distinguera les cas $a \neq b$ et $a = b$.

3) Montrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

4) À l'aide d'un polynôme, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

5) À l'aide d'un polynôme, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

6) À l'aide d'un polynôme, montrer que $\forall (m, n, p) \in \mathbf{N}^3$,
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

7) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

8) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.
   (b) Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer A^n.

9) Résoudre sur $\mathbf{R}[X]$, $P = P'P''$.

10) CCINP 85
   (a) Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $a \in \mathbf{R}$.
      i. Rappeler sans démonstration la formule de Taylor pour les polynômes.
      ii. Soit $r \in \mathbf{N}^*$. En déduire que :
      a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
   (b) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbf{R}[X]$.

11) Réaliser une division euclidienne sur un exemple explicite.

2 Exercices de recherche

Sur toute l'analyse depuis le début de l'année, hors polynômes.