Semaine 17 du 05/02/2024

1 Programme officiel

a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbf{K}[X]$.	La construction de $\mathbf{K}[X]$ est hors programme.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit.	L'anneau $\mathbf{K}[X]$ est intègre.
Composition.	

b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en terme de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.

d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.	
Formule de Taylor polynomiale.	
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivées successifs.	

e) Arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leur PGCD. Tous les PGCD de A et de B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $A \vee B$.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout, Lemme de Gauss.	
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	

f) Polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration est hors programme.
Polynômes irréductible de $\mathbf{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbf{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ ont même multiplicité.

g) Formule d'interpolation de Lagrange

Si $x_1, \cdots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbf{K}$ et $y_1, \cdots, y_n$ des éléments de $\mathbf{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.

2 Questions de cours

1) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

2) Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $(a,\, b) \in \mathbf{K}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
On distinguera les cas $a \neq b$ et $a = b$.

3) Montrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

4) À l'aide d'un polynôme, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

5) À l'aide d'un polynôme, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

6) À l'aide d'un polynôme, montrer que $\forall (m,\, n,\, p) \in \mathbf{N}^3$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

7) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

8) Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X]$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, alors P' l'est aussi.

9) Résoudre sur $\mathbf{R}[X]$, $P = P'P''$. ou $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ ou $(P')^2 = 4P$.

10) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) \in \mathbf{R}$.

11) Déterminer tous les polynômes dans $\mathbf{R}[X]$ qui vérifient

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0.$$

Démontrer au préalable que $\forall a \in \mathbf{R},\ P(X+a) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} P^{(k)}(X)$.

12) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  (a) Vérifier que $(A - 6I)(A^2 - 3I) = 0$.

  (b) Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer A^n.

13) CCINP 85

  (a) Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $a \in \mathbf{R}$.

    i. Rappeler sans démonstration la formule de Taylor pour les polynômes.

    ii. Soit $r \in \mathbf{N}^*$. En déduire que :
    $(X-a)^r | P$ et $(X-a)^{r+1} \nmid P$ si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

  (b) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbf{R}[X]$.

14) CCINP 87 remanié
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

  (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0,\, n]\!],\ L_k(a_i) = \delta_{i,\,k}.$$

  (b) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

  Exprimer P à partir des polynômes $(L_k)_{k \in [\![0,\, n]\!]}$.

  (c) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

15) Réaliser une division euclidienne sur un exemple explicite.