

SEMAINE 17 DU 02/02/2026

1 PROGRAMME OFFICIEL

a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $ f' $ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne. Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction f' est alors continue en a .

d) Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe \mathcal{C}^k .

Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

e) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe \mathcal{C}^1 .

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

a) Généralités

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Inégalité de Jensen : pour une fonction f convexe sur I , si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de \mathbf{R}^+ de somme 1 et x_1, \dots, x_n des éléments de I , alors $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$. Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I , on a l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments x_1, \dots, x_n de I .

Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.

Interprétation géométrique.

Tout développement général sur les barycentres est hors programme.

b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

2 QUESTIONS DE COURS

1) Égalité des accroissements finis à partir du théorème de Rolle.
Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

2) CCINP 3

(a) On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

(b) On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

(c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

3) CCINP 4

(a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

(b) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

(c) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) \implies (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication: on pourra considérer la fonction g définie par: $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

4) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$, montrer que si P est scindé à racines simples alors P' l'est aussi.

3 EXERCICES

Dérivabilité et convexité (et bien sûr de la continuité).