Semaine 18 du 26/02/2024

1 Programme officiel

a) Loi de composition interne

Loi de composition interne.	On évite l'étude de lois artificielles.
Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Partie stable.	

b) Structure de groupe

Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}_+^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	
Sous groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Images et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité. Isomorphisme.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\ker f$.

c) Structures d'anneau et de corps

Anneau.	Tout anneau est unitaire.
	Exemples usuelles : $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.
Calculs dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

2 Questions de cours

L'examinateur peut poser une ou plusieurs questions de cours.

1) Montrer que l'intersection quelconque de sous-groupes d'un groupe G est encore un sous-groupe de G.
2) Soient F et H deux sous groupes de G. Montrer que $F \cup H$ est un sous groupe de G si, et seulement si $F \subset H$ ou $H \subset F$.
3) Montrer que $\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n, \times\right)$ est un groupe.
4) Soit G un groupe. On note Z l'ensemble des $g \in G$ qui commutent avec tous les autres. Montrer que Z est un sous-groupe de G.
5) Montrer que les sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ sont exactement les $(n\mathbf{Z}, +)$ pour $n \in \mathbf{N}$.
6) Montrer que tout sous-anneau de $(\mathbf{R}, +, \times)$ contient $\mathbf{Z}$.
   Déterminer tous les sous-corps de $\mathbf{Q}$.
7) Déterminer tous les endomorphismes d'anneaux de $(\mathbf{Q}, +, \times)$.
8) Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes par le noyau.
9) Montrer que $\mathbf{Z}[i] = \left\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbf{Z}^2\right\}$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.
   Déterminer son groupe des inversibles.