Semaine 18 du 09/02/2026

1 Programme officiel

h) Fractions rationnelles	
Corps $\mathbf{K}(X)$.	La construction de $\mathbf{K}(X)$ est hors programme.
Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.	
Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	

i) Décomposition en éléments simples sur C et sur R	
Existence est unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$.	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application aux calculs de primitives, de dérivées k-ièmes. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X-\lambda}$.
Décomposition de $\frac{P'}{P}$.	

a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne.	On évite l'étude de lois artificielles.
Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Partie stable.	

b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}_+^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	
Sous groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Images et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité. Isomorphisme.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\ker f$.

c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire.
	Exemples usuelles : $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.
Calculs dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

Remarque : La caractérisation de la bijectivité pour les fonctions entre deux ensembles finis de même cardinal a été énoncée en classe sans démonstration.

2 Question de cours 1 :

1) Caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes par le noyau.

2) Montrer que l'intersection quelconque de sous-groupes d'un groupe G est encore un sous-groupe de G.

3) Soit G un groupe, et $g \in G$. On définit

$$f_g : \begin{cases} G & \to & G \\ x & \mapsto & gxg^{-1}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que f_g est un automorphisme.
   (b) Montrer que $\varphi \ : g \mapsto f_g$ définit un morphisme entre le groupe G et le groupe symétrique S_G.
   (c) On note Z l'ensemble des $g \in G$ tel que l'automorphisme f_g correspondant soit l'application identité.
   Montrer que Z est un sous-groupe de G.
   Comment décrire simplement ses éléments ?

4) Soit A un anneau.

$$f : \begin{cases} \mathbf{Z} & \to & A \\ k & \mapsto & k1_A. \end{cases}$$

   (a) f est un morphisme d'anneau.
   (b) $f(\mathbf{Z})$ est le plus petit sous-anneau de A.
   (c) Si A est fini, alors f n'est pas injectif.

5) Montrer que tout sous-anneau de $(\mathbf{R}, +, \times)$ contient $\mathbf{Z}$.
Déterminer tous les sous-corps de $\mathbf{Q}$.

6) Déterminer tous les endomorphismes d'anneaux de $(\mathbf{Q}, +, \times)$.

7) Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbf{Q}^2\right\}$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$.

3 Question de cours 2 :

1) si α est un pôle de multiplicité m de $\dfrac{R}{Q}$,
alors le coefficient de $\dfrac{1}{(X-\alpha)^m}$ est $m!\dfrac{R(\alpha)}{Q^{(m)}(\alpha)}$.

2) Donner la décomposition en éléments simples (sur $\mathbf{C}$) de $F = \dfrac{1}{X^5 - 1}$.

3) Soit $P \in \mathbf{C}[X] \setminus \{0\}$, donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

4) Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

4 Exercices

Sur les fractions rationnelles, polynômes, rappels de fonctions...
On garde l'algèbre pour la semaine suivante.
Éviter les calculs trop lourds sur les décompositions en éléments simples, ce n'est pas le but (les méthodes calculatoires au programme se réduisent presque à néant).