Semaine 18 du 09/02/2026

1 Programme officiel

a) Loi de composition interne

Loi de composition interne.	On évite l'étude de lois artificielles.
Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Partie stable.	

b) Structure de groupe

Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbf{Q}^*$, $\mathbf{Q}_+^*$, $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	
Sous groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Images et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité. Isomorphisme.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\ker f$.

c) Structures d'anneau et de corps

Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuelles : $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$.
Calculs dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

Remarque : La caractérisation de la bijectivité pour les fonctions entre deux ensembles finis de même cardinal a été énoncée en classe sans démonstration.

2 Question de cours 1 :

Énoncer la propriété/définition :

1) Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
2) Définition d'une famille libre (combinaison linéaire nulle implique que tous les coefficients sont nuls).
3) Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe.
4) Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (deux définitions, avec les combinaisons linéaires et comme plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille).
5) Caractérisation des sous-espaces supplémentaires ($E = F \oplus G \iff F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$).
6) Vecteurs de $\mathbf{K}^n$, lien entre liberté, caractère générateur et nombre de pivots de la matrice des vecteurs colonne.

3 Question de cours 2 :

Une démonstration :

1) $F + G = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$.
2) $\mathscr{F}$ libre si, et seulement si tout vecteur de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{F}$.
3) Montrer qu'une famille de polynômes à degrés échelonnées est libre avec la méthode (au choix de l'examinateur):
   - utiliser la définition de la liberté,
   - procéder par récurrence (puis passer à la famille éventuellement infinie),
   - utiliser la matrice des vecteurs colonne (dans la base canonique) et le nombre de pivots (puis passer à la famille éventuellement infinie).

4 Exercices

Algèbre générale (éventuellement demander si un ensemble muni des lois usuelles est un espace vectoriel).