Semaine 20 du 11/03/2022

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

a) Espaces vectoriels

Structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctios d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbf{K}^\Omega$, cas particulier de $\mathbf{K}^\mathbf{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

b) Sous-espaces vectoriels.

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle.
	Plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solution d'un système homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notation $\mathrm{Vect}\,(A)$, $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$.
	Tout sous-espace vectoriel contenant A, contient $\mathrm{Vect}\,(A)$.

c) Famille de vecteurs

Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre.
	Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathbf{K}[X]$.
Base de polynômes de degrés échelonnés dans $\mathbf{K}[X]$ et $\mathbf{K}_n[X]$.	

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter les espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Espaces de dimension finie

a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\cdots,n\}$, alors il existe une partie J de contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $(n+1)$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'epsace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}\,(x_1,\cdots,x_n)$.

c) Sous-espaces et dimensions

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

2 Questions de cours

1) Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors la famille complétée par y reste libre si, et seulement si $y \notin \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

2) Théorème de la base incomplète.

3) Théorème de la base extraite.

4) Formule de Grassmann.

5) Montrer qu'une famille est libre si, et seulement si toutes ses familles extraites finies sont libres.

6) $\forall i \in \mathbf{N}$, $P_i \in \mathbf{K}[X]$ avec $\deg(P_i) = i$. Montrer que la famille est une base de $\mathbf{K}[X]$.

7) Pour tous $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbf{K}$ deux à deux distincts, la famille des polynômes interpolateurs associée est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

8) Montrer que $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}\right)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ est libre dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

9) (au choix de l'étudiant) Lemme de Steinitz : dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.