Semaine 20 du 09/03/2026

1 Programme officiel

a) Espaces vectoriels

Structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctios d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbf{K}^\Omega$, cas particulier de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

b) Sous-espaces vectoriels.

Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle.
	Plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solution d'un système homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notation $\operatorname{Vect}(A)$, $\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
	Tout sous-espace vectoriel contenant A, contient $\operatorname{Vect}(A)$.

c) Famille de vecteurs

Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre.
	Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathbf{K}[X]$.
Base de polynômes de degrés échelonnés dans $\mathbf{K}[X]$ et $\mathbf{K}_n[X]$.	

d) Somme de deux sous-espaces

Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter les espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

Espaces de dimension finie

a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \cdots, n\}$, alors il existe une partie J de contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $(n+1)$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'epsace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation rg $(x_1, \cdots, x_n)$.

c) Sous-espaces et dimensions

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

2 Question de cours

Énoncer **deux** propriétés/définitions :

1) Caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
2) Définition d'une famille libre (combinaison linéaire nulle implique que tous les coefficients sont nuls).
3) Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe.
4) Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (deux définitions, avec les combinaisons linéaires et comme plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille).
5) Caractérisation des sous-espaces supplémentaires ($E = F \oplus G \iff F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$).
6) Caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
7) Vecteurs de $\mathbf{K}^n$, lien entre liberté, caractère générateur et nombre de pivots de la matrice des vecteurs colonne.
8) Théorème de la base incomplète.
9) Théorème de la base extraite.
10) Définition du rang d'une famille finie de vecteurs.
11) Formule de Grassmann pour la dimension d'une somme.
12) Sous-espaces affine.
13) Lien entre familles libres et somme directe d'espaces, familles génératrices, bases.

3 Exercices

Espaces vectoriels, y compris la dimension finie.