Semaine 21 du 16/03/2026

1 Programme officiel

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration;
- l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{Card}\,(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.	
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	

b) Listes et combinaisons

Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

2 Question de cours 1

Donner une justification par le dénombrement d'une des formules suivantes :

1) $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2) Binôme de Newton
3) Formule du triangle de Pascal
4) $\displaystyle k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ puis $\displaystyle\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

3 Question de cours 2

1) Un magasin propose des billes de 5 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.
   Expliquer clairement la démarche.
2) **CCINP 112**
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
   On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
   (a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
   (b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
   (c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.
3) Soit un jeu de 52 cartes, dont on tire 5 cartes. Dénombrer les mains
   (a) au total.
   (b) comprenant exactement un as.
   (c) comprenant au moins un valet.
   (d) comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame.

4 Exercices

Espaces vectoriels & dénombrement (privilégier les espaces vectoriels).