Semaine 22 du 25/03/2023

1 Programme officiel

Convexité

a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1,...,\lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1,...,x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	

b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Dénombrement

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration;
- l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{Card}\,(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.	
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	

b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

2 Exercices à savoir refaire

Une question sur les fonctions convexes et une question dénombrement.

Exercices : on pourra aussi interroger sur les suites définies implicitement ou récurrentes définies par une fonction.

2.1 Convexité

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe pour qu'elle soit bornée.
2) Montrer qu'une fonction convexe $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue.
3) Si a est un minimum local d'une fonction convexe sur $\mathbf{R}$, alors a est un minimum global.
4) *(au choix de l'étudiant – et approbation de l'examinateur)* inégalité de Jensen.

2.2 Dénombrement

1) $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) - \text{Card}\,(A \cap B)$.
2) **CCINP 112**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
   On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
   (a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
   (b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
   (c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.
3) Un magasin propose des billes de 5 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.
   On évitera tout formalisme.
4) Formule de Pascal par dénombrement.
5) Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, avec $p \leqslant n$.
   (a) Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.
   (b) Donner le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.