Semaine 23 du 02/04/2023

1 Programme officiel

Sans variables aléatoires.

a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1.
Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.	
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

2 Exercices à savoir refaire

Deux exercices à savoir refaire, puis des exercices de recherche exclusivement sur les probabilités.

2.1 Probabilités

1) Formule des probabilités totales

2) Une population est atteinte d'un virus. On sait que la proportion de personnes atteintes est 10^{-4}.
Un test de dépistage a été mis au point. Les expérimentations ont permis de savoir que les probabilités que l'individu soit détecté positif s'il est atteint ou s'il ne l'est pas sont respectivement égales à $0,99$ et à $0,001$. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité que l'individu soit effectivement atteint ?

3) **CCINP 105**
On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancé est de $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100.
   On obtient 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
   (b) On tire un dé au hasard parmi les 100, et on le tire n fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer.
   Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

4) **CCINP 107**
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).
   - On choisit une urne au hasard, et on tire une boule dans l'urne choisie.
   - On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
   - Si la boule était blanche, le tirage suivant se fait dans U_1, si elle était noir, il se fait dans U_2.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'événement :

   « la boule tirée au n-ième tirage est blanche. »

   On pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.
   (a) Calculer p_1.
   (b) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
   (c) En déduire la valeur de p_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

2.2 Algèbre linéaire

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, montrer que u injective si, et seulement si $\ker(u) = \{0\}$.
2) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E.
Montrer que u est injective si, et seulement si $\left(u(e_i)\right)_{i \in I}$ est libre.
3) Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E.
Montrer que u est surjective si, et seulement si $\left(u(e_i)\right)_{i \in I}$ est génératrice de F.
4) Soit $p \in \mathscr{L}(E)$, montrer que p est un projecteur si, et seulement si $p \circ p = p$ et donner alors ses espaces caractéristiques.
5) Soit $s \in \mathscr{L}(E)$, montrer que s est une symétrie si, et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}$ et donner alors ses espaces caractéristiques.
6) Soit $E = \mathbf{R}^4$, on pose

$$u : \begin{cases} \mathbf{R}^4 & \to \mathbf{R} \\ (x, y, z, t) & \mapsto x + y + z - t \end{cases} \quad \text{et} \quad w = (1, 0, 0, 0).$$

On pose $F = \ker(u)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(w)$.
Justifier rapidement que $F \oplus G = E$, puis donner l'expression de la projection de (x, y, z, t) sur F parallèlement à G.