

SEMAINE 23 DU 30/03/2026

1 PROGRAMME OFFICIEL

b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a .
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : pour f de classe C^n , développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.	
Développement limité à tout ordre en 0 de \exp , \sin , \cos , sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan .	
Développement limité à l'ordre 3 en 0 de \tan .	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	

c) Relations de comparaison : cas des suites

Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
---	--

d) Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La démonstration n'est pas exigible.
Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	

2 QUESTIONS DE COURS 1

Donner un (ou deux) développement limité usuel en 0 :

$$\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x), \ln(1-x), \operatorname{Arctan}(x), e^x,$$

$$\cos(x), \sin(x), \operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x), (1+x)^\alpha, \tan(x) \text{ (ordre 3)}$$

Demander la preuve pour l'un des deux.

3 EXERCICES

Petits calculs de développements limités ou développements asymptotiques. Interprétation géométrique.

Étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et suite définies implicitement (zéros de fonctions...), développement asymptotique des solutions.