Semaine 24 du 22/04/2024

1 Programme officiel

Pas de matrice de changement de base pour le moment,

a) Généralités

Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathfrak{Im}\ u = \text{Vect}\ (u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\text{rg}\,(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}\,(u), \text{rg}\,(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbf{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\text{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbf{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
finie.	
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathfrak{Im}\ u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $n = \dim\ker u + \text{rg}\,(u)$.	

e) Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.	Formes coordonnées relativement à une base.
Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.	Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	
Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbf{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.

b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbf{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	

c) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

2 Exercices à savoir refaire

1) **CCINP 55**

(a) Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

(b) i. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
ii. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

(c) Dans cette question, on considère la suite de E définie par: $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication: discuter suivant les valeurs de a.

2) **CCINP 60**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.

(b) f est-il surjectif ?

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.

(d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

3) **CCINP 64**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

(a) Démontrer que: $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

(b) i. Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
ii. Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

4) **CCINP 71**

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

(a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

(b) Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

5) **CCINP 87**

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

(a) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

(c) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]\ , \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

6) **CCINP 90**
$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   ii. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

(c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

(d) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.