Semaine 25 du 13/04/2026

1 Programme officiel

d) Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	

a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Espérance $\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	

c) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	

Pas encore de couples de variables aléatoires en exercices.

2 Exercices à savoir refaire

CCINP 95
Une urne contient deux boules blanches et huit noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points, et pour chaque boule noire tirée, il perd trois points.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

CCINP 98
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X, justifier.
2) La secrétaire rappelle une seconde fois et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas peu joindre au cours de la première série d'appels.
On note Y, la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   Indication : on pourra utiliser sans la prouver, l'égalité suivante
   $$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

CCINP 99

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, et admettant un moment d'ordre 2.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \mathbf{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(Y_1)}{na^2}$.
3) **Application :** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues sera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoire de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ème tirage.

CCINP 104 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les trois compartimenets.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque expérience aléatoire, fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1) Préciser les valeurs prises par X.
2) (a) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.
   (b) finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3) (a) Calculer $\mathbf{E}(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter.

CCINP 105
On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancer est de $\frac{1}{2}$.

1) On tire un dé au hasard parmi les 100.
On obtient 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
2) On tire un dé au hasard parmi les 100, et on le tire n fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer.
Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé.
3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter.

CCINP 107 On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).

- On choisit une urne au hasard, et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule était blanche, le tirage suivant se fait dans U_1, si elle était noire, il se fait dans U_2.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'événement : « la boule tirée au n-ième tirage est blanche. »
On pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1) Calculer p_1.
2) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3) En déduire la valeur de p_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

CCINP 109
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi de Y.

CCINP 112
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.