Semaine 25 du 29/04/2024

1 Programme officiel

Révisions générales d'algèbre linéaire et en particulier,

a) Changements de bases

Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

b) Matrices équivalentes et rang

Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.

c) Matrices semblables et trace

Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.	Notation $\mathrm{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

2 Exercices à savoir refaire

1) Toutes les matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de rang r sont équivalentes à

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,q-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,q-r} \end{pmatrix}.$$

Construction explicite des bases.

2) Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, tel que $f^2 = 0$.
Déterminer une base de E où f est représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0_{s,r} & 0_s \\ I_r & 0_{r,s} \end{pmatrix}$.

3) Soit E de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(E)$ et p un projecteur de E tel que $f = g \circ p$.

4) **CCINP 55**
   (a) Soit a un nombre complexe.
   On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.
   (b) i. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   ii. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
   (c) Dans cette question, on considère la suite de E définie par: $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication: discuter suivant les valeurs de a.

5) **CCINP 60**
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
   (b) f est-il surjectif ?
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
   (d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

6) **CCINP 64**
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
   (a) Démontrer que: $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   (b) i. Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   ii. Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

7) **CCINP 71**
Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
   (b) Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale et donner la matrice de passage.

8) **CCINP 87**
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.
   (a) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
   $$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
   (b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
   $$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
   (c) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

9) **CCINP 90**
$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.
   (a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   i. Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   ii. Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
   (c) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
   (d) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.