Semaine 27 du 21/05/2024

1 Programme officiel

Variables aléatoires : tout le chapitre.

Groupe symétrique

a) Généralités

Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1\ a_2\ ...\ a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.

b) Signature d'une permutation

Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.	
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.

Déterminants

a) Formes n-linéaires alternées

Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$.

b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.	
La famille $(x_1, ..., x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1, ..., x_n) \neq 0$.	

c) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles. L'application det induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$) sur $\mathbf{K}^*$.	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

e) Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires.	
Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.	
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.

f) Comatrice

Comatrice.	Notation $\mathrm{Com}(A)$.
Relation $A\ \mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top\ A = \det(A) I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

2 Déroulé de la colle

1) Un exercice CCINP de probabilité (même programme que la semaine dernière).
2) Un **petit** exercice de calcul de déterminant.
3) Exercices sur les variables aléatoires.

3 Exercices à savoir refaire : probabilités

CCINP 95
Une urne contient deux boules blanches et huit noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points, et pour chaque boule noire tirée, il perd trois points.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

CCINP 98
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,\, 1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X, justifier.
2) La secrétaire rappelle une seconde fois et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas peu joindre au cours de la première série d'appels.
On note Y, la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,\, n]\!]$. Déterminer pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}\left(Y = k | X = i\right)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   Indication : on pourra utiliser sans la prouver, l'égalité suivante
$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

CCINP 99

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, et admettant un moment d'ordre 2.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \mathbf{E}\left(Y_1\right)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}\left(Y_1\right)}{na^2}$.
3) **Application :** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues sera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoire de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ème tirage.

CCINP 104 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les trois compartimenets.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque expérience aléatoire, fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1) Préciser les valeurs prises par X.
2) (a) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}\left(X = 2\right)$.
   (b) finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3) (a) Calculer $\mathbf{E}\left(X\right)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}\left(X\right)$. Interpréter.

CCINP 105 On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancer est de $\frac{1}{2}$.

1) On tire un dé au hasard parmi les 100.
On obtient 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
2) On tire un dé au hasard parmi les 100, et on le tire n fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer.
Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé.
3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ et interpréter.

CCINP 107 On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).

- On choisit une urne au hasard, et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule était blanche, le tirage suivant se fait dans U_1, si elle était noire, il se fait dans U_2.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'événement : « la boule tirée au n-ième tirage est blanche. »
On pose $p_n = \mathbf{P}\left(B_n\right)$.

1) Calculer p_1.
2) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3) En déduire la valeur de p_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

CCINP 109 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi de Y.

CCINP 112
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.