

SEMAINE 29 DU 01/06/2025

1 PROGRAMME OFFICIEL

a) Formes n -linéaires alternées	
Forme n -linéaire alternée sur un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n .	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.
Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n -linéaire alternée et si (x_1, \dots, x_n) est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$; toute forme n -linéaire alternée est un multiple de \det_e .	Notation \det_e . La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans \mathbf{R}^2 (resp. \mathbf{R}^3), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de \det_e et $\det_{e'}$.	
La famille (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.	
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
Caractérisation des matrices inversibles. L'application \det induit un morphisme de $\text{GL}(E)$ (resp. $\text{GL}_n(\mathbf{K})$) sur \mathbf{K}^* .	
Déterminant d'une transposée.	Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.
e) Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires.	
Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.	
Déterminant d'une matrice triangulaire.	
Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.
f) Comatrice	
Comatrice.	Notation $\text{Com}(A)$.
Relation $A \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = \det(A)I_n$.	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

2 EXERCICES À SAVOIR REFAIRE

Exercice 1 (**) (méthode)

Soit $a \in \mathbf{K}^*$. Pour tout $n \geq 1$, calculer le déterminant de taille n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 2a \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 (**)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

- 1) Démontrer que $\chi_M \in \mathbf{K}_n[X]$.
Déterminer son terme de plus haut degré et son terme constant.
- 2) En déduire qu'il existe $k_M \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall k \geq k_M, \quad M - \frac{1}{k}I_n \in \text{GL}_n(\mathbf{K}).$$

Exercice 3 (**)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- 1) Montrer que $\det(A + XJ) \in \mathbf{R}_1[X]$ et donner son terme constant.
X représente l'indéterminée des polynômes.
- 2) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, calculer

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & (\alpha) \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ (\beta) & & & a_n \end{vmatrix}.$$

- 3) On suppose A antisymétrique et n pair. Montrer alors que

$$\det(A + XJ) = \det A.$$

3 EXERCICES DE RECHERCHE

Déterminants, révisions d'algèbre linéaire et séries.