Semaine 30 du 09/06/2026

1 Programme officiel

a) Produit scalaire

Produit scalaire.	Notations $\langle x,y\rangle$, $(x\mid y)$, $x\cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$, sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.	Expressions $X^\top Y$, $\operatorname{tr}(A^\top B)$.
Produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbf{R}\big)$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbf{R}\big)$.

b) Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle$.	Formule de polarisation associée.

c) Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale).	
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	

d) Bases orthonormées

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète.	
Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	

e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x,F)$. En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\operatorname{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\operatorname{Vect}(u)^\perp$.

2 Exercices à savoir refaire

Exercice 1 (CCINP 39-extrait)
On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1) (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.

2) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 2 (CCINP 76)
Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $(|)$ et de norme eucldienne associée $\|\cdot\|$.

1) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Donner le cas d'égalité (avec démonstration).

2) Soit $E = \{f \in \mathscr{C}([a,\, b],\, \mathbf{R}),\, \forall x \in [a,\, b],\, f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)},\, f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m.
Déterminer la valeur de m.

Exercice 3 (CCINP 77)
Soit E un espace euclidien.
F, G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

2) Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

3) Montrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 4 (CCINP 78)
Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

(a) Démontrer que: $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

(b) Démontrer que u est bijectif.

2) *On rappelle qu'une application u est une isométrie si, et seulement si $\forall (x,\, y) \in E^2$, $\|u(x) - u(y)\| = \|x-y\|$.*
Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 5 (CCINP 79)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1) Soit h une fonction continue et positive de $[a,\, b]$ dans $\mathbf{R}$.
Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow h = 0$.

2) Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,\, b]$ dans $\mathbf{R}$.
On pose

$$\forall (f,\, g) \in E^2,\ (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant Cauchy-Schwarz.

Exercice 6 (CCINP 80)
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1) Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$ définit un produit scalaire sur E.

2) Soit F, le sous-espace vectoriel engendré par $f\ : x \mapsto \cos(x)$ et $g\ : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u\ : x \mapsto \sin^2(x)$.

Exercice 7 (CCINP 81)
On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ l'application φ par $\varphi(A,\, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\, (a,\, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

1) Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2) Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.
4) Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Exercice 8 (CCINP 82)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
On admet que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_0 \in F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $< A|A' >= aa' + bb' + cc' + dd'$.

1) Démontrer que $< \cdot|\cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 9 (CCINP 92)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A,\, B) \in E^2,\, < A|B >= \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1) Prouver que $< .|. >$ est un produit scalaire sur E.
2) On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Prouver que $\mathscr{A}_n(\mathbf{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.
3) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.