Oraux blancs 2024

1 Déroulement de l'oral :

L'épreuve dure une heure, scindée comme suit :

- **Préparation :** environ 30 minutes.
- **Passage :** 20-25 minutes
- **Bilan** et commentaires par l'examinateur : 5-10 minutes.

2 Notation

- 8 points pour l'exercice à savoir refaire.
- 12 points pour l'exercice de recherche.

⚠ Obtenir 12 pour un oral type MP ou un oral type MP* n'a pas la même valeur.

3 Oraux type MP*

- **Objectif :**
  Ce type d'oral est destiné à ceux qui sont intéressés par la MP* (ou PSI).

  Choisir cet oral, ne veut pas dire que l'on sera en MP* l'année d'après, mais ne pas le choisir, signifie qu'on n'y sera pas.
- **Composition :**
  L'oral est constitué de deux exercices sur deux parties **différentes** du programme.
  1) Un petit exercice facile (5 min de passage max) pour s'assurer des acquis.
  2) Un exercice difficile dont certaines questions nécessitent des échanges avec l'examinateur (à partir des pistes de réflexion proposées par le candidat).

4 Oraux type MP

- **Objectif :**
  Ce type d'oral est destiné à ceux qui sont intéressés par la MP, la PSI, voire une réorientation.
- **Composition :**
  L'oral est constitué de deux exercices sur deux parties **différentes** du programme.
  1) Un exercice à savoir refaire dans la liste ci-dessous.
  2) Un exercice de recherche. Cet exercice est de même difficulté approximative que l'exercice à savoir refaire.
     Il doit pouvoir être fait intégralement et sans aide par un bon candidat de niveau MP.

5 Exercices à savoir refaire – oral type MP

Fichier pour les oraux de *type MP* (mais utile pour les révisions de tous).

Ce fichier propose deux sections : « exercices doubles » ou « exercice unique ».

- Les « exercices doubles » sont des exercices assez courts et l'examinateur peut donc en poser deux qui portent sur des thèmes différents.
- Les « exercices uniques » sont un peu plus longs (pour la plupart directement issus de la banque CCINP) et un seul exercice suffit.

Remarque : pour le moment, cette liste ne contient pas d'exercice d'algèbre euclidienne. Ils seront éventuellement rajoutés en fonction de l'avancement du cours.

6 Exercices doubles

6.1 Nombres complexes

Exercice 1
Résoudre $\delta^2 = 5 - 12i$.

Exercice 2
Pour $z \in \mathbf{C}$, on note M le point d'affixe z, M' le point d'affixe iz, et I le point d'affixe i.
Déterminer z pour que $(MM') \perp (IM)$.

Exercice 3
Pour $n \in \mathbf{N}$, $\theta \in \mathbf{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

6.2 Fonctions

Exercice 4
Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 5
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 6
Calcul d'une primitive (au choix de l'examinateur).

- $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,(t)}$.
- $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$.
- $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t$ pour $(a,\,b) \in \mathbf{R}^2$ non tous les deux nuls.
- $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$ pour $a \in \mathbf{R}^*$.
- $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$.
- $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t-3}$.
- $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}$.
- $\displaystyle\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$.
- $\displaystyle\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}\,(t)\,.\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7
Résolution d'une équation différentielle (au choix de l'examinateur)

1) Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on note $(E)\ :\ y' = -\tan(t)y + \dfrac{1}{\cos(t)}$.
Résoudre (E).
2) Résoudre sur $\mathbf{R}$, $(E)\ :\ y' - 3y = x\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$.
3) Résoudre sur $\mathbf{R}$, $(E)\ :\ y' - 3y = \mathrm{e}^{x}\sin(x)$.
4) Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation $(E)\quad y' + 2y = \cos(2t)$.
5) Trouver les solutions réelles de l'équation définie sur $\mathbf{R}$:
$(E)\quad y'' + y' + y = \cos(2t)$.
6) Trouver les solutions réelles de l'équation définie sur $\mathbf{R}$: $(E)\quad y'' + y = \cos(t)$.
7) Résoudre sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle :
$$(E)\qquad x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0\,.$$
Poser z tel que $\forall x > 0,\ z(x) = x^2y(x)$.

Exercice 8
Soit $f\ :\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ convexe.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bornée.

Exercice 9
Développement limité à l'ordre 5 en 0 de tan par la méthode (au choix de l'examinateur)

1) équation différentielle,
2) quotient,
3) application réciproque.

6.3 Suites

Exercice 10
Soit u une suite à valeurs non nulles. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in]-1,\,1[$.
Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 11
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que que la suite tend vers $+\infty$ par une des méthodes suivantes, au choix de l'examinateur :

- Minoration par une intégrale.
- Minoration de $H_{2n} - H_n$, ou étude de (H_{2^n}).
- Étude des suites adjacentes $(S_n - \ln(n))$ et $(S_n - \ln(n+1))$.

6.4 Arithmétique

Exercice 12
Soit $(a,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$. Notons $d = a \wedge n$.
Montrer que ad divise $(a+1)^n - 1$.

6.5 Algèbre linéaire

Exercice 13
Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Exprimer A^2 en fonction de A et de I_3.
En s'aidant d'une division euclidienne, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 15
Déterminer un supplémentaire de l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0 (dans l'ensemble des suites convergentes). Le prouver.

Exercice 16
Montrer que $\left(t \mapsto e^{\lambda t}\right)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ est libre dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

6.6 Polynômes

Exercice 17
Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $(a, b) \in \mathbf{K}^2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
On distinguera les cas $a \neq b$ et $a = b$.

Exercice 18
Montrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Exercice 19
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

Exercice 20
Résoudre sur $\mathbf{R}[X]$ (au choix de l'examinateur)
$P = P'P''$ ou $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ ou $(P')^2 = 4P$.

Exercice 21
Déterminer tous les polynômes dans $\mathbf{R}[X]$ qui vérifient

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0.$$

Démontrer au préalable que $\forall a \in \mathbf{R},\ P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} P^{(k)}(X)$.

6.7 Structures algébriques

Exercice 22
Soient F et H deux sous groupes de G. Montrer que $F \cup H$ est un sous groupe de G si, et seulement si $F \subset H$ ou $H \subset F$.

Exercice 23
Montrer que $\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{U}_n,\ \times\right)$ est un groupe

Exercice 24
Montrer que les sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ sont exactement les $(n\mathbf{Z}, +)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 25
Montrer que tout sous-anneau de $(\mathbf{R}, +, \times)$ contient $\mathbf{Z}$.

Exercice 26
Déterminer tous les endomorphismes d'anneaux de $(\mathbf{Q}, +, \times)$.

6.8 Probabilités

Exercice 27
Une population est atteinte d'un virus. On sait que la proportion de personnes atteintes est 10^{-4}.
Un test de dépistage a été mis au point. Les expérimentations ont permis de savoir que les probabilités que l'individu soit détecté positif s'il est atteint ou s'il ne l'est pas sont respectivement égales à $0,99$ et à $0,001$. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité que l'individu soit effectivement atteint ?

7 Exercice unique

Exercice 28
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2) En déduire que :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

Exercice 29
Déterminer l'ensemble des fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 30
Trouver toutes les fonctions dérivables $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Exercice 31

1) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation d'inconnue x : $\tan(nx) = \dfrac{1}{2x}$ admet une unique solution sur $\left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$ notée x_n.
2) Montrer que $x_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$.
3) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \dfrac{\pi}{2n}$.

Exercice 32

1) Pour $J = (1)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, calculer J^p pour tout $p \in \mathbf{N}$. Montrer que J n'est pas inversible.

2) Calcul de $(J - I)^p$.

Exercice 33

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ non nulle tel que $A^2 = 0$.
montrer que A est semblable à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r \leqslant \frac{n}{2}$.

Exercice 34

Soient $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, avec $p \leqslant n$.

1) Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

2) Donner le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 35

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul de E. On note p son indice de nilpotence (le plus petit entier tel que $f^p = 0$).

1) Soit $x \notin \ker f^{p-1}$.
   Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.

2) En déduire que $f^n = 0$.

3) On suppose à présent que $n = p$.
   Montrer que $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est une base de E.

4) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 36

1) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 37

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2) Déterminer D_n en fonction de n.

Exercice 38 (CCINP 3)

1) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 39 (CCINP 4)

1) Énoncer le théorème des accroissements finis.

2) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

3) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication: on pourra considérer la fonction g définie par: $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 40 (CCINP 5)

1) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\alpha > 0$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication: on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 41 (CCINP 6)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication: écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 42 (CCINP 7)

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que:

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Exercice 43 (CCINP 8)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   Étudier la convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ en fonction de x.

Exercice 44 (CCINP 42)

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(H)\ :\ 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E)\ :\ 2xy' - 3y = \sqrt{x}.$$

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Exercice 45 (CCINP 43)

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On définit (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1) (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbf{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Exercice 46 (CCINP 46)
On considère la série: $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3) $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument?

Exercice 47 (CCINP 55)
Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
2) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
3) Dans cette question, on considère la suite de E définie par: $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication: discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 48 (CCINP 60)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2) f est-il surjectif ?
3) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice 49 (CCINP 62)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.
3) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f+\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$.

Exercice 50 (CCINP 64)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1) Démontrer que: $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2) (a) Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que: $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 51 (CCINP 71)
Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2) Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 52 (CCINP 84)

1) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 53 (CCINP 85)

1) Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $a \in \mathbf{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbf{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 54 (CCINP 86)

1) Soit $(a, b, p) \in \mathbf{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2) Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$, puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que: $\forall n \in \mathbf{N}$, $n^p \equiv n \ [p]$. *Indication*: procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que :

$$p \text{ ne divise pas } n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \ [p].$$

Exercice 55 (CCINP 87)

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1) Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!], \ P(a_i) = b_i.$$

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 56 (CCINP 89)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 57 (CCINP 90)

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1) Montrer que $\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ & P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice 58 (CCINP 94)

1) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbf{Z}$.
2) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbf{N}$. Prouver que: $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3) On considère le système (S): $\begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbf{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbf{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbf{Z}$ du système (S).

Exercice 59 (CCINP 95)
Une urne contient deux boules blanches et huit noires.

1) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points, et pour chaque boule noire tirée, il perd trois points.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 60 (CCINP 98)
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1) Donner la loi de X, justifier.
2) La secrétaire rappelle une seconde fois et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas peu joindre au cours de la première série d'appels.
On note Y, la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer pour $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   Indication : on pourra utiliser sans la prouver, l'égalité suivante
$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 61 (CCINP 99)

1) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, et admettant un moment d'ordre 2.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
Prouver que pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_1)}{na^2}$.
3) **Application :** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues sera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoire de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ème tirage.

Exercice 62 (CCINP 104)
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les trois compartimenets.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque expérience aléatoire, fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1) Préciser les valeurs prises par X.
2) (a) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.
   (b) finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3) (a) Calculer $\mathbf{E}(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter.

Exercice 63 (CCINP 105)
On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancé est de $\frac{1}{2}$.

1) On tire un dé au hasard parmi les 100.
On obtient 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
2) On tire un dé au hasard parmi les 100, et on le tire n fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer.
Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

Exercice 64 (CCINP 107)
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).

- On choisit une urne au hasard, et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule état blanche, le tirage suivant se fait dans U_1, si elle était noir, il se fait dans U_2.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'événement :

« la boule tirée au n-ième tirage est blanche. »

On pose $p_n = \mathbf{P}\left(B_n\right)$.

1) Calculer p_1.
2) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3) En déduire la valeur de p_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 65 (CCINP 109)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi de Y.

Exercice 66 (CCINP 112)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in \left(\mathcal{P}(E)\right)^2$ tels que $A \subset B$.
2) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in \left(\mathcal{P}(E)\right)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in \left(\mathcal{P}(E)\right)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.