Les nombres réels

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

c) Applications et relations

Relation binaire sur un ensemble.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalences forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruence dans $\mathbf{R}$, dans $\mathbf{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$. *Les notions de congruences sont vues à titre d'exemple. La congruence dans $\mathbf{Z}$ sera étudiée spécifiquement en arithmétique.*
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	
Majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure.	*Généralisation des notions vues sur $\mathbf{R}$.*

c) Inégalités

Relation d'ordre sur $\mathbf{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations. *Lien entre inégalités et monotonie (large ou stricte), cas du passage aux antécédents.*
Parties positives et négatives.	
Valeur absolue. Inégalité triangulaire *et son corollaire.*	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$. *Inégalité triangulaire avec une somme finie.*
Dans $\mathbf{R}$, parties majorées, minorées, bornées.	
Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.

c) Fonctions usuelles

Fonctions puissances	Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbf{R}_-^*$. *Uniquement la définition sous forme de produit et quotient pour les puissances entières. Les racines sont définies sur $\mathbf{R}_+$ à partir de la puissance entière correspondante (éventuellement sur $\mathbf{R}$ pour les racines impaires). Les puissances rationnelles et les puissances réelles sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$.* *L'aspect fonctionnel est vu dans le chapitre sur les fonctions usuelles.*

a) Ensemble des nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbf{R}$) sont hors programme.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.	*Utilisation du vocabulaire de la densité.*
Droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$.	

b) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbf{R}$.	Notation $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	
Une partie X de $\mathbf{R}$ est un intervalle si, et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	

2 Exercices à savoir refaire

Et preuves sur lesquelles insister davantage.

- Les classes d'équivalence forment une partition.
- Toute partition définit une relation d'équivalence.
- Soit E un ensemble, et $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(E)$. $\mathscr{A}$ possède une borne supérieure dans $\mathcal{P}(E)$ muni de la relation d'ordre d'inclusion.
- Unicité du plus grand élément en cas d'existence.
- Pour A une partie de $\mathbf{R}$,
$$S = \sup A \iff (S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\,]S - \varepsilon,\, S] \cap A \neq \emptyset)\,.$$
- Croissance de la borne supérieure.
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$.
Si B est majorée et $A \subset B$, alors $\sup A$ et $\sup B$ existent et $\sup A \leqslant \sup B$.
Montrer par un exemple qu'on peut avoir l'inclusion stricte et égalité des bornes supérieures.
- Inégalité triangulaire et son corollaire.
- Croissance de la partie entière.
- Déterminer $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$ selon x.
- $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.