Fonctions usuelles

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.	*On veillera à toujours préciser le domaine de définition de la fonction avant de réaliser son étude.*
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par les transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	*Voir les chapitres de logique et sur les réels (inégalités).*
Fonctions majorées, minorées, bornées.	*Idem.* Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si, et seulement si $\|f\|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.	Notation $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)\right)$. *On reste sur les notions du lycée. On comprend qu'il s'agit de dérivée la fonction f en x, et non $f(x)$.*
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles. *Notations* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultat admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	*Schéma d'étude d'une fonction.* Application : recherche d'extremums, démonstrations d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométique.
Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
Fonctions convexes parmi les fonctions deux fois dérivables, point d'inflexion.	*Simple rappel de terminale sans démontration. Position par rapport à la tangente, par rapport aux cordes.*

c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivées, variations, représentations graphiques. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongeés en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbf{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissantes comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	Inégalités $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
Voir la fiche sur les inégalités.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques récirpques sont hors programme. Le seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de e^φ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

b) Continuité en un point	
Prolongement par continuité.	
c) Continuité sur un intervalle	
Théorèmes des valeurs intermédiaires.	*Sans démonstration à ce stade.* *Ne pas confondre avec le corollaire qui impose la stricte monotonie.*
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème de la bijection continue : Toute fonction réelle strictement monotone, définie sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	*Sans démonstration à ce stade.*
Théorème des bornes atteintes.	*Sans démonstration à ce stade.*

2 Exercices à savoir refaire

Et preuves sur lesquelles insister davantage.

1) Inégalités $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

2) Calcul de $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x)$ et de $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.