Équations différentielles linéaires

1 Programme officiel

Les éléments en italique sont des ajouts ou précisions personnels, hors programme officiel.

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y'+a(x)y=b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où a est une constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Seconds membres $P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ pour une équation à coefficients constants.	

c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y''+ay'+by=f(x).$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe définie et continues sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x\mapsto A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda)\in\mathbf{C}^2$, $x\mapsto B\cos(\omega x)$ et $x\mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega)\in\mathbf{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

2 Exercices à savoir refaire

Et preuves sur lesquelles insister davantage.

- Sur $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on note $(E)\ :\ y'=-\tan(t)y+\frac{1}{\cos(t)}$.
  Résoudre (E).
- Résoudre sur $\mathbf{R}$, $(E)\ :\ y'-3y=x\,\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}$.
- Résoudre sur $\mathbf{R}$, $(E)\ :\ y'-3y=\mathrm{e}^{x}\sin(x)$.
- Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation $(E)\quad y'+2y=\cos(2t)$.
- Résoudre l'équation différentielle (sur $\mathbf{R}$) $y''+\omega^2y=b$ où $\omega,b\in\mathbf{R}^2$.
- Trouver les solutions réelles de l'équation définie sur $\mathbf{R}$: $(E)\quad y''+y'+y=\cos(2t)$.
- Trouver les solutions réelles de l'équation définie sur $\mathbf{R}$: $(E)\quad y''+y=\cos(t)$.
- Trouver toutes les fonctions dérivables $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telles que
$$\forall x\in\mathbf{R},\quad f'(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$
- Résoudre sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle :
$$(E)\qquad x^2y''+4xy'-(x^2-2)y=0\,.$$
  Poser z tel que $\forall x>0$, $z(x)=x^2y(x)$.
- CCINP
  On considère les équations différentielles suivantes :
$$(H)\ :\ 2xy'-3y=0\quad\text{et}\quad(E)\ :\ 2xy'-3y=\sqrt{x}.$$
  1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
  2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
  3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?