BCPST

Polynômes

À savoir

- Somme, produit de polynômes (vu comme une combinaison linéaires des $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$)
- Degré d'un polynôme, d'une somme, d'un produit, d'une composée.
  Cas particulier du degré de la somme de polynômes de degrés distincts.
- $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
- Newton et Bernoulli.
- Dérivée formelle.
- Bijection avec les applications polynomiales (le terme d'isomorphisme n'a pas été étudié, mais il a été vu que la bijection préserve les opérations).
- Racines et multiplicités (annulation de l'application ou divisibilité). Généralisation à plusieurs racines.
- Polynômes scindés.
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Polynômes sur $\mathbb{R}[X]$
  - Les racines complexes sont conjuguées, la racine et sa conjuguée ont la même multiplicité.
  - Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- **Méthode :** montrer qu'un polynôme est nul.

La division euclidienne et l'arithmétique sur les polynômes sont hors programme.

Preuves et exercices à savoir refaire a minima

- $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.
- $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
- Inversibles de $\mathbb{K}[X]$.
- Équivalence :
  1) Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$,
  2) Tout polynôme non constant admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$.
  3) Tout polynôme non nul admet autant de racines sur $\mathbb{C}$ que son degré (comptées avec les ordres de multiplicité).
- Si $P \in \mathbb{R}[X]$, et $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de multiplicité m.