Intégration

« Il ne faut pas uniquement intégrer. Il faut aussi désintégrer. C'est ça la vie. C'est ça la philosophie. C'est ça la science. C'est ça le progrès, la civilisation. »
La Leçon, Ionesco

Introduction historique : Au III$^{\text{ème}}$ av. J.C., **Archimède** propose de calculer une surface ou un volume en sommant une multitude d'*indivisibles*. Ainsi, une sphère est considérée comme un empilement de lamelles circulaires très fines dont on somme les volumes élémentaires (imaginer une tomate coupée en fines tranches).
Les arabes puis l'occident moderne utiliseront cette méthode avec dextérité pour calculer de nombreuses aires et volumes. Mais les grandes avancées théoriques n'arriveront qu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec Pascal, puis Newton et Leibniz. Il n'est pas étonnant de retrouver ici des grands noms du calcul différentiel : l'intégrale, comme le calcul différentiel entretient dès l'origine un lien très fort avec l'infiniment petit.
Newton (1642-1727) définit l'intégrale comme une dérivation à l'envers.
Leibniz (1646-1716) s'intéresse davantage à l'aspect sommatoire de l'intégrale comme une généralisation de la somme discrète $\sum$. Il introduit les notations actuelles :

$\displaystyle\int$ désigne un grand S comme « Somme » et dx désigne l'infiniment petit.

Le terme d'intégrale apparaît pour la première fois dans sa correspondance. Il énonce le théorème fondamental qui sera démontré par Cauchy au XIX$^{\text{ème}}$.
Ces deux approches complémentaires font la richesse de l'intégrale : c'est à la fois une aire (somme d'aires *élémentaires*) et une primitive (*contraire* de la dérivée).
C'est à partir de cette idée, que **Riemann** (1826-1866) développera la première définition rigoureuse de l'intégrale.
Lebesgue (1875-1941) définit la théorie de la mesure grâce à laquelle on peut mesurer des objets infiniment petits. Le calcul d'aires s'en trouve révolutionné et donne naissance à l'intégrale de Lebesgue (pas à votre programme).

Notations : La mention du segment $[a,b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$ (le segment contient au moins deux points).

1 Intégrale d'une fonction en escalier

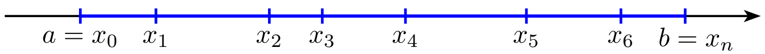
Les aires les plus simples à calculer sont les aires des rectangles. Si vous devez évaluer l'aire d'une figure ou sous une courbe, vous pouvez la tracer sur un papier quadrillé et compter le nombre de petit carrés qui composent la surface. Plus la taille des carrés sera petite, meilleure sera l'approximation.
C'est exactement ce que nous allons faire. Et dans un premier temps, pour simplifier, nous nous contentons de calculer les aires des fonctions qui suivent le quadrillage : les fonctions en escalier.
Ensuite, nous généraliserons en passant à la limite (quadrillage de plus en plus fin).

Remarque importante : Dans tout le chapitre nous travaillerons sur des **segments** de **R**. Sauf exercice très spécifique, il n'y aura pas d'intervalles infinis ou ouverts (car alors on n'est pas sûr que l'aire sous la courbe soit finie).

Définition 1.1 *(Subdivision d'un segment)*

Soit $[a,b]$ un segment de **R**. On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute suite finie $(x_0, x_1, x_2, \cdots x_n)$ avec

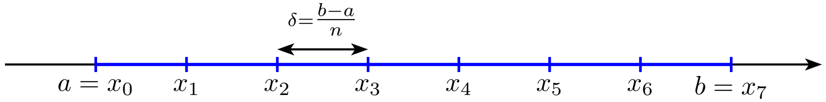
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Exemple *(Subdivision à pas constant)*
Lorsque le *pas* de la subdivision est constant :

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k - x_{k-1} = \delta.$$

alors on dit que la subdivision est à pas constant (ou régulière).
Dans ce cas $\delta = \dfrac{b-a}{n}$ et $\forall k \in [\![0; n]\!],\ x_k = a + \dfrac{b-a}{n} k$.



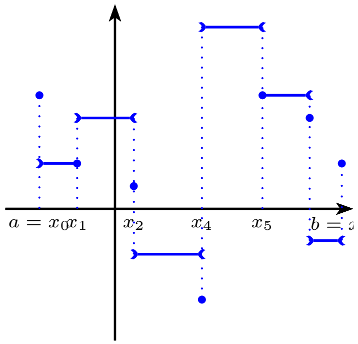
Définition 1.2 *(Fonctions en escalier)*

Une **fonction en escalier** sur $[a,b]$
est une application $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ telle que

- il existe une subdivision

$$\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ de } [a,b],$$

- $\forall k \in [\![1,n]\!]$, f est constante sur $]x_{k-1}, x_k[$.



On notera $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.
(notation usuelle, mais pas « officielle »).

⚠ L'application est constante sur chaque **ouvert** de la subdivision.

Propriété 1.3

$(\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}),+,.)$ est un espace vectoriel.
$(\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R}),+,.)$ est stable par $\times$.
Les fonctions en escalier sur un segment sont bornées.

Preuve

Il faut bien penser que deux fonctions en escalier n'ont pas la même subdivision. Mais pour une fonction donnée, si on rajoute des points à sa subdivision, cela donne une nouvelle subdivision qui convient encore. L'idée est donc de compléter une subdivision par les points de l'autre.

On montre que $\mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{[a,b]}$:
(non vide) contient l'application nulle.
(produit - externe) Si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$ (avec la même subdivision).
(somme) Si $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, alors il existe deux subdivisions σ_f et σ_g associées.
On construit un nouvelle subdivision σ par récurrence finie, avec

- $x_0 = a$,
- $\forall k \geqslant 1$, si $x_k = b$ alors la subdivision est faire,
  sinon on pose $x_{k+1} = \min(\sigma_f \cup \sigma_g) \setminus \{x_0, x_1, .., x_k\}$
  Dans cette écriture, on identifie les n-uplets avec les ensembles de leurs éléments.

Ainsi σ est une subdivision adaptée à $f+g$, donc $f+g \in \mathcal{E}([a;b],\mathbf{R})$

Le reste de la proposition est simple à démontrer (pour la stabilité par produit, on procède de la même manière). ■

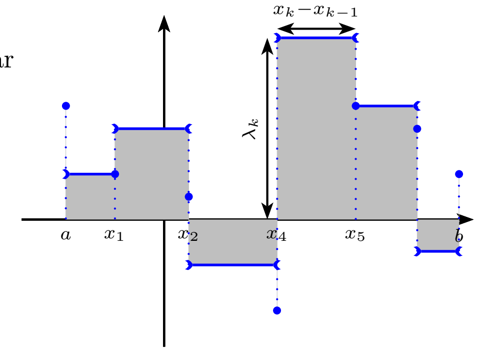
Définition 1.4 *(Intégrale)*

Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, et $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.
On définit $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que[1]

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ f_{|]x_k,x_{k+1}[} = \lambda_k.$$

L'intégrale de f sur $[a,b]$ est définie par

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda_k.$$



Par convention

- si $a = b$, alors $\displaystyle\int_a^a f = 0$.
- $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Explications
Cette définition correspond exactement à l'aire sous la courbe car on fait simplement la somme des aires des rectangles : largeur $\times$ hauteur.
Les points « isolés » n'ont aucune influence sur le calcul de l'aire.
Rappelez-vous : L'intégrale est une somme.

Notation

L'intégrale peut se noter :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f.$$

⚠ Pour $a \leqslant b$, $\displaystyle\int_b^a f = -\int_{[a,b]} f$.

Remarque :
Le choix de la variable d'intégration est arbitraire comme l'indice dans une somme :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. En identifiant la constante λ_k avec l'application constante de valeur λ_k sur $]x_{k-1}, x_k[$

Théorème 1.5 *(Propriétés de l'intégrale)*

Soit $(f,g) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbf{R})$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$ et $c \in [a,b]$.

1. **Linéarité :** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$
2. **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$
3. **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$
4. **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0.$
5. **Positivité stricte :** Si $f > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points et si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0.$
6. **Comparaison :** si $f \leqslant g$, et $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$

Dans les trois dernières propriétés les réciproques sont fausses.

Exercice

Trouver des contre-exemples pour chacune des réciproques des trois dernières propriétés.

2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

A Définition de l'intégrale

Définition 2.1 *(Sommes de Riemann)*

Soit f continue sur $[a,b]$,
On définit la n-ième **somme de Riemann** de f sur $[a,b]$ par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad \text{avec } \forall k \in [\![0;n-1]\!], \quad x_k = a + \frac{b-a}{n}k.$$

En particulier, pour $[a,b] = [0,1]$,

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Remarque : On pourrait également définir l'intégrale à partir des sommes $\widetilde{R_n}(f) = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$. La différence avec les sommes définies plus haut est alors

$$R_n(f) - \widetilde{R_n}(f) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

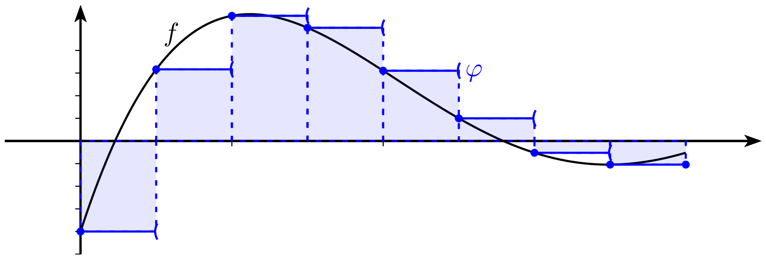
Propriété 2.2 *(Interprétation des sommes de Riemann)*

Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on définit

- la subdivision régulière de $[a,b]$ de longueur n avec $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$.
- la fonction en escalier $\varphi_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ avec $\forall x \in [x_k, x_{k+1}[$, $\varphi(x) = f(a_k)$.

Ainsi,

$$R_n(f) = \int_a^b \varphi.$$



Explications

Plus la largeur des rectangles diminue, plus la somme de Riemann s'approche de l'aire sous la courbe. C'est le principe même de construction de l'intégrale de Riemann :

Théorème 2.3

Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$), la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ cette limite que l'on note

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f.$$

Remarque : Cette définition est cohérente avec celle donné sur les fonctions en escalier.

Preuve

Admis. ■

On pourrait montrer que cette définition est aussi valable si on approxime la fonction par des fonctions en escalier sans utiliser une subdivision à pas constant).

Exercice
Si f est **croissante** alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, R_n(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant R_n(f) + \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right).$$

Solution :

Exemple

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}$.

Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

On admettra provisoirement le lien primitive intégrale : à savoir que les notations $\int_a^b f$ désignent le même nombre, que l'on parle de primitive ou d'intégrale.

Solution :

B Propriétés de l'intégrale

Théorème 2.4 *(Propriétés de l'intégrale)*

Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$ et $c \in [a,b]$.

1. **Linéarité :** $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. **Relation de Chasles**[2] **:** $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
4. **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
5. **Positivité stricte :** Si $f > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points et si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$.
6. **Comparaison :** si $f \leqslant g$, et $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Preuve

Ce sont les propriétés de l'intégrale sur les fonctions en escalier par passage à la limite (il y a juste un petit travail pour la stricte positivité car le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges). ■

Remarque : On pourrait aussi utiliser ces propriétés pour donner une définition équiv-

2. La relation est également valable si $c \notin [a,b]$, quand f est continue « jusqu'à » c.

alente de l'intégrale sans passer par les sommes de Riemann. La définition est plus *simple*, mais aussi plus abstraite.

Remarque : On pourrait aussi utiliser ces propriétés pour donner une définition équivalente de l'intégrale sans passer par les sommes de Riemann.
La définition est plus *simple*, mais aussi plus abstraite :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$,
On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par l'unique réel $\int_a^b f$ tel que l'intégrale vérifie :

1. *linéarité :* $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. *positivité :* Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
3. $\int_a^b 1 = b - a$.
4. *relation de Chasles :* si $c \in [a,b]$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b$.

Théorème 2.5

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}_+)$ à valeurs **positives**,

$$\int_a^b f = 0 \quad \text{si et seulement si } f \text{ est nulle sur } [a,b].$$

Remarque : Le résultat reste évidemment valable si f est continue et de signe constant.

Preuve

Si f non nulle, alors $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$.
Or f continue sur $[a,b]$, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [c-\eta, c+\eta], |f(x) - f(c)| \leqslant \frac{1}{2} f(c)$
.
(on prend $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$. Si c était une borne de $[a,b]$, alors par continuité, on pourrait prendre un autre c suffisamment proche dans l'ouvert $]a,b[$ tel que $f(c) > 0$).
Donc pour $x \in [c-\eta, c+\eta], f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(c)$:
par comparaison, $\int_{c-\eta}^{c+\eta} f \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} \frac{1}{2} f(c)\,\mathrm{d}t \geqslant \eta f(c) > 0$.
Or f positive sur $[a,b]$, donc $\int_a^{c-\eta} f \geqslant 0$ et $\int_{c+\eta}^b f \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
Donc $\int_a^b f = \int_a^{c-\eta} f + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f + \int_{c+\eta}^b f \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} f > 0$.
C'est absurde, donc f est identiquement nulle sur $[a,b]$. ■

Théorème 2.6 *(Majoration d'un intégrale)*

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$,

$$\left|\int_a^b gf\right| \leqslant \left(\sup_{[a,b]} |g|\right) \times \int_a^b |f|.$$

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

Preuve

1. d'après l'inégalité triangulaire, $\left|\int_a^b gf\right| \leqslant \int_a^b |f\,g|$.
   D'après le théorème des bornes atteintes appliqué à g sur le segment $[a,b]$ (car g continue) : $\sup_{[a,b]} |g|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a,b], |(f\,g)(x)| \leqslant \sup_{[a,b]} |g| \cdot |f(x)|$.
   La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors de conclure.
2. Idem, d'après l'inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
   D'après le théorème des bornes atteintes appliqué sur le segment $[a,b]$ (car f continue) : $\sup_{[a,b]} |f|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a,b], |f(x)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f|$.
   La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors d'écrire
   $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \cdot \int_a^b 1 = (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$.

■

Explications

On peut interpréter facilement ces inégalités sur les sommes finies (cela est justifié par la définition de l'intégrale à partir des fonctions en escalier) :
Si, au lieu de f, g, on choisit des familles $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k \mu_k| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\mu_i| \leqslant \left(\max_{i \in [\![1,n]\!]} |\mu_i|\right) \sum_{k=1}^n |\lambda_k|.$$

De même,

$$\left|\sum_{k=1}^n \lambda_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k \mu_k| \leqslant \sum_{k=1}^n \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i| \leqslant n \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i|.$$

Théorème 2.7 *(Valeur moyenne d'une fonction)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c).$$

$f(c)$ est appelé la **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$.

Explications

Si on interprète sur les sommes finies, cela correspond à la valeur moyenne : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Dans le cas discret, il n'y a aucune raison qu'il soit atteint par un des λ_k, par contre, les valeurs de λ_k ne peuvent pas être toutes plus grandes ou toutes plus petites que la moyenne : il y en a des plus grandes et des plus petites. La différence avec les applications continues est que nous ne disposons pas de théorème des valeurs intermédiaires pour atteindre la moyenne.

Preuve

Si on pose $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$, et $g : x \mapsto f(x) - m$, alors $\displaystyle\int_a^b g = 0$.
Si g était de signe constant, par exemple positive et ne s'annulait pas, alors $\int_a^b g > 0$. C'est absurde.
Donc g s'annule (ou change de signe, auquel cas elle s'annule d'après le théorème des valeurs intérmédiaires). Donc $\exists c \in]a,b[$ tel que $g(c) = 0$. Donc $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(c)$. ■

Exemple *(classique)*

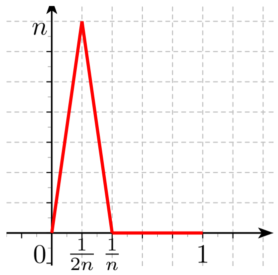
Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$ tel que $\int_a^b f = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

⚠ En général on ne peut pas intervertir entre les limites et le signe intégral :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

Par exemple si on pose

$$\forall n \geqslant 1, f_n(x) : x \mapsto \begin{cases} 2n^2x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^2(x - \frac{1}{2n}) + n & \text{si } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Alors $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$,

mais $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

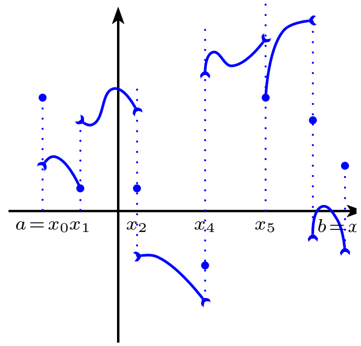
3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

On généralise ce que nous avons vu sur les fonctions continues, aux fonctions qui sont continues par morceaux.

Définition 3.1 *(Fonctions continues par morceaux)*

Une **fonction continue par morceaux** sur $[a,b]$ est une application $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ telle que

- il existe une subdivision
$$\sigma = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ de } [a,b],$$
- $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$,
  - $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ est continue,
  - $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité aux bornes (c-à-d : admet des **limites finies**)



On note souvent $f \in \mathcal{C}_{mx}([a,b])$.

Exemple

- Si f est continues sur $[a,b]$, alors elle est continue par morceaux sur $[a,b]$. La réciproque est fausse.
- $\begin{cases} [0,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{array} \right. \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux.
- $\begin{cases} [0,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{sinon} \end{array} \right. \end{cases}$ est continue par morceaux.
- $\begin{cases} [0,1] & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } \sin\frac{1}{x} \leqslant 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux.

Propriété 3.2

$\mathcal{C}_{mx}([a,b],\mathbf{R})$, muni des opérations usuelles est un espace vectoriel.
$\mathcal{C}_{mx}([a,b],\mathbf{R})$ est stable par produit.
Les applications continues par morceaux sur un segment sont bornées.

Preuve

La stabilité se montre comme pour les fonctions en escalier.

Pour le caractère borné, on utilise le théorème des bornes atteintes sur les fonctions prolongées dans chaque segment de la subdivision. ■

Définition 3.3 *(Intégrale d'une fonction continue par morceaux)*

Soient $f \in \mathcal{C}_{mx}([a,b],\mathbf{R})$, et $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une subdivision adaptée à f.
On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k$$

avec f_k la prolongée (par continuité) de $f_{\big|]x_k,x_{k+1}[}$ sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$

Explications

L'intégrale de f sur $[a,b]$ est égale à la somme des intégrales des parties continues de f.
Remarque : Cela ne dépend pas du choix de la subdivision dès lors qu'elle est *adaptée* à f (c'est-à-dire tant que f est continue sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$).

Propriété 3.4

Les propriétés vues pour les intégrales des fonctions continues restent vraies pour les fonctions continues par morceaux,
⚠ **à l'exception** du théorème de la valeur moyenne qui **n'est plus** valable.

Exemple

Trouver un contre exemple au théorème de la valeur moyenne pour une fonction continue par morceaux.

4 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 4.1 *(Théorème fondamental de l'analyse)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$,

$$x \mapsto \int_a^x f \text{ est la seule primitive de } f \text{ sur } [a,b] \text{ qui s'annule en } a$$

Autre formulation :

$$x \mapsto \int_a^x f \quad \text{est dérivable sur } [a,b] \text{ de dérivée } f.$$

Ce théorème assure l'existence d'une primitive (et donc d'une infinité) pour toute fonction continue sur un segment et il en donne une expression.

Preuve

On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et on calcule son taux d'accroissement :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f\right) \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f\right) - f(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{(in. triangulaire)}\end{aligned}$$

Si $h < 0$, on inverse les bornes de l'intégrale pour l'inégalité triangulaire, mais le raisonnement reste identique.
Or f est continue en x, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $|t-x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Donc pour $|h| \leqslant \eta$,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin $\int_a^a f = 0$.
Pour l'unicité, la démonstration a déjà été vue lors du chapitre sur les primitives. ■

Corollaire 4.2

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R})$,

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

⚠ Soyez bien attentif à la différence entre le théorème fondamental 4.1 et son corollaire 4.2.
Dans le théorème 4.1,

- **hypothèse :** on exige que la fonction soit continue
- **conclusions :** on obtient que
  - L'intégrale est dérivable,
  - Sa dérivée est une valeur : $f(x)$. Cela ne dépend pas du point a, car la dérivée est une notion *locale*, sans mémoire de ce qui se passe plus loin.

En revanche, dans le corollaire 4.2,

- **hypothèse :** on exige que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ et pas seulement continue. On calcule l'intégrale de la dérivée, c'est donc la dérivée qui doit être continue et pas seulement la fonction.

- **conclusion :** on obtient la valeur de l'intégrale, c'est une différence. Elle dépend deux deux bornes car l'intégrale est une surface qui dépend à la fois du point de départ et de celui d'arrivée.

Corollaire 4.3

Si f est continue sur $[a,b]$, alors f admet une primitive F sur $[a,b]$ et $\forall (x,y) \in [a,b]^2$,

$$\int_x^y f = F(y) - F(x)$$

Exemple

$f : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$

On en déduit que $g : x \mapsto \int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée est $x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}$.