ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Dans ce chapitre, on appelle *vrai* intervalle, un intervalle qui contient au moins deux points (donc une infinité).

1 ÉTUDE LOCALE DES FONCTIONS

A Définitions

Définition 1.1 :

Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$ un point adhérent à I (éventuellement infini).
Soient f et g définies sur I telles que g **ne s'annule pas** au voisinage de x_0.

a) On dit que f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0, si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note $f(x) = o_{x_0} g(x)$ ou $f(x) = o_{x \to x_0} g(x)$

b) On dit que f est **équivalente à** g en x_0, si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$

Exemple

Soit $\lambda \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \lambda$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.
Attention, c'est **FAUX** si $\lambda = 0$.

Propriété 1.2 :

Si deux fonctions ont une même limite **finie non nulle**, alors elles sont équivalentes.
Cela est **faux** si la limite est nulle ou infinie.

Preuve :

Si f et g tendent vers $\lambda \neq 0$ en x_0, alors elles ne s'annulent pas au voisinage de x_0, et leur quotient tend vers 1 (quotient de limites). Ainsi, elles sont équivalentes en x_0. ∎

Exemple (contre-exemple)

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ ont même limites en $+\infty$ et en 0, mais ne sont équivalentes ni en $+\infty$, ni en 0.

Exemple

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, On définit

$$f : x \mapsto x \ln x + \lambda \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (\lambda - 1)\, \mathrm{e}^x + 1$$

Étude de l'éventuelle équivalence en 0 et en $+\infty$ en fonction de λ.

- **En 0 :**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = \lambda$$

- Si $\lambda \neq 0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
  Ainsi, par transitivité de la relation d'équivalence (vue au chapitre sur les limites), $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$.
- Si $\lambda = 0$, alors, il faut faire une étude spécifique. Pour cela on étudie le quotient.
  g ne s'annule pas au voisinage de 0 (privé de 0).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x\ln x}{-(e^x-1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\ln x}{-x} \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

  Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\not\sim} g(x)$, même si les deux fonctions ont la même limite en 0.

- **En $+\infty$:** On suppose $\lambda > 1$ (pour que les deux fonctions aient la même limite, sinon, on sait qu'elles ne sont pas équivalentes), ainsi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

  Mais, si on étudie le quotient au voisinage de $+\infty$ (g ne s'y annule pas) :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x\ln x + \lambda}{(\lambda-1)\,e^x + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln x}{(\lambda-1)\,e^x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

  (par croissances comparées)
  Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\sim} g(x)$, même si les deux fonctions ont la même limite en $+\infty$.

Attention : Pour éviter quelques erreurs communes :

a) Ne **jamais** dire qu'une fonction est équivalente à 0.

b) Ne **jamais** sommer des équivalents (nous utiliserons les développements limités en cas de somme).

c) Vérifier que le dénominateur ne s'annule pas avant de passer au quotient.

Notation :
S'il n'y a aucune ambigüité sur le point x_0, on peut remplacer $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ par $f(x) \sim g(x)$. En général, on utilise cette notation lorsque $x_0 = 0$.
Il en est de même pour les relations de négligeabilité.

Lorsque g s'annule au voisinage de x_0, on peut utiliser une des définitions suivantes :

Cependant, sauf dans quelques cas théoriques, elles sont rarement utiles, et on se ramènera plutôt au quotient pour étudier des relations de comparaison.

Définition 1.3 (Cas où g s'annule au voisinage de x_0)
f et g sont définies sur un vrai intervalle I,

a) f est **négligeable devant** g au voisinage de $x_0 \in \overline{I}$, si
   - il existe une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ définie au voisinage de x_0 et de limite 0 en x_0 telle que $f(x) = \varepsilon(x)\,g(x)$ au voisinage de x_0
   - **ou** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in I \cap [x_0-\eta, x_0+\eta], |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

b) f est **équivalente à** g au voisinage de $x_0 \in \overline{I}$, si
   - il existe une fonction $\alpha(x)$ définie au voisinage de x_0 et de limite égale à 1 en x_0 telle que $f(x) = \alpha(x)\,g(x)$ au voisinage de x_0
   - **ou** si $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de x_0.

Il est immédiat que ces définitions sont équivalente à celle avec le quotient lorsque g ne s'annule pas au voisinage de x_0.

2 Croissances comparées

Théorème 2.1 **(Rappel : Croissances comparées en $+\infty$)**
Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ des réels,

a) si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$

b) si $\alpha > 0$ alors $\ln^\beta(x) = o_{+\infty}(x^\alpha)$

c) si $0 < a < b$ alors $a^x = o_{+\infty}(b^x)$

d) si $a > 1$ alors $x^\alpha = o_{+\infty}(a^x)$

Preuve :

a) les puissances de x ne s'annulent pas au voisinage de $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} = 0$$

car $\beta - \alpha > 0$.
donc $x^\alpha = o_{+\infty}\left(x^\beta\right)$

b) La preuve a été vue au moment du chapitre sur les fonctions usuelles au premier semestre. Voici rapidement le schéma de la preuve telle que nous l'avions faite :
On a $\frac{1}{t} \leq 1$ pour $t \geq 1$ et en intégrant entre 1 et x, on en déduit que pour $x \geq 1$, $\ln x \leq x - 1 \leq x$.
(on peut aussi l'obtenir en étudiant $x \mapsto \ln x - x$ qui est décroissante et vaut -1 en 0.)
En utilisant la relation $\ln x^\gamma = \gamma \ln x$ pour $\gamma > 0$, on montre que $\gamma \ln x \leq x^\gamma$, puis $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\gamma} x^{\gamma-1} \to 0$ si on choisit $\gamma \in]0,1[$.
On montre avec la même astuce, en particularisant γ, pour des puissances α et β comme dans l'énoncé.

c) b^x est une exponentielle qui ne s'annule donc pas

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{a}{b}}$$

or $\frac{a}{b} < 1$, donc $\ln \frac{a}{b} < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln \frac{a}{b} = -\infty$ et par composition

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = 0$$

d) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x \neq 0$ comme exponentielle. Ainsi

$$\frac{x^a}{a^x} = \frac{\mathrm{e}^{a \ln x}}{\mathrm{e}^{x \ln a}} = \mathrm{e}^{a \ln x - x \ln a} = \mathrm{e}^{x \ln a\left(\frac{a}{\ln a} \frac{\ln x}{x} - 1\right)}$$

($\ln a \neq 0$ car $a > 1$)
$\frac{a}{\ln a} \in \mathbb{R}$ et d'après les points précédents, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{\ln a} \frac{\ln x}{x} = 0$.
Donc $\frac{a}{\ln a} \frac{\ln x}{x} - 1 \to -1$ et par produit, le terme dans l'exponentielle tend vers $-\infty$.
Et par composition

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0$$

■

Théorème 2.2 **(Croissances comparées en 0)**
Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ des réels,

a) si $\alpha < \beta$ alors $x^\beta = o(x^\alpha)$

b) si $\alpha > 0$ alors $x^\alpha = o(\ln^\beta x)$

Remarque : Cela inverse les relations pour les puissances par rapport à $+\infty$

Preuve :

Cela se prouve en composant les limites par $x \mapsto \frac{1}{x}$. ■

Attention : Les inégalités strictes de la proposition ne peuvent pas être remplacées par des inégalités larges.

Exemple

Si $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(g(x)\big) \qquad g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(f(x)\big) \qquad f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \big(g(x)\big)$$

Si $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(f(x)\big) \qquad f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(g(x)\big) \qquad f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \big(g(x)\big)$$

On peut généraliser les relations précédentes sur les puissances de x, aux puissances de n'importe quelle fonction **qui tend vers** $+\infty$:

Propriété 2.3 **(Cas des fonctions divergeant vers $+\infty$)**

Soit f définie sur un vrai intervalle I, et $x_0 \in \overline{I}$ tel que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,

a) Si $\alpha < \beta$ alors

$$\big(f(x)\big)^\alpha \underset{x\to x_0}{=} o\Big(\big(f(x)\big)^\beta\Big)$$

b) Si $\beta > 0$, alors

$$\ln^\alpha\big(f(x)\big) \underset{x\to x_0}{=} o\Big(f(x)^\beta\Big) \qquad \text{et} \qquad \big(f(x)\big)^\alpha \underset{x\to x_0}{=} o\Big(e^{\beta f(x)}\Big)$$

Preuve :

Il suffit de passer au quotient (comme $f \to +\infty$, elle ne s'annule pas au voisinage de x_0), et d'appliquer la propriété de composition des limites. ■

Propriété 2.4 **(Transitivité de la relation de négligeabilité)**

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$,

$$\text{Si} \quad f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x)), \qquad \text{alors} \qquad f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$$

Attention : Contrairement à la relation d'équivalence, la relation de négligeabilité n'est ni réflexive, ni symétrique.

Preuve :

Il suffit de revenir à la définition (en supposant la non annulation au voisinage de x_0, sinon, on prend une des deux autres définitions et on y arrive de la même façon) :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

Donc par produit de limites,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = 0$$

Ainsi $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$ ■

A Opérations sur les relations

Propriété 2.5 (Opérations sur les petits o)

Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 définies sur un vrai intervalle I et $x_0 \in \overline{I}$,

a) Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big((g_1(x)\big)$ et $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_1(x)\big)$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_1(x)\big)$$

b) Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_1(x)\big)$ et $f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_2(x)\big)$, alors

$$f_1(x)f_2(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$$

c) Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_1(x)\big)$ et h définie sur I, alors

$$f_1(x)h(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_1(x)h(x)\big)$$

d) Si $f_1(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g_1(x)\big)$ et $\alpha > 0$, alors

$$\big(f_1(x)\big)^\alpha = \underset{x\to x_0}{o}\big(\big(g_1(x)\big)^\alpha\big)$$

Preuve :

En accord avec l'esprit du programme, on suppose que g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de x_0.

a)

$$\frac{\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)}{g_1(x)} = \lambda \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \mu \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

or $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_1(x)} = 0$ par hypothèse, et donc par somme :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)}{g_1(x)} = 0$$

b) de même par produit de limites.

c) Dans la fraction $h(x)$ se simplifie (quelque soit sa limite)

d)

$$\frac{\big(f_1(x)\big)^\alpha}{\big(g_1(x)\big)^\alpha} = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)^\alpha$$

Or $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = 0$, et par composition avec une puissance strictement positive, on a donc le résultat.

■

Attention : La relation de négligeabilité **ne passe pas au quotient**. C'est évident si on réfléchit à sa signification. Par contre, on observe que la relation est "inversée" lors du passage à l'inverse.

Exemple

$x = \underset{x\to 0}{o}(1)$, mais si on passe à l'inverse, la relation est échangée : $1 = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$

Théorème 2.6 (Composition à droite)

Si $f(x) = \underset{x\to b}{o}\big(g(x)\big)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$, alors $f\circ\varphi(x) = \underset{x\to x_0}{o}\big(g\circ\varphi(x)\big)$

Explications :

Le choix de l'application φ revient simplement à choisir un chemin particulier pour s'approcher de b. Cela revient à faire un changement de variable avec $X=\varphi(x)$.

Attention : La composition à gauche n'est pas valable. Par exemple avec le passage à l'inverse de $x=o_{+\infty}(x^2)$, la relation n'est pas maintenue, mais inversée.

Propriété 2.7 :

Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^2$,

$$\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)=(x-x_0)^p\underset{x\to 0}{o}\left((x-x_0)^{n-p}\right)$$

En particulier,

$$\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)=x^p\underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-p}\right)$$

On peut "sortir" ou "faire entrer" les puissances de x dans le "o".

Ce n'est qu'un cas particulier de la propriété 2.5-c, mais ce résultat mérite d'être exhibé à part car il sera très souvent utilisé ainsi par la suite.

3 Développements limités

A Ordre 1

Théorème 3.1 (Équivalence de deux fonctions)

Soient f et g deux fonction définie sur I, $x_0\in\overline{I}$ telles que $f\sim_{x_0}g$, alors

a) f et g sont de même signe au voisinage de x_0

b) Si f admet une limite en x_0 alors g admet la même limite.

Attention : Ce sont des implications, les réciproques sont fausses en général (comme nous l'avons vu plus haut). L'égalité des limites ne donne pas l'équivalence, sauf si cette limite est finie et non nulle.

Théorème 3.2 (Caractérisation de la dérivabilité)

Soit f définie sur I, et $x_0\in I$, alors

$$f \text{ est dérivable en } x_0, \text{ si et seulement si } \exists\lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$$

Dans ce cas, $\lambda=f'(x_0)$.

Ici, comme on travaille avec une égalité et pas seulement un équivalent, c'est aussi vrai lorsque $\lambda=0$.

Corollaire 3.3 (Approximation affine)

Soit $f\in\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f'(x_0)\neq 0$, alors

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$$

Donc

$$f(x)-f(x_0)\sim_{x_0}f'(x_0)(x-x_0)$$

Attention : En général, l'équivalent est **faux** si $f'(x_0)=0$.

Attention : $f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0)(x - x_0)$ ne revient pas à dire que $f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
En effet, cela n'a pas de sens. Par exemple :
$\cos(x) - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$, mais si on écrit $\cos(x) \sim_0 1 + \frac{x^2}{2}$ le deuxième terme est négligeable devant 1 et n'apporte donc aucune information. Il peut être remplacé par n'importe quel autre terme négligeable devant 1.

Explications (Intérêt des développements limités face au équivalents)

Les développements limités avec "o" sont des égalités : ils sont valables pour tout x et pas seulement à la limite. On peut sommer des égalités, les composer avec d'autres fonctions.

On peut sommer les développements limités On peut composer les développements limités.

Ceci s'explique par une différence fondamentale : pour les équivalents, on ne parle que d'une limite du quotient, alors que pour les développements limités, le "o" donne un ordre de précision.

Nous l'avons vu, le petit "o" désigne un quotient qui tend vers 0, (ou plus simplement, une fonction de limite nulle). D'une certaine manière, il sert à désigner l'écart pour obtenir l'égalité.
Comme vous le faites déjà en physique, on peut sommer des termes erronés, dès lors que l'on connaît leur degré de précision. La précision que l'on pourra accorder au résultat, dépendra de celle des objets et des calculs nécessaires pour y arriver.

Les "o" servent à donner le niveau de précision de l'égalité.

Il en sort une conséquence remarquable :
Attention :

$$\text{Si } f_1(x) = \underset{x \to x_0}{o}\big(g(x)\big) \text{ et } f_2(x) = \underset{x \to x_0}{o}\big(g(x)\big), \text{ alors en général } f_1(x) \neq f_2(x) \text{ (même en } x_0).$$

En effet, les petits "o" sont différents dans les deux égalités. Le petit "o" désigne *une* fonction qui tend vers 0, mais il existe une infinité de façons de tendre vers 0 et rien ne dit a priori que deux petits "o" désigneront la même.
En particulier, on a l'égalité surprenante :

$$\underset{x \to x_0}{o}\big(f(x)\big) - \underset{x \to x_0}{o}\big(f(x)\big) = \underset{x \to x_0}{o}\big(f(x)\big)$$

Ici, il faut voir que derrière les trois notations "o", se cachent des fonctions différentes (qui tendent vers 0).

B Cas général

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$

Définition 3.4 (Développement limité d'ordre n)
f admet un développement limité d'ordre n en x_0, s'il existe une application polynomiale de degré au plus n telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = P(x) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$$

En écriture "développée"

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_m(x - x_0)^m + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right) \qquad \text{avec } m \leq n$$

Remarque : La définition du développement limité se généralise dans le cas où le point est adhérent à l'intervalle.

Théorème 3.5 (Développement limité et régularité)

Si $x_0 \in I$, alors
f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0. Dans ce cas $f(x_0) = a_0$
f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0. Dans ce cas $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$

Remarque : Si f n'est pas définie en x_0, alors on peut généraliser le théorème précédent en disant qu'elle est prolongeable par continuité en x_0 avec la valeur a_0. Et, dans le deuxième cas, que la fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0.

Preuve :

Ces théorèmes ont déjà été vus lors du chapitre sur la dérivabilité. ■

Explications :

Le développement limité sert à donner une approximation polynomiale d'une application au voisinage d'un point. C'est une généralisation du concept de tangente qui donne une approximation à l'ordre 1.

Attention : Ces implications ne sont plus vraies à partir de l'ordre 2, ce n'est pas parce qu'une application admet un développement limité d'ordre 2 en a qu'elle est deux fois dérivable en a.
Nous verrons un exemple un peu plus tard.

Propriété 3.6 (Unicité du développement limité)

Si f admet un développement limité en x_0 alors ce développement limité est unique.

Preuve :

Par récurrence sur l'ordre du développement limité.
Initialisation : Si f admet un développement limité d'ordre 0, tel qu'il existe $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$f(x) = a_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1) = b_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1)$$

Alors, par passage à la limite en x_0 : $a_0 = b_0$.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour un développement limité à l'ordre n.
Supposons que f admette un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, qui puisse s'écrire de deux façons :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k (x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

Or, on sait que

$$a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right)$$

et de même avec b_{n+1}.
Donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n}\right)$$

Et par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.
Ainsi, on peut soustraire cette partie commune du développement limité à f et conserver l'égalité :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right) = b_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

Si on divise l'égalité par $(x-x_0)^{n+1}$, on obtient :

$$a_{n+1} = b_{n+1} + \underset{x\to x_0}{o}(1)$$

Ce qui implique que $a_{n+1} = b_{n+1}$ comme nous l'avons vu en initialisation.
Donc les deux développements limités sont égaux, ce qui achève la récurrence. ■

Dans la suite de ce chapitre, on privilégiera les développements limités en 0.

Quitte à faire un changement de variable, on peut se limiter à l'étude des développement limités en 0 (sinon, on pose $g(x) = f(x + x_0)$)

Méthode (Passer d'un développement limité en 0 à un développement en x_0)

Concrètement, si vous cherchez un développement limité en x_0, mais que vous n'avez l'écriture que pour 0, alors, vous remplacez $x \to 0$ par $x - x_0 \to 0$ dans l'écriture.

Exemple

$\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. On peut donc écrire

$$\sin(x - x_0) = x - x_0 + \underset{x-x_0\to 0}{o}(x - x_0) = x - x_0 + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0)$$

De même, si on veut un développement limité de $\ln x$ en 1, on écrit :

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) + \underset{x\to 1}{o}(x-1)$$

Propriété 3.7 (Symétrie et développement limité)

On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o\left(x^n\right)$$

- Si f est paire alors tous les coefficients d'indice impair a_{2k+1} sont nuls
- Si f est impaire alors tous les coefficients d'indice pair a_{2k} sont nuls

Preuve :

On compare les développement de $f(x)$ et de $f(-x)$ et on utilise l'unicité du développement limité. ■

Propriété 3.8 (Troncature d'un développement limité)

Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, f admet un développement limité d'ordre p en x_0.
Ce développement limité est obtenu par la troncature à l'ordre p du développement limité d'ordre n

Définition 3.9 (Forme normalisée)

Soit f une application définie sur I, et $0 \in \overline{I}$, tels que f admette un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \dots + a_n\, x^n + o\left(x^n\right)$$

a) si $a_0 \neq 0$ alors on dit que le développement limité est **normal**,

b) si $a_0 = 0$ alors si on note p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$, la forme **normalisée** du développement limité de f est ,
$$f(x) = x^p\left(a_p + a_{p+1}\, x + \dots + a_n\, x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right)\right)$$

Cela revient simplement à factoriser par la plus grande puissance de x possible.

Propriété 3.10 :

f admet un développement normalisé de la forme (avec éventuellement $n = p$)

$$f(x) = x^p \left(a_p + a_{p+1}\, x + \cdots + a_n\, x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right)\right)$$

si et seulement si

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$$

Alors f est du même signe que a_p au voisinage de 0

C Formule de Taylor-Young

Théorème 3.11 (Théorème de Taylor-Young)

Si f admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ en x_0, alors f admet un développement limité d'ordre n en x_0 donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Attention : Même à l'ordre 1, la formule de Taylor-Young est différente du théorème des accroissements finis. Dans le théorème des accroissements finis, l'égalité est sans le "petit o", mais en contrepartie, elle n'est valable qu'en un point, et la dérivée n'est pas calculée en x_0, mais en un autre point a priori inconnu.

Preuve :

Admis ■

Attention : La réciproque est fausse : f peut admettre un développement limité d'ordre n en x_0 sans être n fois dérivable en x_0.

Par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Méthode (Calculer les dérivées en un point pour le développement limité)

Si on sait que f est n-fois dérivable et que l'on dispose de son développement limité à l'ordre n en x_0 (par une autre méthode que Taylor-Young),
Alors, celui-ci nous donne la valeur de ses n premières dérivées de f en x_0.

Théorème 3.12 (Développement limités usuels en 0)

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{ax} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} x^k + o(x^n)$$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\cdots)(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Remarque : Dans le cas b, le développement n'est pas valable pour $x = -1$ si $\alpha < 0$.

Preuve :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en calculant les dérivées successives. ■

On remarque que pour le cosinus, tous les termes d'indice impair sont nuls car la fonction est paire. Et pour sinus, ce sont les termes d'indice pair qui sont nuls par imparité de la fonction.

Attention : Pour l'exponentielle, le développement est donné à l'ordre n, alors que pour les fonctions trigonométriques, il est donné aux ordres $2n$ et $2n+1$.

Exemple

Calcul du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$

Théorème 3.13 (Somme géométrique)

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right)$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$$

Preuve :

Ce sont des conséquences du théorème précédent pour une valeur particulière de $\alpha = -1$, éventuellement avec le changement de variable $X = -x$.
Le premier résultat est à retenir (le second s'en déduit en remplaçant x par $-x$). Il correspond à la **somme géométrique**. On peut donc aussi le prouver directement sans passer par Taylor-Young.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi, pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} = o\left(x^n\right)$$

En effet, $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$ ■

D Intégration de développements limités

Théorème 3.14 (Intégration du développement limité)
Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 de la forme

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right)$$

Et si f admet une primitive F sur un voisinage de x_0,
Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en x_0 donné par

$$F(x)=F(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
F(x)-F(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x}\sum_{k=0}^{n} a_k(t-x_0)^k+o\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^k\,\mathrm{d}t\right)+\int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}+\int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, par définition de $o((t-x_0)^n)$,

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall t\in[x_0-\eta,x_0+\eta]\cap I,\quad \left|o\left((t-x_0)^n\right)\right|\leq\varepsilon(t-x_0)^n$$

Donc par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale,

$$\forall t\in[x_0-\eta,x_0+\eta]\cap I,\quad \left|\int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t\right|\leq\int_{x_0}^{x}\left|o\left((t-x_0)^n\right)\right|\mathrm{d}t\leq\varepsilon\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Donc $\int_{x_0}^{x} o((t-x_0)^n)\,\mathrm{d}t=o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$
D'où le résultat voulu. ■

Attention : En général on ne peut pas dériver un développement limité. En effet, une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n sans être n fois dérivable.

Explications :

Rappelez-vous que l'intégrale est une notion très stable, alors que la dérivée ne l'est pas du tout. Cela se comprend facilement en comparant les deux notions.
L'intégrale revient à faire le calcul d'une aire, c'est une somme qui est donc peu sensibles aux petites variations sur la courbe. En revanche, la dérivée regarde un point à la loupe, il suffit donc d'une toute petite perturbation sur la courbe pour qu'elle soit fortement amplifiée au niveau de la dérivée.
Cette idée de *robustesse* de l'intégrale, est sous-jacente dans une grande partie de l'analyse et explique que beaucoup de notions passent plus facilement à l'intégrale qu'elles ne passent à la dérivée.

Théorème 3.15 (Développements limités usuels en 0 obtenus par intégration)

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > -1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n)$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x < -1$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Preuve :

Par intégration du développement limité de $\frac{1}{1+x}$. ■

E Opérations sur les développements limités

Remarque : À part pour la composition, les opérations sont données pour des développements limités en 0. Pour effectuer les développements en $x_0 \in I$, il suffit de remplacer x par $x - x_0$ dans le développement.

Théorème 3.16 (Combinaison linéaire)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est adhérent.
Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = p(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg p \leq n$$

Et si g admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$g(x) = q(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg q \leq n$$

Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) + o(x^n)$$

Théorème 3.17 (Produit)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est adhérent.
Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = p(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg p \leq n$$

Et si g admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$g(x) = q(x) + o(x^n) \qquad \text{avec } \deg q \leq n$$

Alors fg admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$f(x)g(x) = r(x) + o(x^n)$$

avec $r(x)$ la troncature à l'ordre n de $p(x) \times q(x)$

Exercice

Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \cos(x)\ln(1+x)$.
En déduire les dérivées successives de f en 0

Théorème 3.18 (Composée)

Les développement limités peuvent être composés.

Le théorème n'est pas détaillé, il sera vu sur des exemples.

Méthode (Quotient)

Soit $g \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $0 \in I$ tel que $g(0) \neq 0$.
Si g admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Alors le développement limité de $\frac{1}{g}$ s'obtient en utilisant pour $\frac{1}{g}$ l'expression

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(0)} \frac{1}{1+u(x)} \qquad \text{avec} \quad u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

que l'on peut développer en utilisant le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0

Exercice

Donner un développement à l'ordre 5 de $\tan x$ en 0, en utilisant successivement les relations suivantes :

a) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

b) $\tan(\arctan x) = x$

c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

F Application aux graphes

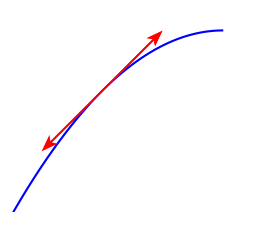
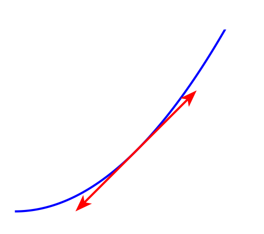
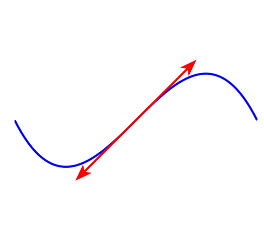
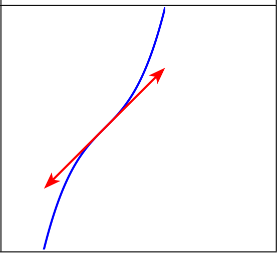
Méthode (Position par rapport à la tangente)

Soit f définie sur I et $x_0 \in I$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On suppose que f admet un développement limité du type

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_p(x-x_0)^p + o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right)$$

(a_p est le premier terme non nul après a_1 dans le développement)
Alors la courbe d'équation $y = a_0 + a_1(x-x_0)$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente dépend de p et de a_p.

$$f(x) - (a_0 + a_1(x-x_0)) \sim_{x_0} a_p(x-x_0)^p$$

Si p est pair		Si p est impair	
$a_p < 0$	$a_p > 0$	$a_p < 0$	$a_p > 0$
			

Exemple

Étude de $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ en 0

Méthode **(Etude en $+\infty$)**

Pour étudier une courbe en $+\infty$, on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et l'on étudie un développement limité en u en 0^+.
La forme de l'asymptote et la position de la droite par rapport à l'asymptote s'obtiennent comme pour la tangente.

Exemple

Développement asymptotique de $x\sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$ à l'ordre 4

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Définition 3.19 **(Rappel : Nature des branches en $+\infty$)**

- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = \ell$ au voisinage de $+\infty$.
- si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$,
  - si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
  - si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
  - si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$,
    - si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
    - si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Dans les autres cas on ne peut pas conclure.

On peut définir de même les branches en $-\infty$.

Un développement asymptotique en $+\infty$, donne directement la branche asymptotique.

Exemple

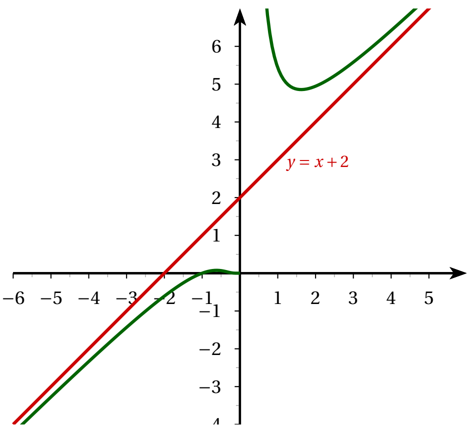
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

Étudier les branches infinies de f et donner la position des asymptotes par rapport à la courbe.
Solution :
f est définie sur $\mathbb{R}^*$. f admet une asymptote verticale en 0, avec $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \infty$.
Par contre, elle est prolongeable par continuité à gauche ne 0^-, car $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$.

En $\pm\infty$:
On pose $u = \frac{1}{x} \to 0$, ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{e}^u = \frac{1}{u}(1+u)\left(1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)\right) = \frac{1}{u}\left(1+2u+\frac{3}{2}u^2+o(u^2)\right) \\ &= \frac{1}{u}+2+\frac{3}{2}u+o(u) \\ &= x+2+\frac{3}{2x}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$



Ainsi, en $+\infty$, la droite $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe de f, et la courbe de f est située au dessus (car $\frac{3}{2x} > 0$).
En $-\infty$, cette même droite est également asymptote oblique, mais la courbe de f est située en dessous (car $\frac{3}{2x} < 0$).