Applications

« Les mathématiciens n'étudient pas des objets mais les relations entre ces objets »
Henri Poincaré (1854-1912)

1 Définition d'une application

Définition 1.1 *(Application)*
Soient E et F des ensembles.
Une **application** f de E vers F est telle que

$$\forall x \in E,\ \exists!\, y \in F,\ \text{ tel que } f(x) = y$$

- y s'appelle alors l'**image** de x par l'application f,
- x est **UN antécédent** de y,
- l'ensemble des couples $\{(x, f(x))\,,\ x \in E\}$ s'appelle le **graphe** de l'application f,
- E est appelée la **source** et F le **but**.

⚠ Ne pas confondre f et $f(x)$.

Définition 1.2 *(Fonction)*
Une **fonction** est une application pour laquelle un élément de l'ensemble de départ n'a pas nécessairement d'image (mais si elle existe, alors elle est unique).
La partie de E sur laquelle la fonction admet des images (« *est définie* ») s'appelle **l'ensemble de définition** (ou domaine de définition).

Notation
On note F^E ou $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

Exemple
$\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ désigne les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
$\mathbf{R}^{[-3,+\infty[}$ désigne les applications de $[-3,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire les suites réelles.
$\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ désigne les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire les suites complexes.

2 Image directe, image réciproque d'une partie

Définition 2.1 *(Image directe)*
Soit f une application de E vers F, et $A \subset E$.
L'**image directe** de A par f, est l'ensemble des images des éléments de A

$$f(A) = \big\{f(x), x \in A\big\} = \{y \in F,\ \text{tel que } \exists\, x \in A,\ f(x) = y\}$$

$f(A)$ est une partie de F.

Exemple
Soit $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, déterminer $f\,(\,[0,2]\,)$, $f\,(\emptyset)$ et $f\,(\,[-1,5[\,)$.

Exemple
Déterminer $\cos\big(\,[0, \frac{\pi}{2}\,[\,\big)$.

Définition 2.2 *(Image d'une application)*
Soit $f : E \to F$, l'image de f est $\mathrm{Im}\,(f) = f(E)$

Définition 2.3 *(Image réciproque)*
Soit $f : E \to F$, et B une partie de F.
On appelle **image réciproque** de B par f et on note $f^{-1}(B)$, la partie de E qui constituée des antécédents des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

$f^{-1}(B)$ est une partie de E.

Exemple
Pour l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, donner $f^{-1}([0,4])$ et $f^{-1}([-3;-2])$.

Propriété 2.4
Soit f une application de E vers F
Soient A, A' des parties de E et B, B' des parties de F

1. (Croissance)
   - Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.
   - Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
2. (Réunion)
   - $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
   - $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
3. (Intersection)
   - $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ **Attention !**
   - $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

3 Fonctions identité et indicatrice

Définition 3.1
On appelle **application identité** de l'ensemble E et on note Id_E, l'application

$$\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

Définition 3.2
Soit E un ensemble et A une partie de E.
On appelle **fonction indicatrice de** A, et on note $\mathbf{1}_A$ l'application

$$\mathbf{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \{0;1\} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exemple
$\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ vaut 1 si $x \in [a,b]$ et 0, sinon.

4 Composées, restrictions, prolongements

Définition 4.1 *(Composée de deux applications)*
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ une application de E vers F, et $g : F \to G$ une application de F vers G.

La composée à gauche de f par g, notée $g \circ f$ (aussi lu « g rond f ») est l'application définie de E vers G par

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)\ (x) = g(f(x))$$

⚠ Ne pas se tromper sur l'ordre de f et de g. Écrire $f \circ g$ n'aurait aucun sens car les ensembles ne correspondent pas. La composition n'est **pas commutative**.

Exemple
Soients $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$.
Montrer qu'alors $f \circ g \neq g \circ f$.

Propriété 4.2 *(Associativité de la composition)*
Si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

On dit que la composition est **associative**.

Propriété 4.3
Si $f : E \to F$, alors $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Propriété 4.4
La composée de deux applications de même monotonie est croissante.
La composée de deux applications de monotonies contraires est décroissante.

Remarque : La composition préserve aussi le caractère *strict* de la monotonie, à condition que les deux applications soient toutes deux strictement monotones.

Définition 4.5 *(Restriction)*
Soit f une application de E vers F et A une partie de E.
On appelle **restriction** (à la source) de f à A, et on note $f_{|A}$, l'application de A dans F définie par

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Soit f une application de E vers F et B une partie de F **telle que** $f(E) \subset B$
On appelle **restriction au but** ou **corestriction** de f à B, et on note $f^{|B}$, l'application de E dans B définie par

$$f^{|B} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \boldsymbol{B} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Définition 4.6 *(Prolongement)*
Soit f une application de E vers F et G un ensemble contenant E.
On appelle **prolongement** de f à G, toute application $\widetilde{f} : G \to F$, telle que $\widetilde{f}_{|E} = f$.

Remarque : Pour A fixé, la restriction est unique. En revanche, pour G fixé, il existe en général plusieurs prolongements possibles.

5 Injections, surjections, bijections

A Injections

Définition 5.1 *(Injection)*
Soit f une application de E vers F, on dit que f est une **injection**, ou que f est **injective** si chaque élément de l'image a un *unique* antécédent.
c'est-à-dire si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Propriété 5.2
Le contraire de « f est injective » est :

$$\exists (x_1, x_2) \in E^2 \text{ tel que } f(x_1) = f(x_2) \ \textbf{ et } \ x_1 \neq x_2$$

Méthode *(Prouver que f est injective)*
Pour prouver qu'une application est injective, on peut au choix :

- (*méthode directe*)
  On pose $(x, x') \in E^2$ en supposant que $f(x) = f(x')$.
  On montre alors que nécessairement $x = x'$.
- (*par contraposée*)
  On pose $(x, x') \in E^2$ en supposant que $x \neq x'$.
  On montre alors que $f(x) \neq f(x')$.

Exemple
Prouver que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est une injection de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.

Exemple
Prouver qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paire n'est pas injective.

Propriété 5.3
Une fonction strictement monotone sur son domaine de définition est injective.

Remarque sur les hypothèses : La fonction n'est pas supposée continue, et le domaine de définition n'est pas nécessairement un intervalle.

⚠ c'est faux si la fonction est simplement monotone (au sens large). Par exemple, une fonction constante $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est monotone sans être injective.

B Surjections

Définition 5.4 *(Surjection)*
Soit f une application de E vers F, on dit que f est une **surjection**, ou que f est **surjective** si chaque élément de F admet **au moins** un antécédent par f.
c'est-à-dire si

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \ \text{ tel que } \ f(x) = y$$

Méthode *(Prouver que f est surjective)*
Pour prouver qu'une application est surjective,
on pose y **quelconque** dans F, et on trouve $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Propriété 5.5
Le contraire de « f est surjective » est :

$$\exists y \in F \ \text{ tel que } \ \forall x \in E, \ f(x) \neq y$$

Exemple
Prouver que la fonction $x \mapsto \sin x$ est surjective de $\mathbf{R}$ sur $[-1, 1]$.

Exemple

Montrer que l'application $x \mapsto e^x$ n'est pas une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Avec quel ensemble d'arrivée est-elle une surjection ?

C Bijections

Définition 5.6 *(Bijection)*
Soit f une application de E vers F.
On dit que f est une **bijection**, ou que f est **bijective**
si c'est à la fois une injection et une surjection : chaque élément de F admet un unique antécédent par f.

$$\forall y \in F, \quad \exists!\, x \in E \ \text{ tel que } \ f(x) = y$$

Exemple

Id_E est toujours bijective pour n'importe quel espace E.

Exemple

L'application $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$.

Remarque sur le vocabulaire :

- Injection : on dit en général que l'application est une injection de E **dans** F.
- Surjection : on dit que l'application est une surjection de E **sur** F.

Méthode *(Injections, surjections, bijections et résolutions d'équations)*
Une application $f : E \to F$ est

- une injection, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **au plus** une solution dans E,
- une surjection, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **au moins** une solution dans E,
- une bijection, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet **une unique** solution dans E.

Exemple

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}\right.$ est une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ (mais pas une surjection).

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \end{array}\right.$ est une surjection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$ (mais pas une injection).

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{Z} \\ n & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array}\right. \end{array}\right.$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Z}$.

Propriété 5.7 *(Stabilité par composition)*
La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.
La composée de deux bijections est une bijection.

6 Application réciproque

Définition 6.1
Si $f : E \to F$ est une application bijective,
alors chaque $y \in F$ possède un unique antécédent que l'on nomme $f^{-1}(y)$.
On définit ainsi une application $f^{-1} : F \to E$ que l'on appelle **l'application réciproque** de f.
Remarque : La réciproque est définie de manière unique.

⚠ On ne parle d'application réciproque **que pour une application dont on a montré la bijectivité** !

Théorème 6.2
Soit f une fonction bijective de E dans F. f^{-1} est l'unique application qui vérifie

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

Théorème 6.3
Soit f une fonction que l'on **suppose bijective** de E dans F.
Si g est une fonction de F vers E telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \textbf{ou} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

alors g est bijective et $g = f^{-1}$.

Exemple

Sur $\mathbf{R}_+$, l'application réciproque de $x \to x^2$ est $x \to \sqrt{x}$

Théorème 6.4
Si pour $f : E \to F$, il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \textbf{et} \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

alors f est une bijection et sa réciproque est g.

Théorème 6.5 *(Réciproque d'une composée)*
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications bijectives,

alors,
- $g \circ f$ est bijective,
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$