

ENSEMBLES

« Huit notes composent ensemble une seule harmonie. »
La République, livre X, Platon

A Rappel : Les ensembles de nombres

B Appartenance et inclusion

Définition 0.1

Un ensemble E est une collection d'objets distincts appelés **éléments** de E .

Un **singleton** est un ensemble à un seul élément : $\{a\}$.

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **l'ensemble vide**.

Il est noté \emptyset ou $\{\}$.

On peut définir un ensemble de deux manières : en extension et en compréhension.

- Définir un ensemble en **extension**, c'est donner la liste complète des éléments qui le composent.
- Définir un ensemble en **compréhension**, c'est le considérer comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété¹.

Exemple

L'ensemble $\{1, 2, \pi\}$ est défini en extension.

$\{x \in \mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N}, x = 2^n\}$ est l'ensemble qui contient $1, 2, 2^2, 2^3 \dots$, il est défini en compréhension. On peut aussi le définir en extension par $\{2^n, n \in \mathbf{N}\}$.

Méthode (Montrer qu'un ensemble est vide)

Pour montrer qu'un ensemble A est vide, on raisonne souvent par l'absurde (on suppose qu'il existe un élément $x \in A$ et on montre que c'est absurde) :

« Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in A$,
 alors, ...
 \vdots
 absurde, donc $A = \emptyset$. »

Exemple

Montrer que $\{x > 0, \forall y > 0, x < y\} = \emptyset$.

Solution :

1. La définition par compréhension suppose de savoir où nous « piochons » les éléments auxquels s'applique la propriété.

Définition 0.2

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments.

$$E = F \iff \forall x (x \in E \iff x \in F)$$

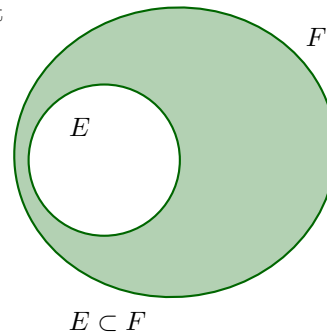
On dit que E est **inclus dans** F ,

ou que F **contient** E ,

ou que E est **une partie** de F ,

si les éléments de E appartiennent tous à F .

$$E \subset F \iff \forall x (x \in E \Rightarrow x \in F)$$

**Propriété 0.3 (Double inclusion)**

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Explications

C'est simplement la propriété de double implication vue en logique. On utilise très souvent cette propriété pour montrer l'égalité de deux ensembles.

L'égalité correspond à une équivalence et chaque inclusion traduit une implication.

Méthode (Montrer une inclusion)

Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, en général, on montre que tous les éléments de A sont aussi dans B .

Concrètement, on prend x quelconque dans A et on montre que $x \in B$.

Soit $x \in A$

⋮

donc $x \in B$.

Donc $A \subset B$.

⚠ Ne pas confondre le signe \in et le signe \subset . Le signe \in indique que l'on pioche un élément dans un ensemble, alors que le signe \subset désigne une partie de l'ensemble : un sous-ensemble qui est inclus. Dans le premier cas, on « compare » un élément à un ensemble, dans le second, on compare deux ensembles entre eux.

Exemple

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, 5 \in \mathbf{R}, \{5\} \subset \mathbf{R}$$

Définition 0.4

Soit E un ensemble, l'**ensemble des parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Pour tout ensemble A , $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Exemple

Soit $E = \{1, \pi, 5\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{\pi\}, \{5\}, \{1, \pi\}, \{1, 5\}, \{\pi, 5\}, E\}.$$

Remarques :

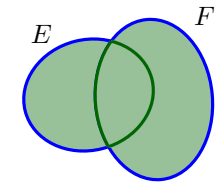
- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles.
- Pour tout ensemble E , l'ensemble vide \emptyset et l'ensemble complet E appartiennent à $\mathcal{P}(E)$.
- Si E est vide, alors $\mathcal{P}(E)$ est non vide. En effet $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ ($\mathcal{P}(E)$ contient l'ensemble vide qui est un de ses éléments. Il n'est donc pas vide lui-même).

⚠ Si $a \in E$, $a \notin \mathcal{P}(E)$ (en général), par contre $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$

C Opérations sur les ensembles**Définition 0.5**

On appelle **réunion** de E et F , l'ensemble formé des éléments de E et des éléments de F

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\}$$



$E \cup F = \text{aire colorée.}$

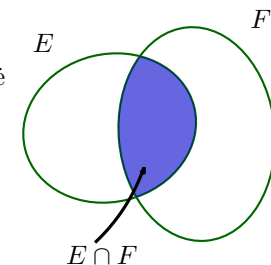
Exemple

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{-n\}_{n \in \mathbf{N}}$$

Définition 0.6

On appelle **intersection** de E et F , l'ensemble formé des éléments appartenant à la fois à E et à F

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \in F\}$$



Exemple

Soient A et B deux ensembles, voici quelques relations triviales :
 $A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset A \cup B$.
 $E \in \mathcal{P}(A)$ et $E \subset B \Rightarrow E \subset A \cap B$.

Exemple

Soient deux parties A et B de E telles que $A \cup B = A \cap B$. Montrer que $A = B$.

Solution :**Définition 0.7**

Deux ensembles E et F sont dits **disjoints** si $E \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément commun.

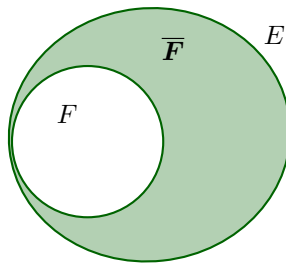
Définition 0.8

On appelle **complémentaire** de F dans E et on note

$$E \setminus F \text{ ou } \complement_E F \text{ ou } F^c \text{ ou } \overline{F}$$

les éléments de E qui n'appartiennent pas à F .
C'est-à-dire

$$E \setminus F = \{x \in E \text{ tel que } x \notin F\}$$



Remarque : La notation \overline{F} suppose qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur l'ensemble E .

Exemple

$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ désigne les irrationnels (nombres réels qui ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers).

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_-^*$$

Propriété 0.9 (Involutivité du complémentaire)

Soit A une partie d'un ensemble E .

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

On dit que le passage au complémentaire est **involutif**.

Preuve

C'est une double négation. ■

Théorème 0.10 (Formules de De Morgan)

Soit A et B des sous-ensembles de E ,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Preuve

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\iff \neg(x \in A \vee x \in B) \iff \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \iff (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Pour le complémentaire de l'intersection, il suffit de remarquer que si on remplace A et B par leur complémentaire, on retrouve la relation avec l'union écrite dans l'autre sens. Les notations de complémentaires \overline{A} et A^c sont volontairement mélangées pour faciliter la lecture de la preuve.

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{\overline{\overline{A \cap B}}} && \text{(involutivité de la négation)} \\ &= \overline{\overline{A^c \cup B^c}} && \text{(relation précédente)} \\ &= \overline{A^c \cup B^c} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

On peut aussi démontrer la négation de l'intersection en repassant aux x comme pour l'union. ■

Rappelez-vous que le complémentaire échange l'union et l'intersection.

Remarque : Les propriétés vues pour le « ou » et pour le « et » logiques, sont valables pour l'union et l'intersection (qui en sont la traduction ensembliste).

Ainsi en est-il de l'associativité, de la commutativité et de la distributivité de l'une par rapport à l'autre.

Définition 0.11

Pour $n \geq 1$, on pose² $I = \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $i \in I$, on définit un ensemble A_i .

- On appelle **réunion**³ des A_i pour i décrivant I , l'ensemble des x qui appartiennent à au moins un A_i .

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

- On appelle **intersection** des A_i pour i décrivant I , l'ensemble des x qui appartiennent à la fois à tous les A_i .

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

2. En fait, la notation est valable pour un ensemble I quelconque, mais c'est hors programme.
3. On parle parfois plus simplement d'union.

Rappelez-vous que l'union correspond à \exists et que l'intersection correspond à \forall .

Propriété 0.12 (*Distributivité*)

Si $\{A_i\}_{i \in I}$, et B sont des ensembles, alors

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$$

Preuve

Écrire de façon formelle les ensembles à partir des x en utilisant la définition 0.11. ■

Propriété 0.13 (*Formules de De Morgan*)

Si $\{A_i\}_{i \in I}$ sont des sous-ensembles de E , alors

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

Preuve

Écrire de façon formelle les ensembles à partir des x . ■

D Produit cartésien

Définition 0.14 (*Couples*)

Soient E et F deux ensembles,

On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble des **couples** :

$$E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E, y \in F\}$$

Exemple

Lorsque l'on choisit un entier p et un réel x on peut noter $p \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ ou noter $(p, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$.

Notation

Lorsque les ensembles E et F sont les mêmes, au lieu de noter $E \times E$, on note E^2 par analogie avec un produit numérique.

Exemple

Pour désigner un couple d'entiers naturels p et q on note $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.

Exemple

Tout point du plan peut être désigné de manière unique par deux coordonnées : l'abscisse x et l'ordonnée y . Ainsi les points du plans sont parfaitement décrits par des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. C'est la raison pour laquelle on note le plan \mathbf{R}^2 .

Exemple

Représenter graphiquement le produit cartésien $\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket 2, 3 \rrbracket$.

Solution :

Définition 0.15 (*Triplets*)

Soient E, F et G trois ensembles, on appelle **produit cartésien** de E, F et G et on note $E \times F \times G$ l'ensemble des **triplets** :

$$E \times F \times G = \{(x, y, z) \text{ tel que } x \in E, y \in F, z \in G\}$$

Exemple

L'espace à trois dimensions correspond à l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
L'espace est noté \mathbf{R}^3 .

Définition 0.16 (*Généralisation aux n-uplets*)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles.

On appelle **produit cartésien** de E_1, E_2, \dots, E_n l'ensemble des **n-uplets**

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \prod_{i=1}^n E_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ tel que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i\}$$

Définition 0.17 (*Famille d'éléments*)

Soit I un ensemble appelé ensemble des **indices**, et E un ensemble.

Une **famille** $(x_i)_{i \in I}$ désigne une suite d'éléments de E indexés par I .

On note E^I l'ensemble des familles de E indexées par I .

Explications

C'est simplement une façon de désigner les x_i par leur indice i . On peut faire des familles indexées par

- $\llbracket 1, p \rrbracket$ ce sont les p-uplets.
- \mathbf{N} ce sont les suites : $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne les suites réelles (à chaque indice dans \mathbf{N} , correspond un réel que l'on peut noter u_n par exemple).

⚠ Il ne faut pas confondre l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et la famille (x_1, x_2, \dots, x_p) .

Dans une famille, les éléments ont un ordre, contrairement à un ensemble.

Ainsi, dans une famille, on peut avoir deux fois le même élément à des indices différents (les indices permettent de les différencier) alors que dans un ensemble, chaque élément n'apparaît qu'une seule fois.