Espaces vectoriels

« Sachez seulement qu'il n'y a pas que des nombres...
il y a aussi des grandeurs, des sommes, il y a des groupes, il y a des tas,
des tas de choses telles que les prunes, les wagons, les oies, les pépins... »
La Leçon, Ionesco

Si depuis votre plus jeune âge vous avez toujours voulu ajouter les choux et les carottes, les courgettes et les aubergines ou mélanger torchons et serviettes, alors ce chapitre est fait pour vous !

Nous nous contenterons d'y réaliser ce travail d'épicier, et pour lui conférer de la superbe, nous y mélangerons des x, y, quantificateurs et autres formules mathématiques propres à impressionner la galerie. Mais derrière tout cela, il ne faudra pas oublier la simplicité dérisoire des objets que nous manipulons : courgettes et aubergines.
Au menu : la composition d'un beau panier de courses que l'on tâchera de mener au bout sans le transformer en bouillie ; nos outils mathématiques ne vont pas jusqu'à l'art culinaire de la mixture informe.

À l'instar de Monsieur Jourdain, j'espère que vous pourrez bientôt clamer :

« Par ma foi ! il y a plus de dix-huit ans que je manipule les espaces vectoriels sans que j'en susse rien, et je vous suis le plus obligé du monde de m'avoir appris cela. »

1 Approche intuitive

Avant de donner toutes les définitions formelles, tâchons de comprendre « avec les mains » ce qu'est un espace vectoriel.

Un premier espace vectoriel :
Comme dit en préambule, le principe de l'espace vectoriel est de constituer des paniers d'objets sans trop les écraser l'un contre l'autre. Commençons par un panier composé exclusivement de courgettes et d'aubergines :

> On note E l'ensemble des paniers composés exclusivement de courgettes et d'aubergines.

Ainsi, le panier $p_1 =$ « 3 courgettes et 5 aubergines » est un élément de E.

Opérations : certaines opérations entre paniers sont naturelles et ne demandent aucun effort d'abstraction.

- **Addition 'interne' :**

$$\text{Si } p_2 = \text{« 1 courgette »}, \text{ alors } \quad p_1 + p_2 = \text{« 4 courgettes et 5 aubergines »}.$$

- **Produit 'externe' par un scalaire** (un nombre) **:**

$$2\,p_1 = \text{« 6 courgettes et 10 aubergines »}.$$

Enfin, si on mélange les deux opérations, cela forme une **combinaison linéaire**.

$$2p_1 - 3p_2 = \text{« 3 courgettes et 10 aubergines »}.$$

Cependant, on voit qu'on arrive rapidement à un problème :

$$p_1 - 4p_2 = \text{« } -1 \text{ courgette et 5 aubergines »}.$$

Ici, la quantité de courgettes devient négative : ce sont exactement les difficultés que nous avions rencontré lors de la construction de $\mathbf{R}$ (voir le chapitre sur les nombres réels). Alors cette fois-ci, évitons de jeter Hippase de Métaponte par dessus bord, et autorisons nous directement les paniers avec des quantités négatives, fractionnaires et même irrationnelles de courgettes et d'aubergines.
Dans notre super-magasin, on pourra donc commander des paniers du type :

$$p_3 = \text{« } 3\sqrt{2} \text{ courgettes et } -\frac{\pi}{4} \text{ aubergines »}$$

Par contre, nous éviterons de multiplier ou de diviser deux paniers entre eux, ce qui n'aurait pas beaucoup de sens.

Une base pour se reposer :
C'est magnifique, on a réussi à ajouter nos courgettes et aubergines. Mais, au bout de quelques lignes, vous serez vite fatigués d'écrire à chaque fois le mot « courgette », et le mot « aubergine » et vous commencerez à utiliser des abréviations.
Peu à peu, l'écriture du premier panier se transformera :

$$p_1 = \text{« 3 courgettes et 5 aubergines »} \qquad \rightarrow \qquad p_1 = 3\,c + 5\,a$$

On y est ! Vous avez défini une base.
Si on note $c =$ « courgettes » et $a =$ « aubergines », alors tout panier de course s'écrit *de manière unique* sous la forme :

$$p = \lambda c + \mu a \ , \quad \text{avec } \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

λ désigne la quantité de courgettes et μ la quantité d'aubergines.

On dit que $\mathcal{B} = (c, a)$ forme une **base** de E :

> Tout panier s'écrit de manière unique comme **combinaison linéaire** des éléments de la **base** : c et a.

Si la base $\mathcal{B}$ a été clairement définie, alors on peut identifier chaque panier à un unique tableau en colonne (on parle de matrice colonne) noté $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\,(p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
La première coordonnée désigne le nombre de « c », et la deuxième, le nombre de « a ».

Toutes les opérations sur les paniers se réalisent alors à l'aide des matrices colonne, coefficient par coefficient : $2p_1 - 3p_2$ s'obtient en réalisant l'opération

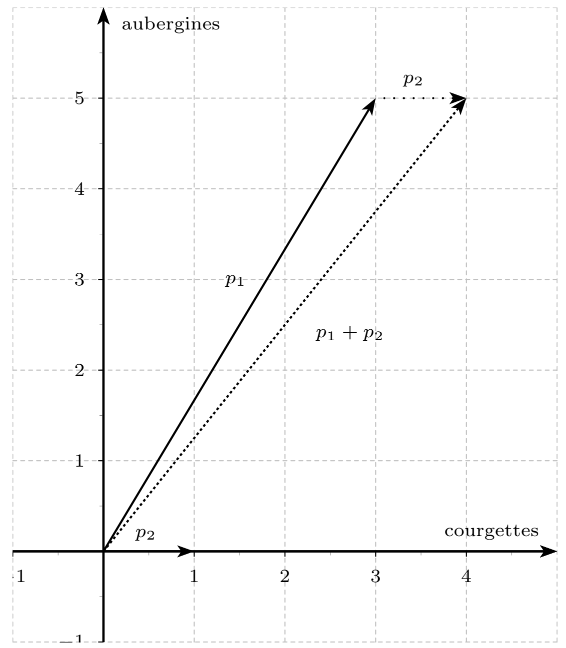
$$2 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Changement de base :
L'écriture sous cette forme nécessite d'avoir précisé la base auparavant. En effet, le choix de la base n'est pas unique.

- Par exemple, on peut choisir la base $\mathcal{B}' = (a, c)$, (échange l'ordre entre les courgettes et aubergines) et alors p_1 s'écrit $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}\,(p_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- On peut aussi inventer des bases plus exotiques :
  avec $\mathcal{B}'' = (c, a - c)$, le panier s'écrit $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}\,(p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Il est important de s'assurer que $\mathcal{B}''$ est une base : c'est-à-dire que l'on peut représenter tout panier comme *combinaison linéaire* des éléments de cette base, et que ces paniers n'ont qu'une seule écriture possible dans cette base. Ici, c'est trivial, mais cela sera un vrai sujet dans ce chapitre.

Représentation géométrique :
En se plaçant dans la base $\mathcal{B}$, on peut représenter tout panier par un *vecteur* de $\mathbf{R}^2$ (le terme espace « vectoriel » n'est pas anodin : c'est la généralisation des vecteurs vus en géométrie au lycée).
Ainsi, les paniers peuvent être représentés dans le plan, avec le nombre de courgettes en abscisse et le nombre d'aubergines en ordonnée. Si on change de base, cela revient à changer de repère.
Mais surtout, les opérations entre les paniers correspondent exactement aux opérations sur les vecteurs.



Passons maintenant à la formalisation mathématique de ces idées.

2 Structure d'espace vectoriel

A Structure algébrique

Cette section peut être sautée par le lecteur pressé.

Il n'est pas nécessaire d'apprendre la définition par cœur. Dans les situations concrètes, nous verrons une méthode beaucoup plus efficace pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Définition 2.1 *(Espace vectoriel)*

Un ensemble E muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. **loi interne « + » :**
   (a) $+$ est une loi *interne* : $\forall (u,v) \in E^2$, $u+v \in E$,
   (b) $+$ est *associative* : $\forall (u,v,w) \in E^3$, $(u+v)+w = u+(v+w)$,
   (c) $+$ est *commutative* : $\forall (u,v) \in E^2$, $u+v = u+v$,
   (d) $+$ admet un élément neutre noté 0_E : $\forall u \in E$, $u + 0_E = u$,
   (e) tout élément de E admet un symétrique pour la loi $+$:
   $\forall u \in E, \exists v = (-u) \in E,$ tel que $u + (-u) = 0,$
   $(-u)$ est appelé l'**opposé** de u.
2. **loi externe « $\cdot$ » :** produit avec un scalaire
   (a) $\cdot$ est une loi de $\mathbf{R} \times E$ dans E.
   (b) $\forall u \in E,\ 1 \cdot u = u$
   (c) (distributivité par rapport à l'addition de E)
   $$\forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall (u,v) \in E^2, \quad \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$
   (d) (distributivité par rapport à l'addition de $\mathbf{R}$)
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall u \in E, \quad (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$$
   (e) (associativité mixte) $\quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \forall u \in E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

Les éléments de $(E, +, \cdot)$ sont alors appelés **vecteurs**.
Les éléments de $\mathbf{R}$ sont appelés **scalaires**.
L'élément neutre 0_E de E s'appelle le **vecteur nul**.

Remarques sur les notations :

- Dans la notation $\lambda \cdot u$, on omet souvent le point « $\cdot$ » pour écrire simplement $\lambda\, u$.
- En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs en gras $\boldsymbol{u}$ ou avec une flèche $\overrightarrow{u}$. Dans ce cours, nous noterons les vecteurs de la même manière que les scalaires ce qui demande de redoubler de vigilance et de bien réflechir à la nature de l'objet. Pour faciliter la lecture, il est d'usage d'utiliser plutôt les lettres latines $(u, v, w, \ldots)$ pour les vecteurs et les lettres grecques $(\lambda, \mu, \ldots)$ pour les scalaires, mais il y a toujours des exceptions.

Explications

Toutes ces conditions de la définition sont naturelles avec les ensembles sur lesquels nous travaillons, mais la rigueur mathématique exige d'en faire la liste exhaustive pour définir proprement ce qu'est un espace vectoriel et éviter toute ambigüité future.

1. **loi interne :**
   (a) La caractère interne est essentiel pour « *ne pas sortir de l'ensemble* » avec une opération.
   (b) L'associativité permet de s'affranchir des parenthèses : il n'y a pas d'ordre de priorité au sein de l'addition. Ainsi, je peux commencer par ajouter u et v puis ensuite w à droite ou au contraire, commencer à ajouter v et w puis ensuite u à gauche.
   (c) La commutativité ne doit pas être confondue avec l'associativité. L'associativité permet de ne pas utiliser les parenthèses, mais l'ordre d'*écriture* importe, c'est la raison pour laquelle nous précisions au point précédent si on ajoutait à droite ou à gauche. Avec la commutativité nous pouvons mélanger les termes : additionner à droite ou à gauche revient au même.
   (d) L'intérêt de l'élément neutre n'est pas immédiat. Pourquoi inventer un élément dont le rôle est justement de *ne rien faire* ? Ce n'est pas pour rien s'il a fallu attendre le XII$^{\text{ème}}$ siècle pour que le 0 soit pleinement accepté en Occident.
   En fait, le zéro devient important lorsqu'il ne s'agit plus seulement d'ajouter mais aussi de soustraire. C'est l'objet du point suivant.
   (e) Chaque élément admet un symétrique. Lorsque l'on ajoute à un élément son symétrique on retombe sur l'élément neutre. On parle d'opposé. L'existence d'un symétrique veut dire que l'on peut soustraire. Soustraire, c'est ajouter l'opposé[1]. C'est pour pouvoir définir cet opposé que nous avions besoin de l'élément neutre 0.
2. **loi externe :**
   (a) On définit une loi de $\mathbf{R} \times E$ dans E, car à partir d'un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ et d'un vecteur $u \in E$, on obtient un nouveau vecteur $\lambda \cdot u \in E$.
   $$\begin{cases} \mathbf{R} \times E & \to E \\ (\lambda, u) & \mapsto \lambda \cdot u \end{cases}$$
   (b) Si on multiplie le vecteur par 1, il ne faut pas qu'il soit modifié.
   (c) Si dans une caisse, on place un panier u et un panier v et qu'on prend λ caisses, alors, on obtient au total λu et λv : multiplier les objets séparément ou ensemble revient au même.
   (d) Prendre 5 fois u, revient au même que de prendre 3 fois u, puis encore 2 fois u.
   (e) Prendre 15 fois u est la même chose que prendre 5 fois u et de multiplier le tout par 3.

Remarque : on peut montrer que l'élément neutre et l'opposé sont définis de manière unique.

1. En fait, la soustraction en tant que telle n'a pas besoin d'être définie, c'est simplement l'ajout de l'opposé.

B Exemples et propriétés élémentaires

Propriété 2.2

Un espace vectoriel est toujours **non vide** : il contient le vecteur nul.

Théorème 2.3 *(Règles de calcul)*

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, et $u \in E$ alors

1. $\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.
2. L'opposé de u, noté $-u$ est égal à $(-1) \cdot u$. Il vérifie $u - u = 0_E$.

Preuve

Admis. ∎

Remarque : Il ne faut par confondre 0_E l'élément nul de l'espace vectoriel avec le nombre 0. 0_E et 0 sont des objets de nature différente :

- 0_E désigne un vecteur (un couple, une application, un n-uplet... on pourrait mettre une flèche au dessus).
- 0 est un nombre réel.

Définition 2.4 *(Combinaison linéaire)*

On appelle **combinaison linéaire** de E toute somme finie de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k$$

où $u_1, u_2, \cdots, u_n$ représentent un nombre **fini** de vecteurs
et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont des nombres réels (scalaires).

Propriété 2.5

Un espace vectoriel est *stable* par combinaison linéaire.

C'est **la** propriété essentielle des espaces vectoriels : celle qui nous intéressait dans notre exemple initial. Les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires (additions et produit externe). Dans le théorème 2.7, nous verrons que cette notion suffit *presque* pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Preuve

Idée : faire une récurrence sur le nombre n d'éléments de la somme et couper celle-ci en deux pour l'hérédité.

Initialisation : pour $n = 0$, si la somme est vide, alors elle est nulle.
Or E contient le vecteur nul. L'initialisation est donc vraie.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour toute combinaison linéaire à n éléments et on le montre pour $n + 1$ éléments.
Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) + \lambda_{n+1} u_{n+1} \qquad \text{(associativité)}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \in E$.
De plus, $\lambda_{n+1} \in \mathbf{R}$ et $u_{n+1} \in E$,
donc par propriété sur le produit externe $\lambda_{n+1} u_{n+1} \in E$.

Et la somme de deux éléments de E est un élément de E, donc $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u_k \in E$.

D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai pour toute combinaison linéaire. ∎

Exemple *(à connaître)*

- Le plan $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* du plan.
- L'espace $\mathbf{R}^3$ est un espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* de l'espace.
- L'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble des applications d'un ensemble non vide Ω à valeurs dans $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
- L'ensemble des suites réelles : $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ forme un espace vectoriel.
- Pour I un intervalle non vide, l'ensemble des applications de I dans $\mathbf{R}$: $(\mathbf{R}^I, +, \cdot)$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

La démonstration pour montrer que ces ensembles sont des espaces vectoriels est longue et représente peu d'intérêts.

C Sous espaces vectoriels

Définition 2.6 *(Sous espace vectoriel)*

Soit E un espace vectoriel.
Un **sous espace vectoriel** de E est un espace vectoriel inclus dans E.

Exemple

Un plan passant par l'origine est un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Théorème 2.7 *(Caractérisation des sous espaces vectoriels)*

Soit $(E, +, \cdot)$ un **R**-espace vectoriel, et $F \subset E$,
F est un **sous espace vectoriel** de E s'il vérifie l'**une** des propriétés équivalentes suivantes :

- F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- $\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (u, v) \in F^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad u + \lambda v \in F \end{cases}$
- $\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F \\ \forall u \in F, \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \lambda u \in F \end{cases}$

Remarque : on peut remplacer la condition $0_E \in F$ par $F \neq \emptyset$.

Preuve

Cette preuve peut être sautée sans problème.
L'équivalence des trois formulations est immédiate. Nous ne la prouvons donc pas ici. Par contre, nous montrons que la deuxième formulation (par exemple) permet bien de caractériser les sous espaces vectoriels.

Tout d'abord un sous espace vectoriel vérifie toujours cette condition (propriétés 2.2 et 2.5).
Réciproquement, supposons qu'un sous-ensemble F de E vérifie cette condition, et montrons que c'est un sous espace vectoriel de E.

1. « + » est une loi interne en prenant $\lambda = 1$.
2. « + » est associative et commutative car E est un **R**-espace vectoriel.
3. En prenant $\lambda = -1$, chaque élément admet un symétrique pour « + ».
4. $0_E \in F$ par hypothèse (si on remplace la condition par $F \neq \emptyset$, alors, on a $0 \cdot x = 0_E$, donc $0_E \in F$).
5. La loi externe est à valeurs dans F (en prenant $u = 0_E$).
6. « $\cdot$ » est distributive par rapport à « + » suivant la loi interne et la loi externe car E est un **R**-espace vectoriel.
7. $\forall u \in E$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $1 \cdot u = u$ et $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$ car E est un **R**-espace vectoriel.

Donc F est un espace vectoriel. ■

Méthode

Il est beaucoup plus rapide de montrer qu'un ensemble est un sous espace vectoriel d'un autre plutôt que de vérifier les axiomes un à un. À chaque fois que l'on demande de montrer qu'un ensemble $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, il faut chercher à montrer que c'est un sous espace vectoriel d'un espace connu.

Exemple

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des $\mathbf{R}-$espaces vectoriels (munis des opérations usuelles).

- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x + y + z = 0\right\}$.
- $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x = 3y = -2z\right\}$.
- $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ dérivable}, \text{ tel que } f' + 5f = 0\}$.
- $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ tel que } f(1) = 0\}$.

Solution :

Méthode *(Montrer que E n'est pas un espace vectoriel)*

Pour montrer qu'un ensemble E n'est pas un espace vectoriel :

1. On teste si $0 \in E$.
2. Si c'est vérifié, alors on cherche des vecteurs et des scalaires pour construire une combinaison linéaire dont le résultat n'est pas dans E.

Exemple *(Contre-exemples)*

Montrer que les ensembles ci-dessous ne sont pas des espaces vectoriels (munis des opérations usuelles)

- Une droite affine du plan : pour $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$, $E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } y = ax + b\right\}$.
- Une demi-droite du plan.
- $E = \{f \in \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ tel que } f(0) = 1\}$.

Solution :

D Intersections d'espaces vectoriels

Théorème 2.8 *(Intersection de deux espaces vectoriels)*

Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, alors $(F \cap G, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Preuve

- $F \cap G \subset F$, il suffit donc de montrer que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de F.
- $0_E \in F \cap G$ (car $0_E \in F$ et $0_E \in G$: ce sont des espaces vectoriels),
- $\forall (u, v) \in F \cap G, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,
  or $(u, v) \in F^2$, donc $u + \lambda v \in F$ car F est un espace vectoriel.
  et $(u, v) \in G^2$, donc $u + \lambda v \in G$ car G est un espace vectoriel.
  Donc $u + \lambda v \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un espace vectoriel. ■

Exemple

L'intersection de deux plans vectoriels (non confondus) dans l'espace forme une droite vectorielle.

Théorème 2.9 *(Intersection)*

Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Remarque : C'est vrai pour l'intersection d'un nombre quelconque d'espaces vectoriels.

Preuve

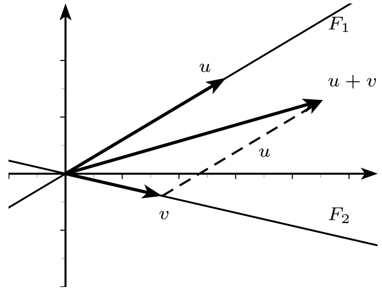
C'est la même preuve que pour 2 espaces. ■

⚠ En général l'union de deux espaces vectoriels $E \cup F$ **n'est pas** un espace vectoriel.

Exemple

L'union de deux droites non confondues du plan n'est pas un espace vectoriel.

Sur la figure ci-contre,
Si on note F_1 la première droite et F_2 la seconde droite.
$u \in F_1$, donc $u \in F_1 \cup F_2$
$v \in F_2$, donc $v \in F_1 \cup F_2$,
mais $u + v \notin F_1$, $u + v \notin F_2$,
donc $u + v \notin F_1 \cup F_2$.



Explications

En général, les structures « passent très bien » à l'intersection et mal à l'union.
Cela se comprend aisément : faire l'intersection de deux ensembles, c'est cumuler les conditions de chacun : si $u \in E \cap F$, alors u vérifie *à la fois* les conditions de E et celles de F. C'est une notion très restrictive : on trie les candidats sur le volet.
En revanche, les structures passent moins bien à l'union, car dans l'union, il suffit de ne vérifier que l'une *ou* l'autre des conditions d'appartenance : c'est beaucoup moins rigide.
Cette idée n'est pas spécifique aux espaces vectoriels : par exemple, l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle (éventuellement vide), par contre, l'union n'en est pas un (sauf cas particulier).

E Sous espaces vectoriels engendrés

L'objet de cette section est de trouver une méthode pour décrire un espace vectoriel sans avoir besoin de lister tous les éléments de l'espace (il y en a une infinité).
Si on reprend l'exemple du préambule, nous avions naturellement décrit l'espace comme l'ensemble des paniers constitués de courgettes et d'aubergines. C'est une façon simple de décrire cet espace.
Nous allons introduire une notation mathématique pour traduire cette idée :

$$\text{Vect}\,(\text{« courgettes »}, \text{« aubergines »})$$

désigne tous les paniers que l'on peut composer avec des courgettes et des aubergines.
Par contre, cette description n'est pas unique, et on peut décrire le même espace avec Vect (« courgettes », « aubergines », « 5 aubergines »).

Définition 2.10 *(Sous espace vectoriel engendré)*

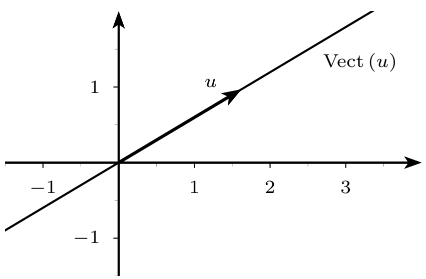
Soit E un espace vectoriel, et $u_1, u_2, \cdots, u_n$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle sous espace vectoriel de E **engendré** par $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$, le sous espace vectoriel de E composé des combinaisons linéaires des u_i.
On note

$$\text{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \{\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 + \cdots \lambda_n\, u_n,\ \ \text{pour}\ \ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n\}$$

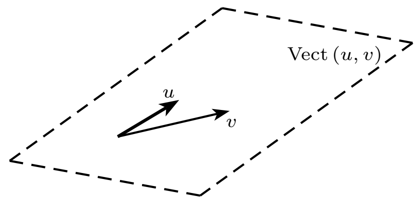
Remarque : On vérifie aisément que c'est un sous espace vectoriel de E.
Ce sous espace vectoriel correspond à tous les vecteurs que l'on peut obtenir à partir des $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Exemple

- L'espace vectoriel engendré par un vecteur u : $\text{Vect}\,(u) = \mathbf{R}u$ est la droite vectorielle de vecteur directeur u (qui passe par 0_E).
  Par exemple, dans le plan :



- Espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires u, v :
  $\text{Vect}\,(u, v) = \{\lambda u + \mu v,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$ est le plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.



La définition précédente d'un espace vectoriel engendré sera suffisante pour les situations concrètes auxquelles vous serez confrontés.
On peut cependant la généraliser à un espace vectoriel engendré, non seulement par une famille finie de vecteurs, mais également par une partie quelconque de E.

Définition 2.11 *(Sous-espace vectoriel engendré par une partie)*

Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{F}$ une partie de E.
On appelle sous espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$, le plus petit[2]sous espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{F}$.
On le note $\text{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Caractérisation :
$\text{Vect}\,(\mathcal{F})$ est alors égal à l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

$$\text{Vect}\,(\mathcal{F}) = \bigcap_{F\in\mathcal{S}} F$$

avec $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous espaces vectoriels de E qui contiennent $\mathcal{F}$.

Preuve

Il faut démontrer que cette définition a un sens, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E qui contient F.
L'ensemble des sous-espace vectoriels qui contiennent F est non vide, car E en fait partie.
Leur intersection est également un sous-espace vectoriel de E (voir théorème 2.9) et il contient F.
S'il existe un sous-espace vectoriel de E qui contient F, alors, il fait partie de l'intersection, donc il est plus grand (au sens de l'inclusion) que l'intersection.
La définition et la caractérisation sont donc démontrées. ■

Théorème 2.12

Le sous espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est égal au sous espace vectoriel engendré par la partie $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

$$\text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{Vect}\,(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$$

2. Au sens de l'inclusion : tout sous espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{F}$, contient ce sous espace.

Explications

En d'autres termes, l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires des x_i est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient tous les x_i : les définitions 2.10 et 2.11 ne sont pas contradictoires.

Preuve

Cette preuve est très simple, les difficultés viennent des notations qui sont proches.
L'étudiant capable de comprendre et refaire cette preuve a certainement compris la notion d'espace vectoriel engendré.
Si F est un espace vectoriel qui contient les x_i, alors il contient toutes leurs combinaisons linéaires (puisqu'il est stable par combinaisons linéaires).
Donc cet espace F contient $\text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$.
Ainsi, $\text{Vect}\,(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ qui contient tous les x_i, contient $\text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$:

$$\text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n) \subset \text{Vect}\,(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$$

Or $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$ par définition, donc

$$\text{Vect}\,(\{x_1, \cdots, x_n\}) \subset \text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

(car $\text{Vect}\,(\{x_1, \cdots, x_n\})$ est le plus petit espace qui contient les x_i)
Donc par double inclusion :

$$\text{Vect}\,(\{x_1, \cdots, x_n\}) = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

■

3 Familles finies de vecteurs

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel.

A Familles libres et liées

Nous avons vu comment engendrer un espace vectoriel par une famille de vecteurs. Mais parfois, la famille contient des informations redondantes : par exemple $\text{Vect}\,(u, 2u) = \text{Vect}\,(u)$. En effet, $\text{Vect}\,(u, 2u)$ est exactement la droite engendrée par u : ici, l'ajout dans la famille du vecteur $2u$ n'apporte aucune information supplémentaire (car il est colinéaire à u).
Le but de cette section est analyser l'information portée par une famille de vecteurs :

- Lorsque tous les vecteurs de la famille sont *indispensables* et apportent chacun une information nouvelle, alors on dira que la famille est **libre**.
- A contrario, si certains vecteurs de la famille sont *superflus* et n'apportent aucune information supplémentaire, alors, la famille sera dite **liée** : on peut lui retirer un certain nombre de vecteurs sans modifier l'espace qu'elle engendre.

La famille $(u, 2u)$ est liée : on peut supprimer l'un des deux vecteurs sans que cela change l'espace engendré. Par contre, si $u \neq 0$, alors la famille composée du seul vecteur u est libre : si on enlève le vecteur, l'espace engendré est $\{0\}$ et non plus la droite.
On cherchera autant que possible à travailler avec des familles libres pour éviter les informations redondantes.

Définition 3.1 *(Famille libre et famille liée)*

Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille est **liée**, si un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
- On dit que la famille est **libre** si elle n'est pas liée. Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Exemple

Deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas colinéaires.
Trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas coplanaires.

Exemple

Dans $E = \mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $u = (2, 3, 5)$, $v = (3, 4, 0)$ et $w = (5, 7, 5)$.
Montrer que la famille (u, v, w) est liée, mais que la famille (u, v) est libre.
Solution :

Théorème 3.2 *(Caractérisation des familles liées et libres)*

$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une **famille libre**, si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

$(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ est une **famille liée**, si et seulement si

$$\text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \textbf{ non tous nuls} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E.$$

Remarque : pour la famille libre, on a même l'équivalence, mais la réciproque n'apporte rien car elle est toujours vraie.

Preuve

(*sens direct*) par l'absurde : soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.
Supposons par l'absurde qu'il existe un λ_{i_0} non nul, alors $u_{i_0} = \sum\limits_{i\neq i_0} -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} u_i$.
Donc u_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs : la famille n'est pas libre. C'est aburde. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.
(*sens réciproque*) par contraposée : si la famille est liée, alors un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Par exemple $u_{i_0} = \sum_{i\neq i_0} \lambda_i u_i$.
Donc en posant $\lambda_{i_0} = -1$, on trouve $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ et les λ_i sont non tous nuls.
D'où le résultat par contraposée.
Le cas de la famille liée s'obtient simplement par la négation du précédent. ■

Méthode

- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **libre**,
  on suppose n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dans $\mathbf{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$,
  et on montre que tous les λ_k sont nécessairement nuls.
- Pour montrer qu'une famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est **liée**,
  on cherche une combinaison linéaire qui donne 0_E.

Exemple

Montrer que les trois vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 1, 2)$ et $w = (2, 3, 1)$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^3$.

Solution :

Propriété 3.3 *(Interprétation de la liberté)*

La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille **libre** de E, si et seulement si tout vecteur de Vect $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'exprime de manière *unique* comme combinaison linéaire des u_i.

Preuve

- **sens direct :** on suppose que la famille est libre et on décompose un vecteur $u \in$ Vect $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de deux manières différentes : $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i$.
  Montrons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$ (la décomposition est unique).
  Si on fait la différence, on obtient : $0_E = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i - \sum_{i=1}^n \mu_i u_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) u_i$.
  Or, la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est libre, donc une si combinaison linéaire de ses vecteurs est nulle, alors les coefficients sont nuls. Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\lambda_i = \mu_i$.
- **sens réciproque :** on suppose que la décomposition est unique pour tout vecteur de l'espace engendré. C'est donc vrai en particulier pour le vecteur 0 :
  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E = \sum_{i=1}^n 0 \cdot u_i \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$. Donc la famille est bien libre. ∎

Explications

Quel est l'intérêt d'une famille libre ?
Si un vecteur u peut être décomposé comme combinaison linéaire des éléments de cette famille, alors, cette décomposition est unique.
C'est l'intérêt des familles libres, on pourra raisonner par identification :

> Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leur décomposition dans la famille est identique.

Le théorème suivant sert à construire des familles libres par ajouts successifs de vecteurs. On l'utilise dans des raisonnements par récurrence.
Il traduit une intuition géométrique forte qu'il faut comprendre :
Si on veut ajouter un vecteur qui donne une « information » supplémentaire, il faut (et il suffit) qu'il n'appartienne pas à l'espace déjà engendré par les premiers vecteurs.

Théorème 3.4 *(Ajout d'un vecteur à une famille libre)*

Si $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de E et $y \in E$,
alors la famille obtenue à partir de $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ complétée par y est libre si et seulement si

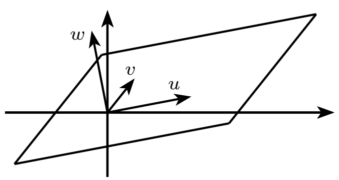
$$y \notin \text{Vect } (u_i)_{1 \leq i \leq n}$$

Preuve

(sens direct) par contraposée.
Si $y \in \text{Vect } \left(\{u_i\}_{i \leq i \leq n}\right)$, alors y s'écrit comme combinaison linéaire des (u_i), donc la nouvelle famille est liée.
(sens réciproque) par contraposée.
Si la famille obtenue est liée, alors on peut trouver des vecteurs (non tous nuls) tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + \lambda_{n+1} y = 0_E$.
Si $\lambda_{n+1} = 0$, alors la famille des u_i serait liée, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc en divisant par λ_{n+1}, on montre que $y \in \text{Vect } \left(\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}\right)$. ∎

Exemple

Si u et v sont deux vecteurs non colinéaires (famille libre), alors Vect (u, v) est un plan.
Pour que la famille (u, v, w) soit libre, il faut (et il suffit) que les vecteurs soient non coplanaires, c'est-à-dire que w n'appartienne pas au plan engendré par u et v.



Propriété 3.5 *(Famille extraite)*

Toute famille extraite d'une famille libre est libre.

Explications

Si dans une famille de vecteurs, chaque vecteur porte une information qui lui est propre et ne peut pas s'obtenir avec les autres vecteurs de la famille, alors, c'est « encore plus vrai » si on ne prend qu'une partie de cette famille :

Preuve

On suppose que $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille libre.
On en extrait une sous famille (c'est-à-dire que l'on ne prend qu'une partie des u_k) et on écrit qu'une combinaison linéaire de ces vecteurs est égale à 0_E.
Or, c'est également une combinaison linéaire de la famille initiale (on rajoute zéro fois chacun des vecteurs qui n'apparaissait pas dans la sous famille).
Donc, par liberté de la famille initiale, tous les scalaires sont nécessairement nuls.
Ils le sont donc pour la sous famille : elle est libre. ■

B Familles génératrices

La notion de famille génératrice est très simple dans son principe : par définition, une famille est génératrice de l'espace qu'elle engendre.
Ainsi, pour savoir si une famille est génératrice de E, il faut voir si la famille engendre l'espace E.

Définition 3.6 *(Famille génératrice)*

La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille **génératrice** de E, si

$$E = \text{Vect } (u_i)_{1 \leq i \leq n}$$

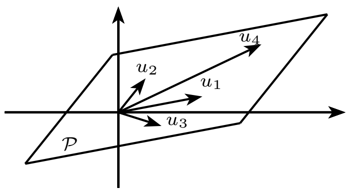
Cette notion nous assure que l'on ne travaille pas dans un espace « trop gros » et que tout vecteur de E peut être décomposé dans la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$.
Si ce n'était pas le cas, alors, il faudrait, soit travailler dans un espace plus petit, soit ajouter des vecteurs dans la famille.

Théorème 3.7 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille **génératrice** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des u_i.

Exemple

Une famille de $\mathbf{R}^3$ génératrice d'un plan doit contenir deux vecteurs non colinéaires.
Dans la figure ci-contre,
(u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille génératrice du plan $\mathcal{P}$.
(on pourrait générer le même plan avec moins de vecteurs)



Exemple *(Trouver une famille génératrice)*

Soit F le sous espace de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F = \left\{ (x + y + z, x - 3y + 4z, y - z, -x + 2z) \,, \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

Donner une famille génératrice de F.
Solution :

Exemple *(méthode)*

Montrer que $e_1 = (1,1,1)\,, e_2 = (1,2,3), e_3 = (2,3,4), e_4 = (3,2,3)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. La famille est-elle libre ?
Solution :

Dans l'exemple précédent, on observe que la famille est génératrice si et seulement si le système admet une solution quelque soit le second membre.

⚠ Ne pas être génératrice de $\mathbf{R}^n$ n'empêche pas d'être génératrice d'un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Propriété 3.8 *(Famille complétée)*

Tout famille génératrice de E complétée d'un ou plusieurs vecteurs de E est génératrice de E.

Preuve

Si $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E que l'on complète avec $u_{n+1}, \cdots, u_p$, alors tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme combinaison de $u_1, \cdots, u_n$. Ainsi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ ..
En posant $\lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_p = 0$, alors on a également $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.
Donc $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice de E. ■

C Bases

Ce qui nous intéresse, c'est de pouvoir générer un espace avec le nombre minimal de vecteurs.
Pour cela, il faut donc que la famille de vecteurs soit génératrice.
Mais en général, une famille génératrice contient plus de vecteurs que nécessaire. On impose donc également à la famille d'être libre.

Définition 3.9 *(Base)*

La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une **base** de E, si elle est libre et génératrice de E.

Théorème 3.10 *(Caractérisation)*

La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une **base** de E, si et seulement si
tout vecteur de E peut s'écrire de façon *unique* comme une combinaison linéaire des u_i.

Les coefficients de la combinaison linéaire sont alors appelés les **coordonnées** du vecteur dans la base.

Preuve

Tout vecteur de E peut se décomposer dans la famille car elle est génératrice de E et l'écriture est unique car la famille est libre. ■

Exemple

- Les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^2$.
- De même, si dans $\mathbf{R}^n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $e_1 = (0, 0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, 0, ..)$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 0, sauf la coordonnée i qui vaut 1, alors $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{R}^n$.

Exemple

Donner une base de $\mathbf{R}^2$, autre que la base canonique.
Solution :

Exemple *(Décomposer un vecteur dans une base de $\mathbf{R}^n$)*

Dans $\mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $e_1 = (1, 5, 2)$, $e_2 = (0, 2, -2)$ et $e_3 = (1, 3, 2)$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ donner les coordonnées de $u = (x, y, z)$ dans cette base.
Solution :