

# SUITES RÉELLES

« L'infini n'est pas un état stable, mais la croissance elle-même. »  
Aristote

Les suites traduisent des phénomènes par étapes. Ces processus n'avancent pas de façon continue, mais par pas de temps entiers. Dès l'antiquité, elles ont servi à Archimède pour proposer une méthode d'approximation de  $\pi$  et ont interrogé sur la notion d'*infini*.

Il faut attendre le XIX<sup>e</sup> siècle avec Cauchy pour formaliser la notion de limite. À sa suite, Weierstrass donnera la première définition axiomatique rigoureuse de l'ensemble des réels.

## 1 DÉFINITION D'UNE SUITE

### A Opérations sur les suites

#### Définition 1.1

Une **suite réelle**  $u$  est une fonction de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

On note la suite  $u$  ou  $(u_n)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

Lorsque la suite n'est définie qu'à partir d'un rang  $n_0$ , on note  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

L'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  s'appelle le **terme général**.

**⚠** Il ne faut pas confondre la notation  $(u_n)$  qui représente la suite toute entière, et  $u_n$  qui représente le terme  $n$  de la suite (c'est-à-dire un réel). Écrire  $u_n$ , suppose que  $n$  est un entier qui a été préalablement défini. En revanche, la notation  $(u_n) = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  comporte en elle-même la définition de  $n$  (placée en indice dans la deuxième notation, et sous-entendue dans la première).

Par exemple, il ne faut jamais écrire que  $u_n$  est croissante. C'est un non-sens ! C'est la même distinction qu'entre une fonction  $f$  et sa valeur en un point  $f(x)$ .

#### Définition 1.2

On définit les opérations  $+$ ,  $\times$ , et  $\cdot$  sur les suites par :

1. Pour toutes suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , on définit la suite **somme**  $(u_n) + (v_n)$  par

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$

2. Pour toutes suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , on définit la suite **produit**  $(u_n) \times (v_n)$  par

$$(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$$

3. Pour toute suite  $(u_n)$  et pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on définit la suite  $\lambda \cdot (u_n)$  par

$$\lambda \cdot (u_n) = (\lambda u_n)$$

*Remarque :* La somme et le produit externe permettent de définir une structure d'espace vectoriel pour les suites.

#### Explications

Les opérations sur les suites se font terme à terme.

**⚠** On peut avoir  $(u_n) \times (v_n) = 0$  alors qu'aucune des suites n'est nulle. La structure n'est pas *intégrale* et on ne peut pas simplifier une égalité par une suite, même si elle est non nulle.

#### Exemple

Trouver deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $(u_n v_n)$  soit la suite nulle, sans qu'aucune des deux ne le soit.

## B Suites majorées, minorées et bornées

### Définition 1.3

Une suite  $(u_n)$  est **majorée**, s'il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$  :

$$(u_n) \text{ majorée} \iff \exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$$

$M$  est alors un **majorant** de  $(u_n)$ .

⚠ Le majorant, s'il existe, n'est pas unique, en particulier, si  $M$  est un majorant de la suite  $u$ , alors tout nombre qui lui est supérieur est aussi un majorant de  $u$ .

### Explications

Une suite est majorée, s'il existe une « barrière » qu'elle ne dépasse pas.

Par définition, une suite est majorée, si l'ensemble de ses termes est majoré :

$$\{u_n, n \in \mathbf{N}\} \leq M$$

### Exemple

Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang, est majorée.

**Solution :**

### Exemple (Notations)

Expliquer pourquoi  $u_n$  est toujours majoré.

**Solution :**

### Exemple

L'ensemble des suites majorées forme-t-il un espace vectoriel ?

**Solution :**

Le contraire d'une suite majorée s'obtient par la négation de l'assertion logique précédente :

### Propriété 1.4

Une suite  $(u_n)$  n'est pas majorée si

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, u_{n_0} > M$$

### Explications

De façon imagée, quel que soit le nombre  $M$  choisi (aussi grand soit-il), on trouvera toujours un terme (désigné par un indice  $n_0$ ) qui dépassera  $M$  :  $u_{n_0} > M$ .

De la même façon :

### Définition 1.5

$$(u_n) \text{ minorée} \iff \exists m \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq m$$

On dit que  $m$  est un **minorant** de  $(u_n)$ .

### Définition 1.6 (Bornes supérieures et inférieures)

Lorsque  $(u_n)$  est majorée, elle admet un plus petit majorant que l'on appelle sa **borne supérieure**.

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} u_n = \sup \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$$

Lorsque cette borne est atteinte en un terme  $u_{n_0}$ , c'est alors un **maximum**.

Lorsque  $(u_n)$  est minorée, elle admet un plus grand minorant que l'on appelle sa **borne inférieure**.

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} u_n = \inf \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$$

Lorsque cette borne est atteinte en un terme  $u_{n_0}$ , c'est alors un **minimum**.

### Preuve

Voir le cours sur les nombres réels. ■

### Définition 1.7

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est **bornée**, si elle est à la fois majorée et minorée.

On note  $\ell^\infty$  l'ensemble des suites bornées.

### Propriété 1.8 (Caractérisation d'une suite bornée)

$(u_n)$  est bornée si et seulement si  $(|u_n|)$  est majorée.

**Preuve**

$$\begin{aligned}
 (u_n) \text{ est bornée} &\iff \exists(m, M) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, m \leq u_n \leq M \\
 &\iff \exists A \in \mathbf{R}_+, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, -A \leq u_n \leq A \quad (*) \\
 &\iff \exists A \in \mathbf{R}_+, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq A \\
 &\iff (|u_n|) \text{ est majorée}
 \end{aligned}$$

Pour l'équivalence de (\*), le sens direct s'obtient en prenant  $A = \max(M, -m)$  et le sens réciproque en prenant  $M = A$  et  $m = -A$ . ■

**Exemple**

Pour  $a \in \mathbf{R}$ ,  $(\cos(an))_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty$   
 Pour  $|a| \leq 1$ , les suites définies par  $u_0 \in \mathbf{R}$  et  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n$  sont bornées.  
 Pour  $b > 0$ , les suites définies par  $u_0 \in \mathbf{R}$  et  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n + b$  sont minorées, mais non majorées.

**Propriété 1.9**

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites bornées et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , alors  $(u_n) + (v_n)$ ,  $(u_n) \times (v_n)$  et  $\lambda(u_n)$  sont des suites bornées.

En particulier, l'ensemble des suites bornées forme un espace vectoriel.

**Preuve**

Si on suppose que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bornées, alors  $\exists A \in \mathbf{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq A$  et  $|v_n| \leq A$ .  
 (pour  $A$  on prend le maximum entre deux majorants de  $u$  et  $v$ )  
 Somme :  $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq 2A$  (inégalité triangulaire)  
 par hypothèse.

Donc la somme est bornée.

Produit :  $|u_n v_n| \leq |u_n| |v_n| \leq A^2$ . Donc  $(u_n v_n)$  est bornée.

Produit avec un scalaire :  $|\lambda u_n| = |\lambda| |u_n| \leq |\lambda| A$  (car  $|\lambda| \geq 0$ ). Donc  $(\lambda u_n)$  est bornée. ■

**Exemple**

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont majorées,  $(u_n) \times (v_n)$  est-elle nécessairement majorée ?

**Solution :**

**C Monotonie des suites**

**Définition 1.10**

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- **strictement croissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- **strictement décroissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} < u_n$

*Remarque :* On peut aussi définir une suite croissante ou décroissante à partir d'un certain rang  $n_0$ .

**Exemple**

La suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$  pour tout  $n \geq 1$  est croissante.  
 La suite définie par  $u_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \geq 1$  est décroissante.

⚠ Le contraire d'une suite croissante est une suite telle que  $\exists n_0 \in \mathbf{N}, u_{n_0+1} < u_{n_0}$ .

Cela ne veut pas dire que la suite est décroissante.

Ainsi, une suite qui n'est pas croissante, n'est pas nécessairement décroissante : il existe des suites qui ne sont pas monotones ; elles ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

**Exemple**

Donner l'exemple d'une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante.

**Solution :**

**Définition 1.11**

- $(u_n)$  est dite **monotone**, si elle est soit croissante, soit décroissante.
- $(u_n)$  est dite **constante**, si elle est à la fois croissante et décroissante.
- $(u_n)$  est dite **stationnaire**, si elle est constante à partir d'un certain rang.

**Méthode**

Pour étudier la monotonie d'une suite  $(u_n)$ , on peut

1. Étudier  $u_{n+1} - u_n$  (cas d'une suite définie avec des sommes ou une relation de récurrence linéaire)
2. Étudier  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  si la suite est de **signe constant** et **ne s'annule pas** (cas des suites avec des produits ou des puissances),
3. Si  $u_n = f(n)$ , étudier les variations de  $f$ .

## 2 THÉORÈMES DE CONVERGENCE

### A Suites convergentes

#### Définition 2.1

On dit qu'une suite  $(u_n)$  **converge** vers un réel  $\ell$  (ou admet  $\ell$  pour limite), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est convergente, s'il existe un réel  $\ell$  tel que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

#### Explications

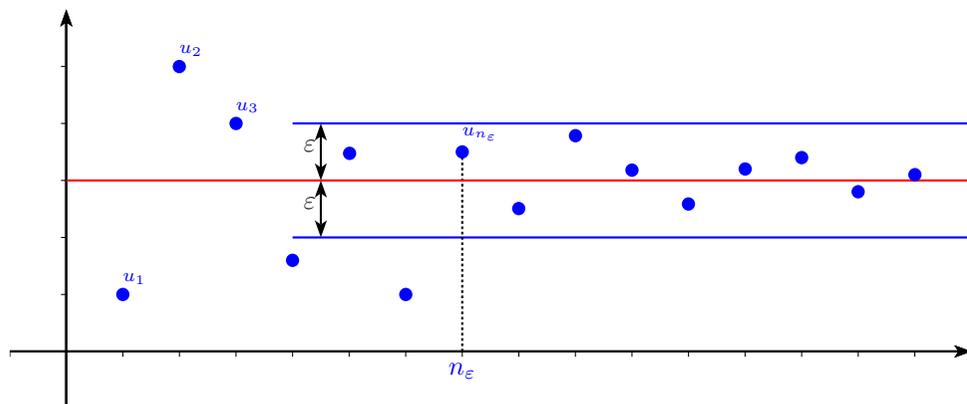
Cela veut dire que la suite s'approche de  $\ell$  autant que l'on veut. :

Si je trace un « couloir » aussi fin que je veux autour de  $\ell$ , il y aura toujours un rang à partir duquel la suite sera « coincée » dans ce couloir.

Reprenons cette phrase et traduisons-la avec la définition formelle :

Si je trace un « couloir » aussi fin que je veux autour de $\ell$ , $\varepsilon$ désigne la demi-largeur du couloir	$\forall \varepsilon > 0$
Il y aura toujours un rang $n_\varepsilon$ désigne un rang qui convient	$\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$
à partir duquel	$\forall n \geq n_\varepsilon$
la suite sera « coincée » dans ce couloir	$ u_n - \ell  \leq \varepsilon$

Contrairement à l'usage courant en français, une limite n'est pas une barrière infranchissable. Au contraire. En général, une suite passe au dessus et en dessous de la limite de nombreuses fois. La limite est davantage comme un point d'équilibre qui attire la suite et dont elle s'approche infiniment (elle peut éventuellement osciller autour, comme pour un pendule amorti).



#### Méthode

Pour montrer qu'une suite converge en utilisant cette définition, on pose  $\varepsilon > 0$  quelconque, et on cherche un  $n_\varepsilon$  qui dépend de  $\varepsilon$  tel que tous les termes après  $n_\varepsilon$  soient dans le couloir  $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ .

**Cette définition formelle ne sera utile que pour les exercices très théoriques** (rares). Dans la très grande majorité des cas, on utilisera les théorèmes de convergence présentés plus loin pour démontrer la convergence et trouver la limite.

⚠  $n_\varepsilon$  dépend de  $\varepsilon$  (plus le couloir est étroit, plus  $n_\varepsilon$  sera grand).

Une suite qui tend vers  $+\infty$  n'est pas convergente, même si on dit que  $+\infty$  est sa limite.

#### Exemple

Trouver des exemples de suites divergentes qui ne tendent ni vers  $+\infty$  ni vers  $-\infty$ .

1. Avec une suite bornée.
2. Avec une suite ni majorée, ni minorée.

#### Solution :

#### Propriété 2.2

1. Si une suite  $(u_n)$  converge, alors sa limite est unique.
2. Une suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si et seulement si  $(u_n - \ell)$  converge vers 0.

#### Preuve

1. On suppose qu'il existe deux limites,  $\ell_1$  et  $\ell_2$  et on cherche à montrer qu'alors  $\ell_1 = \ell_2$ .  
On suppose par l'absurde que  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Par exemple  $\ell_1 < \ell_2$ .

#### Idée intuitive :

L'idée est de montrer que la suite ne peut pas être à la fois très proche de  $\ell_1$  et de  $\ell_2$ . Pour cela on définit deux couloirs autour de  $\ell_1$  et  $\ell_2$  de telle sorte que la suite ne puisse être dans les deux à la fois. Il suffit de choisir une largeur de couloir égale au tiers de la distance entre  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .

Puisque  $u_n \rightarrow \ell_1$ , on sait qu'à partir d'un certain rang  $n_1$ , tous les termes sont dans le couloir autour de  $\ell_1$ .

Mais  $u_n \rightarrow \ell_2$  également. À partir d'un rang  $n_2$  (a priori différent), tous les termes sont dans le couloir autour de  $\ell_2$ .

Ainsi, en allant au delà de  $n_1$  et de  $n_2$ , les termes sont à la fois dans le couloir autour de  $\ell_1$  et dans le couloir autour de  $\ell_2$ . Mais c'est impossible car nous avons vu que les deux couloirs sont disjoints. Il est donc impossible que  $(u_n)$  tende vers deux limites différentes.

**Formellement :**

On pose  $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$ .

$u_n \rightarrow \ell_1$ , donc  $\exists n_1 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ .

$u_n \rightarrow \ell_2$ , donc  $\exists n_2 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_2, |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$ .

Soit  $N = \max(n_1, n_2)$ , alors  $\forall n \geq N$ ,

$$\ell_2 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \varepsilon \quad (*)$$

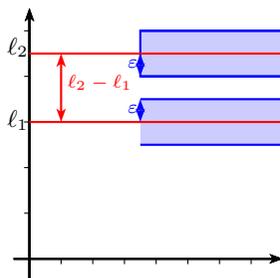
Or  $\ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{\ell_2 + 2\ell_1}{3}$ ,

Et  $\ell_2 - \varepsilon = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{2\ell_2 + \ell_1}{3}$ ,

Ainsi,  $\ell_1 < \ell_2$ ,  $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$ , ce qui est contradictoire avec l'équation (\*).

C'est absurde.

Donc  $\ell_1 = \ell_2$  et la limite d'une suite est unique.



2. Simplement car  $|u_n - \ell - 0| = |u_n - \ell|$ .

Intuitivement, si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors elle s'en approche infiniment. Cela veut dire que la distance entre  $u_n$  et  $\ell$  tend vers 0, c'est-à-dire que  $(u_n - \ell)$  tend vers 0.

**Exemple**

La suite définie par  $u_n = \frac{1}{n+1}$  converge vers 0.

La suite définie par  $v_n = \frac{1}{n+1} + 5$  converge vers 5.

**⚠ Tout doit disparaître :** lorsque l'on est passé à la limite, tous les «  $n$  » ont disparu. Ils tendent tous vers  $+\infty$ , et on ne doit pas en retrouver dans le résultat.

**Théorème 2.3**

Si  $(u_n)$  converge, alors elle est bornée.

*Remarque :* On utilise souvent la contraposée : si une suite n'est pas bornée, alors elle diverge.

**Preuve**

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé, par exemple  $\varepsilon = 1$ ,

si  $u_n \rightarrow \ell$ , alors

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq 1$$

De plus,  $\{u_n\}_{n < n_\varepsilon}$  est un ensemble fini d'éléments. Il admet donc un maximum  $M$  et un minimum  $m$ .

Ainsi  $\forall n < n_\varepsilon, m \leq u_n \leq M$ .

Et pour  $n \geq n_\varepsilon, \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$ .

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \min(m, \ell - 1) \leq u_n \leq \max(M, \ell + 1)$$

Donc  $(u_n)$  est bornée. ■

**⚠** La réciproque est fautive. Par exemple la suite  $(\sin \frac{n\pi}{4})$  est bornée mais ne converge pas.

**Propriété 2.4**

Si  $(u_n)$  et  $(\varepsilon_n)$  sont deux suites réelles, telles que

1.  $(u_n)$  est bornée,
2.  $(\varepsilon_n)$  tend vers 0,

alors  $(u_n \varepsilon_n)$  tend vers 0.

**Preuve**

Si  $(u_n)$  est bornée, alors  $\exists M \in \mathbf{R}_+$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M$ .

Sans restreindre la généralité, on peut supposer  $M > 0$  (sinon la suite  $(u_n)$  est nulle et le résultat trivial).

Soit  $\varepsilon > 0$ , on peut poser  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$  (car  $M > 0$ ),  
comme  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |\varepsilon_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$$

Donc  $\forall n \geq n_0, |u_n \varepsilon_n| = |u_n| |\varepsilon_n| \leq M |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ . Donc  $(u_n \varepsilon_n)$  converge vers 0. ■

**Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  par  $\frac{\sin n}{n}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Trouver des contre-exemples lorsque l'une des deux hypothèses de la propriété 2.4 n'est pas vérifiée.

**Solution :**

## B Suites divergentes

## Définition 2.5

Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas. C'est-à-dire

$$(u_n) \text{ diverge} \iff \forall \ell \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } |u_n - \ell| > \varepsilon_0$$

## Définition 2.6

Une suite  $(u_n)$  admet  $+\infty$  pour limite si et seulement si

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_0, u_n \geq M$$

⚠ 1. Une suite qui diverge ne tend en général pas vers  $\pm\infty$ .

2. Il ne suffit pas que  $(u_n)$  ne soit pas majorée pour quelle tende vers  $+\infty$ .  
En effet, il faut en plus que  $(u_n)$  reste au dessus de  $M$  à partir d'un certain rang.

## Exemple

$u_n = (-1)^n n$  est une suite non bornée qui diverge, mais elle ne tend pas vers  $+\infty$ .

Remarque : On définit de même une suite admettant  $-\infty$  pour limite.

## Définition 2.7

La convergence ou divergence d'une suite s'appelle sa **nature**.

## Propriété 2.8

La modification d'un nombre fini de termes de la suite ne modifie pas sa nature ni son éventuelle limite.

## Preuve

Si un nombre fini de termes sont modifiés, on peut noter  $N$  le plus grand indice de ceux-ci et il suffit de choisir  $n_0 > N$  pour appliquer les définitions. ■

## C Opérations sur les limites

## Théorème 2.9

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$ , soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ .

- $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$  est convergente de limite  $\lambda\ell + \mu\ell'$  (**linéarité**).
- $(u_n) \times (v_n)$  est convergente de limite  $\ell \times \ell'$ .

## Preuve

**Preuve pour  $\lambda(u_n)$  :**

Si  $\lambda = 0$ , la suite est identiquement nulle et  $\lambda u_n \rightarrow 0 = \lambda\ell$ .

Si  $\lambda \neq 0$ ,

Soit  $\varepsilon > 0$ , alors  $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$  car  $|\lambda| > 0$ .

On peut donc appliquer la définition de la convergence de  $(u_n)$  à  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ .

Donc

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda| |u_n - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda\ell| \leq \varepsilon$$

Donc  $\lambda(u_n)$  converge vers  $\lambda\ell$ .

**Preuve pour  $(u_n) + (v_n)$  :**

On utilise l'inégalité triangulaire dans la définition.

Soit  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ .

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n'_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n'_0 \Rightarrow |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour  $n \geq \max(n_0, n'_0)$ ,

$$|v_n + v_n - (\ell + \ell')| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc  $(u_n + v_n)$  converge vers  $\ell + \ell'$ .

On en déduit la propriété de linéarité énoncé dans le théorème.

**Preuve pour  $(u_n) \times (v_n)$  :**

On remarque que  $u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$

Or  $(v_n)$  converge donc est bornée et  $(u_n - \ell) \rightarrow 0$ .

Donc d'après la propriété 2.4,  $(u_n - \ell)v_n \rightarrow 0$

De même,  $(v_n - \ell')u_n \rightarrow 0$ .

Donc par somme (preuve précédente),  $u_n v_n - \ell\ell' \rightarrow 0$ .

Donc  $u_n v_n \rightarrow \ell\ell'$ . ■

**Lemme 2.10**

Si  $(v_n)$  est une suite convergente de limite non nulle, alors  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang.

**Preuve**

$v_n \rightarrow \ell \neq 0$ . Si on pose  $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$ , alors  $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$ .  
 Par exemple, si  $\ell > 0$ , alors  $\forall n \geq n_0, 0 < \frac{\ell}{2} \leq v_n \leq \frac{3\ell}{2}$ , donc  $v_n \neq 0$ .  
 De même, si  $\ell < 0$ , alors  $\forall n \geq n_0, \frac{3\ell}{2} \leq v_n \leq \frac{\ell}{2} < 0$ , donc  $v_n \neq 0$ . ■

**Théorème 2.11**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$  avec  $\ell' \neq 0$

1. la suite  $(\frac{1}{v_n})$  est définie à partir d'un certain rang et elle est convergente de limite  $\frac{1}{\ell'}$
2. la suite  $(\frac{u_n}{v_n})$  est définie à partir d'un certain rang et elle est convergente de limite  $\frac{\ell}{\ell'}$

**Preuve**

Il suffit de faire la preuve pour le premier point. Le deuxième en découle à partir du théorème du produit de deux suites.

$v_n \rightarrow \ell' \neq 0$ , donc  $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_0, v_n \neq 0$ .

On peut donc définir la suite  $(\frac{1}{v_n})_{n \geq n_0}$ .

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'} \right| = \left| \frac{\ell' - v_n}{v_n \ell'} \right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n \ell'|}$$

**Idée :**

À présent, l'idée est de montrer que  $(\frac{1}{v_n \ell'})$  est bornée (ce qui nous permettra d'utiliser la propriété 2.4).

Or, montrer que l'inverse est bornée, revient à prouver que  $v_n$  n'est pas « trop près » de 0. On utilise pour cela sa convergence pour l'écartier de au moins  $\frac{|\ell'|}{2}$  de 0 (avec le bon choix pour  $\varepsilon$ ).

**Formalisation :**

Pour  $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2} > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_\varepsilon, |v_n - \ell'| \leq \frac{|\ell'|}{2}$ , donc  $|v_n| \geq \frac{\ell'}{2}$ , donc  $|v_n \ell'| \geq \frac{\ell'^2}{2}$ .

Donc  $\forall n \geq \max(n_0, n_\varepsilon), \left| \frac{1}{v_n \ell'} \right| \leq \frac{2}{\ell'^2}$

La suite  $\frac{1}{v_n \ell'}$  est donc bornée et la suite  $(v_n - \ell')$  tend vers 0.

Donc  $\frac{1}{v_n} \rightarrow 0$ . ■

**Théorème 2.12 (Tableau des limites)**

$\ell$  et  $\ell'$  sont deux réels non nuls

$u_n$	$v_n$	$u_n + v_n$	$u_n \times v_n$	$\frac{u_n}{v_n}$
$\ell$	$\ell'$	$\ell + \ell'$	$\ell \ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
0	$\ell'$	$\ell'$	0	0
$\ell$	0	$\ell$	0	$\pm\infty$ pas de limite
0	0	0	0	indéterminé
$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé	0
$+\infty$	$\ell'$	$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	indéterminé	$\pm\infty$ pas de limite
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé
$+\infty$	$-\infty$	indéterminé	$-\infty$	indéterminé

L'existence du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$  suppose que la suite  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

**Explications**

La forme *indéterminée* veut dire qu'il n'existe pas de formule générale. Mais cela ne veut pas dire qu'il faille s'en contenter. Au contraire, il faut exprimer différemment la suite pour trouver sa limite et lever l'indétermination.

⚠ Une suite de limite nulle peut ne jamais s'annuler. Par exemple  $\frac{1}{n}$  admet 0 pour limite, mais ne s'annule jamais.

**Méthode (Lever une indétermination)**

1. Lorsque c'est un quotient de puissances, on factorise par les termes de plus grande puissance au numérateur et au dénominateur.
2. Lorsque c'est la différence de deux racines, on utilise la quantité conjuguée.

Les croissances comparées compléteront ces méthodes.

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \frac{2n^3 - 5n + 1}{n^3 + 6n^2 + 8}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \frac{-n^3 - n^2 + n + 1}{6n^2 + 7}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}}$ .

**Solution :**

**D Convergence des suites monotones****Théorème 2.13** (*Théorème de la limite monotone*)

Si  $(u_n)$  est une suite monotone, alors  $(u_n)$  admet une limite finie ou infinie.

Les deux énoncés suivants, vont nous donner des précisions sur le comportement de la suite, selon qu'elle est bornée ou non. Leur preuve permettra donc de démontrer le théorème de la limite monotone.

**Théorème 2.14**

1. Si  $(u_n)$  est une suite croissante majorée, alors  $(u_n)$  converge et sa limite est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} u_n$$

2. Si  $(u_n)$  est une suite croissante non majorée, alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$

**Preuve**

*Preuve non exigible.*

**1<sup>er</sup> cas :** si  $(u_n)$  est non majorée.

Alors par définition d'une suite non majorée :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_M \in \mathbf{N}, \text{ tel que } u_{n_M} > M$$

Or  $(u_n)$  est croissante, donc  $\forall n \geq n_M, u_n \geq u_{n_M} > M$ .

Ainsi

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_M \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_M, u_n > M$$

C'est la définition d'une suite qui tend vers  $+\infty$ .

**2<sup>e</sup> cas :** si  $(u_n)$  est majorée, alors elle admet une borne supérieure  $M$ .

Ainsi, par définition de la borne supérieure,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } M - \varepsilon \leq u_{n_\varepsilon} \leq M$$

La première inégalité traduit que  $M$  est le plus petit majorant : s'il n'existait pas de  $u_n$  supérieur à  $M - \varepsilon$ , alors  $M - \varepsilon$  serait aussi un majorant, qui serait strictement plus petit que  $M$ . C'est absurde. D'où l'existence de  $u_{n_\varepsilon} \geq M - \varepsilon$ .

La deuxième inégalité traduit que  $M$  est un majorant, c'est-à-dire que tous les termes de la suite lui sont plus petits :  $u_{n_\varepsilon} \leq M$ .

Or  $(u_n)$  est croissante, donc  $\forall n \geq n_\varepsilon, u_n \geq u_{n_\varepsilon} \geq M - \varepsilon$ .

De plus comme  $M$  est un majorant de la suite,  $\forall n \geq n_\varepsilon, u_n \leq M$ .

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow M - \varepsilon \leq u_n \leq M \Rightarrow |u_n - M| \leq \varepsilon$$

Donc  $u_n \rightarrow M$  sa borne supérieure. ■

**Corollaire 2.15**

1. Si  $(u_n)$  est une suite décroissante minorée, alors  $(u_n)$  converge et sa limite est

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} u_n$$

2. Si  $(u_n)$  est une suite décroissante non minorée, alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$

**Preuve**

On utilise le théorème 2.14 avec la suite  $-u$ . ■

**Méthode** (*Utilisation du théorème de la limite monotone*)

Pour une suite monotone bornée, le théorème de la limite monotone donne l'**existence** de la limite.

Mais il est souvent difficile de trouver la valeur de cette limite avec ce théorème (la borne supérieure est difficile à trouver).

Une fois que l'on sait que la suite converge, on cherchera donc un autre moyen pour calculer la limite (si c'est demandé).

⚠ Il faut vérifier que le majorant **ne dépend pas de  $n$**  : c'est un nombre fixe.

**Exemple**

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^k}$$

Montrer que  $(u_n)$  converge (on pourra utiliser la majoration  $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k}$ ).

**Solution :****Définition 2.16**

Deux suites  $u$  et  $v$  sont **adjacentes**, si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.

**Théorème 2.17** (*Suites adjacentes*)

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

**Preuve**

Soient  $u$  et  $v$  les deux suites adjacentes, avec  $u$  croissante et  $v$  décroissante.

★ On démontre par l'absurde que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ .

En effet, s'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $u_{n_0} > v_{n_0}$  alors on peut poser  $\varepsilon = \frac{u_{n_0} - v_{n_0}}{2}$ .

Or  $(u_n)$  croissante, donc  $\forall n \geq n_0$ ,  $u_n \geq u_{n_0}$ .

Et  $(v_n)$  décroissante, donc  $\forall n \geq n_0$ ,  $v_n \leq v_{n_0}$ .

Donc  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - v_n| = u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} > \varepsilon$ .

Donc  $(u_n - v_n)$  ne tend pas vers 0. C'est absurde.

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq v_n$$

★ On démontre que  $(u_n)$  converge

$(v_n)$  décroissante, donc  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq v_n \leq v_0$  qui est une constante qui ne dépend pas de  $n$ .  $(u_n)$  est donc croissante majorée,

D'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge.

★ On démontre que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.

De la même façon que pour  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  est une suite décroissante minorée, donc elle converge.

Ainsi par opération sur les limites, si on note  $u_n \rightarrow \ell_u$  et  $v_n \rightarrow \ell_v$ ,  $u_n - v_n \rightarrow \ell_u - \ell_v = 0$

Donc  $\ell_u = \ell_v$

**Exemple** (*Suite harmonique : à connaître*)

On note

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une limite commune notée  $\gamma$ .

**Solution :**

■

## E Convergence et comparaison

**Théorème 2.18** (*Conservation des inégalités par passage à la limite*)

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

⚠ Même dans le cas d'une inégalité stricte :  $u_n < v_n$ , on conserve une inégalité large pour les limites.

**Corollaire 2.19**

Soit  $a \in \mathbf{R}$  une constante fixée, et  $(u_n)$  une suite convergente.

- si  $u_n \leq a$  à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq a$$

- si  $u_n \geq a$  à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq a$$

**Exemple** (*Théorème des segments emboîtés*)

Voici une autre formulation du théorème des suites adjacentes :

Si  $(I_n)$  est une suite de segments de la forme  $[a_n; b_n]$ , tels que

1.  $\forall n \in \mathbf{N}, I_{n+1} \subset I_n$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$

alors  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n$  est un singleton

**Preuve**

On raisonne par l'absurde (la preuve ressemble beaucoup à celle de la propriété 2.2 sur l'unicité de la limite) :

Supposons que  $u_n \rightarrow l_u$  et  $v_n \rightarrow l_v$ , avec  $l_u > l_v$ . On peut alors poser  $\varepsilon = \frac{l_u - l_v}{3}$ ,

Comme  $u_n \rightarrow l_u$ ,  $\exists n_1 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_1, |u_n - l_u| < \varepsilon \Rightarrow u_n \geq l_u - \varepsilon$ .

Comme  $v_n \rightarrow l_v$ ,  $\exists n_2 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_2, |v_n - l_v| < \varepsilon \Rightarrow v_n \leq l_v + \varepsilon$ .

donc  $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$ ,  $u_n \geq l_u - \varepsilon = \frac{2l_u + l_v}{3}$  et  $v_n \leq l_v + \varepsilon = \frac{l_u + 2l_v}{3}$

Comme  $l_u > l_v$ ,

$$v_n \leq \frac{l_u + 2l_v}{3} < \frac{2l_u + l_v}{3} \leq u_n$$

Or, on a supposé  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang : c'est absurde.

Donc  $l_u \leq l_v$  : les inégalité (larges) donc conservées par passage à la limite.

Pour le corollaire, il suffit de prendre  $v$  une suite constante égale à  $a$ . ■

**Théorème 2.20**

Si  $u_n \rightarrow +\infty$  et si  $(v_n)$  est une suite telle que  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq v_n$

Alors

$$v_n \rightarrow +\infty$$

*Remarque* : Il existe un théorème analogue en  $-\infty$ .

**Preuve**

On utilise la définition de la limite en  $+\infty$  pour  $v$ .

Soit  $M \in \mathbf{R}$ ,

$u_n \rightarrow +\infty$ , donc  $\exists n_M \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_M, u_n \geq M$

or  $v_n \geq u_n$ , donc  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_M \Rightarrow v_n \geq M$ .

C'est la définition pour dire que  $v_n \rightarrow +\infty$ . ■

**Théorème 2.21** (Théorème d'encadrement dit aussi théorème des gendarmes)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de même limite  $\ell$

Si  $(w_n)$  est une suite telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq w_n \leq v_n$$

Alors  $(w_n)$  est convergente de limite  $\ell$

⚠ Pour utiliser le théorème de passage des inégalités au limites, il faut **d'abord** montrer que les suites convergent.

Dans le théorème d'encadrement, la convergence de  $(w_n)$  est une conclusion : le théorème d'encadrement montre que la suite converge **et** donne sa limite.

**Preuve**

Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$u_n \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_1$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n$ .

$v_n \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_2$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow v_n \leq \ell + \varepsilon$ .

Donc  $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$ ,  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq w_n \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$ .

C'est-à-dire  $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$ . Donc  $w_n \rightarrow \ell$ . ■

**F Composition avec une application**

**Théorème 2.22** (Convergence et limites de fonctions)

Si  $f$  est une fonction qui admet une limite en  $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ , et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

**Corollaire 2.23** (Convergence et continuité)

Si  $f$  est une fonction **continue** en  $a$ , et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(a)$$

*Remarque* : Dans les démonstrations, il ne faut pas oublier d'écrire que  $f$  est continue pour utiliser ce théorème.

**Preuve**

Admis car ces théorèmes sont liés aux définitions des limites de fonctions et de la continuité qui sont vues dans le chapitre correspondant (et dans lequel ils sont démontrés). ■

⚠ Ce n'est pas parce que la fonction n'est pas continue en  $a$  ou n'admet pas de limite en  $a$  que la suite n'en aurait pas non plus.

**Exemple**

Trouver une suite  $u$  qui diverge vers  $+\infty$ , et une fonction  $f$  qui n'admet pas de limite en  $+\infty$ , mais telles que  $f(u_n)$  admette une limite en  $+\infty$ .

**Solution :**

**Exemple**

Avec les mêmes hypothèses qu'à l'exemple précédent, trouver  $u$  et  $f$  telles que  $f(u_n)$  n'admette pas de limite en  $+\infty$ .

**Solution :**

**Exemple**

Donner la limite de la suite  $(u_n)$  définie par  $\forall n \geq 2, u_n = \ln\left(\frac{n\sqrt{n}-1}{n^2+1}\right)$ .

**Solution :**

**3 SUITES USUELLES**

**A Suite arithmétique**

**Définition 3.1** (*Suite arithmétique*)

$(u_n)$  est une **suite arithmétique** de raison  $r \in \mathbf{R}$  si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

**Théorème 3.2**

Si  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$ , alors

1.  $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 + nr$
2.  $\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2, \quad u_n = u_p + (n - p)r$
3. (a) Si  $r > 0$ , la suite est strictement croissante de limite  $+\infty$ ,  
 (b) Si  $r < 0$ , la suite est strictement décroissante de limite  $-\infty$ ,  
 (c) Si  $r = 0$ , la suite est constante.

**Preuve**

1. Par récurrence.

**Initialisation :** pour  $n = 0, u_0 = u_0 + 0 \times r$ . La relation est donc vérifiée au rang  $n = 0$ .

**Hérédité :** on suppose la relation vraie au rang  $n \in \mathbf{N}$  **fixé**, et on montre qu'elle est vraie au rang  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ &= (u_0 + nr) + r \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= u_0 + (n + 1)r \end{aligned}$$

Donc la relation est vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion :** par principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0 + nr$

2.  $u_n = u_0 + nr$  et  $u_p = u_0 + pr$  d'après le point précédent. Donc en soustrayant les deux égalités on obtient :  $u_n - u_p = (n - p)r$ , c'est-à-dire  $u_n = u_p + (n - p)r$ .

3.  $u_n = u_0 + nr$

(a) Si  $r > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nr = +\infty$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

(b) Si  $r < 0$ , en exercice.

(c) Si  $r = 0, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = u_0 + n \times 0 = u_0$ , donc la suite est constante. ■

**Théorème 3.3**

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(n - m + 1)(m + n)}{2} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

**Théorème 3.4** (*Rappel : somme arithmétique*)

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique,

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n u_k = (n - m + 1) \frac{u_n + u_m}{2} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^n u_k = (n + 1) \frac{u_n + u_0}{2}$$

(nombre de termes)  $\times$  (moyenne des termes extrêmes)

**Preuve**

Voir les preuves dans le chapitre sur les sommes et produits. ■

**B Suite géométrique**

**Définition 3.5** (*Suite géométrique*)

$(u_n)$  est une **suite géométrique** de raison  $q \in \mathbf{R}$  si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$

**Théorème 3.6**

Si  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$ , alors

1.  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = q^n u_0$
2.  $\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2, p \leq n \Rightarrow u_n = q^{n-p} u_p$
3. si  $q \neq 0, \forall (p, n) \in \mathbf{N}^2, u_n = q^{n-p} u_p$  ( $q \neq 0$  car l'exposant  $n - p$  peut être négatif)

⚠ si la suite commence à l'indice 1, alors on a  $u_n = q^{n-1} u_1$ .

**Théorème 3.7**

Soit  $q \neq 1$ ,  
Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Théorème 3.8** (*Rappel : somme géométrique*)

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ ,  
Soient  $m$  et  $n$  deux entiers avec  $m \leq n$ ,

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q} \quad \text{et en particulier :} \quad \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

*Remarque :* Dans le cas où la raison vaut 1, on additionne simplement  $n + 1$  fois le même terme  $u_0$ .

**Preuve**

Voir les preuves dans le chapitre sur les sommes et produits. ■

**C Suite arithmético-géométrique**

On combine les suites arithmétiques et géométriques en une seule :

**Définition 3.9** (*Suite arithmético-géométrique*)

Soient  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ , on définit la suite  $(u_n)$  par

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

On dit que  $(u_n)$  est une suite **arithmético-géométrique**.

*Remarque :* Pour  $a = 1$ , c'est une suite arithmétique, et pour  $b = 0$ , c'est une suite géométrique.

⚠  $a$  et  $b$  sont des constantes qui **ne dépendent pas** de  $n$ .

**Théorème 3.10**

Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  avec  $a \neq 1$ ,  
Si la suite  $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

alors l'équation  $x = ax + b$  admet une unique solution  $\ell$ ,  
et la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$  par  $v_n = u_n - \ell$  est une suite géométrique de raison  $a$ .

**Explications**

La recherche de  $\ell$  correspond à la recherche d'un *point fixe*, c'est-à-dire une suite constante qui est solution particulière de la relation de récurrence.

La suite de terme général  $v_n = u_n - \ell$  est alors solution de « l'équation homogène » :  $v_{n+1} = av_n$ .

L'*équation homogène* est l'équation dont le second membre  $b$  est nul.

On retrouvera ce vocabulaire dans d'autres chapitres (équations différentielles, systèmes linéaires...).

**Preuve**

Comme  $a \neq 1$ , l'équation  $ax + b = x$  admet une unique solution  $\ell = \frac{b}{1-a}$ .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = au_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n$$

■

**Exemple**

Soit une suite  $(u_n)$  définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, 3u_{n+1} + 2u_n + 5 = 0$$

Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $u_0$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

**Solution :**

**Théorème 3.11** (*limite de la suite*)

Soit  $(u_n)$ , une suite arithmético-géométrique de raison  $a$  et de point fixe  $\ell$ .

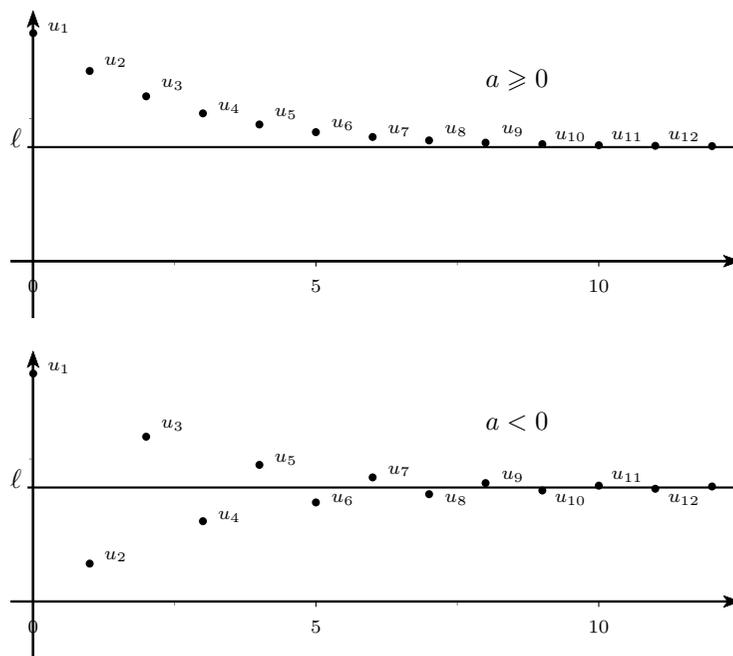
- Si  $u_0 = \ell$ , alors la suite est constante égale à  $\ell$ .
- Si  $u_0 \neq \ell$ , alors
  - si  $|a| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
  - si  $a > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$  (le signe de la limite est celui de  $u_0 - \ell$ )
  - si  $a \leq -1$ , alors  $u_n$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

**Preuve**

En exercice

**Explications**

Dans le cas où la suite converge ( $|a| < 1$  ou  $a = 1$ ), le point fixe joue le rôle « d'attracteur ». Si  $a \geq 0$ , alors la suite converge de façon monotone vers ce point fixe, et si  $a < 0$ , alors, la suite converge en oscillant vers  $\ell$ .



**D ★ Suite récurrente linéaire d'ordre 2**

Les suites géométriques peuvent être qualifiées de suites récurrentes linéaires d'ordre 1. Cette partie s'intéresse à l'ordre 2. L'étude de ces suites n'est pas explicitement au programme, mais elles sont d'usage courant et il est bon de les avoir vues.

**Définition 3.12** (*Suite récurrente d'ordre 2*)

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une suite de la forme

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \text{ et } a \text{ non nul}$$

On appelle **équation caractéristique** l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$

**Théorème 3.13** (*Solutions de la récurrence d'ordre 2*)

Soit  $(u_n)$ , une suite définie comme dans la définition précédente.

On note  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique :

- Si  $\Delta > 0$ , on note  $(r_1, r_2)$  les deux solutions de l'équation caractéristique, alors  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ , tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si  $\Delta = 0$ , on note  $r$  la racine double de l'équation caractéristique, alors  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ , tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

- Si  $\Delta < 0$ , on note  $r_{\pm} = \rho e^{\pm i\theta}$  les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique, alors  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ , tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont déterminés de façon unique par  $u_0$  et  $u_1$ .

*Remarque :* si  $a = 0$ , alors c'est une suite récurrente d'ordre 1. La méthode fonctionne mais n'a aucun intérêt.

**Preuve**

Théorème admis en classe.

*Remarque :* La preuve qui suit suppose que l'on connaisse au préalable la forme des solutions, ce qui est loin d'être évident. Avec un peu de persévérance, on pourrait sans doute obtenir une telle formulation en s'inspirant des solutions de la suite arithmético-géométrique, cependant, ce serait beaucoup plus facile en faisant appel à l'algèbre linéaire et aux matrices. On verrait alors que ce théorème n'est qu'un cas particulier que l'on peut généraliser à tout ordre.

- Si  $\Delta > 0$ , soit  $(u_n)$  une suite solution, alors on peut trouver  $\lambda, \mu$  deux réels tels que

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$$

On résout et on trouve une unique solution : 
$$\begin{cases} \lambda = -\frac{u_1 - r_2 u_0}{r_2 - r_1} \\ \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

On montre ensuite par récurrence double, que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+2} = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ .

- Si  $\Delta = 0$ .

On peut supposer que la solution est non nulle. En effet, elle est nulle si  $b = c = 0$ , auquel cas, la suite solution est immédiate ( $u_n = 0$  pour  $n \geq 2$ ) et la formule donnée par le théorème convient.

Supposons donc  $r \neq 0$ , alors on pose  $\lambda = u_0$ , et  $\mu$  tel que  $u_1 = \lambda r + \mu r$ , c'est-à-dire  $\mu = \frac{u_1 - r u_0}{r}$ .

Comme  $r$  est l'unique racine du polynôme caractéristique, on sait que  $b = -2ar$  et  $c = ar^2$ .

On montre par récurrence double que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+2} = \lambda r^n + \mu n r^n$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors on peut utiliser une récurrence double avec les formules trigonométriques.

\* Sinon, pour ceux qui aiment s'amuser, on peut utiliser une autre méthode :

On utilise le résultat pour  $\Delta > 0$  dans  $\mathbf{C}$  pour voir qu'il s'agit simplement d'un cas particulier.

En effet, si on se place dans  $\mathbf{C}$ , alors le raisonnement pour  $\Delta > 0$  reste valable et dit que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda r^n e^{in\theta} + \mu r^n e^{-in\theta} \\ &= r^n \left( (\lambda + \mu) \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + (\lambda - \mu) \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2} \right) \\ &= r^n (\lambda' \cos(n\theta) + \mu' \sin(n\theta)). \end{aligned}$$

Montrons que les coefficients trouvés  $\lambda'$  et  $\mu'$  sont bien réels.

On peut s'en assurer en résolvant pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , mais comme on aime compliquer les choses et voir que tout est cohérent, on va le vérifier à partir des expressions en  $\lambda$  et en  $\mu$  trouvées pour  $\Delta > 0$

D'après le cas  $\Delta > 0$ , on a

$$\begin{cases} \lambda = \frac{u_1 - r e^{i\theta} u_0}{r e^{-i\theta} - r e^{i\theta}} = \frac{-1}{r} \frac{u_1 - r e^{i\theta} u_0}{2i \sin \theta} \quad (\sin \theta \neq 0 \text{ et } r \neq 0 \text{ car } \Delta < 0) \\ \mu = -\frac{u_1 - r e^{-i\theta} u_0}{r e^{i\theta} - r e^{-i\theta}} = \frac{1}{r} \frac{u_1 - r e^{-i\theta} u_0}{2i \sin \theta} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda' = \lambda + \mu = \frac{1}{2ir \sin \theta} (-u_1 + r e^{i\theta} u_0 + u_1 - r e^{-i\theta} u_0) = u_0 \in \mathbf{R} \\ \mu' = (\lambda - \mu)i = \frac{1}{2r \sin \theta} (-u_1 + r e^{i\theta} u_0 - u_1 + r e^{-i\theta} u_0) \\ = \frac{1}{2r \sin \theta} (-2u_1 + 2r u_0 \cos \theta) u_1 = -\frac{u_1 - r \cos \theta u_0}{r \sin \theta} \in \mathbf{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple**

Étude de la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

**Solution :**

**Théorème 3.14** (Suite récurrente d'ordre 2 avec second membre)

Soient  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$  avec  $a$  et  $c$  différents de 0, et  $(d_n)$  une suite réelle. Soit la suite  $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  définie par la relation de récurrence d'ordre 2

$$(E_d) : \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = d_n$$

On appelle **relation homogène associée**, la relation de récurrence sans le second membre :

$$(E_0) : \quad a \tilde{u}_{n+2} + b \tilde{u}_{n+1} + c \tilde{u}_n = 0$$

On note  $\mathcal{S}_d$  l'ensemble des solutions de la relation  $(E_d)$

$\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de la relation homogène  $(E_0)$  (obtenues grâce au théorème 3.13).

On suppose connue une **solution particulière** de  $(E_d)$  :  $(u_n^d) \in \mathcal{S}_d$ .

La suite  $(u_n)$  est solution de  $(E_d)$  si et seulement si  $(u_n - u_n^d)$  est solution de  $(E_0)$  :

$$(u_n) \in \mathcal{S} \iff (u_n - u_n^d) \in \mathcal{S}_0$$

Que l'on peut aussi écrire (en comprenant bien le sens du signe « + ») :

$$\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_0 + (u_n^d)$$

**Explications**

C'est la même chose qu'à l'ordre 1. En général, dans les exercices,  $d$  est une constante.

**Preuve**

Ce théorème est en fait un exemple d'un résultat beaucoup plus général lié directement à la notion de linéarité.

$$\begin{aligned} (u_n) \in \mathcal{S}_d &\iff \forall n \in \mathbf{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d_n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = au_{n+2}^d + bu_{n+1}^d + cu_n^d \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N}, a(u_{n+2} - u_{n+2}^d) + b(u_{n+1} - u_{n+1}^d) + c(u_n - u_n^d) = 0 \\ &\iff (u_n - u_n^d) \in \mathcal{S}_0 \end{aligned}$$

■

**Exercice**

Trouver une solution particulière lorsque  $(d_n)$  est une suite constante égale à  $d$ .

**Solution :****4 CROISSANCES COMPARÉES****Théorème 4.1**

Soient  $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$  et  $a > 1$ .

Au voisinage de  $+\infty$ , on a les relations suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

**Se souvenir :** Les factorielles l'emportent sur les exponentielles qui l'emportent sur les puissances, qui l'emportent sur les logarithmes. On peut se souvenir de cette chaîne :

$$(\ln^\beta n) \ll (n^\alpha) \ll (a^n) \ll (n!)$$

**Preuve**

★ Pour montrer que  $(\ln^\beta n) \ll (n^\alpha)$  on utilise les croissances comparées des fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0.$$

★ Pour montrer que  $(n^\alpha) \ll (a^n)$  on utilise aussi les croissances comparées des fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

★  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > 0$ . On peut donc passer au quotient, qui est lui-même strictement positif.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$$

Pour  $n \geq n_0 = [2a]$ , on a

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad 0 < u_{n_0+p} \leq \frac{1}{2^p} u_{n_0} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Donc par le théorème d'encadrement  $u_n \rightarrow 0$ . Ainsi  $(a^n) \ll (n!)$  ■

**Méthode (Suites puissances)**

Lorsque  $n$  est dans l'exposant, il faut en général repasser par la définition de la puissance avec l'exponentielle.

**Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , par  $u_n = \frac{2^n}{n!}$ .

**Solution :****Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , par  $u_n = \frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n^2}$ .

## 5 SUITES EXTRAITES D'INDICES PAIRS ET IMPAIRS

La notion de suite extraite est hors programme, mais on sera régulièrement amenés à parler des suites extraites d'indices pairs et d'indices impairs. Alors, on développe (très légèrement).

### Définition 5.1

Soit  $(u_n)$  une suite.

On appelle **suite extraite d'indices pairs** de  $(u_n)$ , la suite  $(v_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = u_{2n}.$$

On appelle **suite extraite d'indices impairs** de  $(u_n)$ , la suite  $(w_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n = u_{2n+1}.$$

### Explications

Cela revient simplement à ne prendre que les indices pairs ou que les indices impairs.

### Théorème 5.2

Soit  $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

$(u_n)$  tend vers la limite  $\ell$ , si et seulement si ses suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  tendent aussi vers  $\ell$ .

### Preuve

Le sens direct est trivial.

Le sens réciproque (aussi).

Montrons le pour une limite finie : soit  $\varepsilon > 0$ ,

$u_{2n} \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_0$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_0$ ,  $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ .

$u_{2n+1} \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_1$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_1$ ,  $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$ .

Donc  $\forall n \geq \max(2n_0, 2n_1 + 1)$ ,  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ .

Donc  $u_n \rightarrow \ell$ .

La preuve est semblable pour une limite infinie. ■

On utilise souvent la contraposée :

### Corollaire 5.3

Si les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ne tendent pas vers une même limite, alors la suite  $(u_n)$  diverge.

### Exemple

Montrer que la suite définie pour tout  $n$  par  $u_n = (-1)^n$  diverge.

**Solution :**

### Exemple (*À connaître*)

On considère la suite  $u$  définie pour tout  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

En s'aidant des suites extraites d'indices pairs et impairs, montrer que la suite  $u$  converge (on ne demande pas sa limite).