Applications linéaires

« La règle de trois est la première, la plus utile et la plus belle de toutes les règles d'arithmétique.
Car toutes les autres ont besoin d'elle, et de toutes elle se passe. »
L'arithmétique nouvellement composée
par Estienne de La Roche (1470-1530)

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avons étudié les objets de façon *statique* à l'instar de ce qui a été fait avec les ensembles finis.
Dans ce chapitre, nous nous penchons sur l'étude *dynamique* des espaces vectoriels grâce aux applications qui agissent sur ces espaces. Par leur action, elles permettent la mise en relation de différents espaces, leur déformation géométrique...

Attention, ce chapitre comprend beaucoup de théorèmes. Il y a donc un effort à faire pour structurer les connaissances et apprendre à penser à la bonne notion au bon moment. Cependant cette abondance de théorèmes est plutôt une bonne nouvelle : cela veut dire qu'il existe souvent un théorème pas loin de ce que l'on cherche, et qu'il n'est donc pas nécessaire de faire de grands raisonnements pour s'y raccrocher.

Nous disposons d'un double regard sur les application linéaires :

- une vision théorique *intrinsèque*,
- une vision calculatoire *matricielle* qui sera développée plus tard.

En fonction des problèmes, il faudra choisir celle qui est la plus adaptée.

1 Définitions et structure

Les applications étudiées ici ne sont pas quelconques : nous allons nous concentrer uniquement sur les applications qui respectent la structure de l'espace vectoriel.
En d'autres termes, toute opération faite dans l'espace de départ, doit se retrouver, à l'identique, dans l'espace d'arrivée.

Par exemple, si on multiplie un vecteur par un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ dans l'espace de départ E, alors, cela doit revenir à multiplier son image par le même scalaire λ. De même, additionner deux vecteurs dans l'espace de départ, doit revenir à additionner leur image dans l'espace d'arrivée.

Ces propriétés très restrictives permettent de *transporter* notre travail entre deux espaces. Ainsi, il est possible d'effectuer toutes sortes d'opérations sur un espace source E et elles sont alors appliquées, de facto, sur l'autre espace F par l'intermédiaire de l'application.

En algèbre *générale*, les applications qui respectent la structure de l'ensemble sont appelées *morphismes* : elles préservent la forme. Dans le cas particulier des espaces vectoriels, on parle davantage d'applications linéaires : la raison apparaît clairement avec les exemples et la définition qui suit.

Exemple

On définit l'espace vectoriel E correspondant aux paniers de courses possibles de votre professeur préféré le vendredi soir.
Pour simplifier, on ne comptabilise que les courgettes, les aubergines et les litrons de rouge qui constituent l'essentiel du panier. On modélise donc le panier par un triplet $(c, a, r) \in \mathbf{R}^3$ où c représente le poids de courgettes, a, le poids d'aubergines et r le litrage de rouge.
Pour avoir une structure d'espace vectoriel, on accepte les valeurs négatives (denrées rendues au commerçant).

On munit donc $E = \mathbf{R}^3$ de sa structure d'espace vectoriel usuelle et on définit l'application f qui donne le prix du panier ainsi composé. On s'aide des prix unitaires suivants (supposés invariables d'un vendredi sur l'autre) :

- les courgettes valent 3 €/kg,
- les aubergines valent $4,5$ €/kg,
- le litron de rouge vaut $2,5$ €.

On a donc $\quad \forall (c, a, r) \in \mathbf{R}^3, \quad f(c, a, r) = 3\,c + 4,5\,a + 2,5\,r$.
On remarque que les commerçants sont durs en affaires et ne font aucune réduction lors des achats en grande quantité. Ainsi, le prix du panier suit une règle de proportionnalité suivant la quantité de denrées qui le composent : par exemple, si on double la quantité de chacune des trois denrées, alors le prix du panier est également doublé : $f(2\,c, 2\,a, 2\,r) = 2\,f(c, a, r)$.
Plus généralement, pour toute multiplication des quantités par $\lambda \in \mathbf{R}$, le prix est aussi multiplié par λ :

$$\forall (c, a, r) \in \mathbf{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ f(\lambda c, \lambda a, \lambda r) = \lambda f(c, a, r)$$

Si on note $u=(c,a,r)$ le panier considéré, alors $f(\lambda u)=\lambda f(u)$.
De même, si on note u, le panier de vendredi dernier et v celui de cette semaine. Le prix des deux paniers mis ensemble est égal à la somme des prix des deux paniers considérés séparément : $f(u+v)=f(u)+f(v)$.
Ces deux propriétés définissent une application linéaire.

Ce n'est pas plus difficile que cela : ce chapitre reprend l'étude de la proportionnalité vue au collège.

Exemple

Dans l'exemple précédent, l'application était à valeurs dans $\mathbf{R}$.
On peut tout aussi bien créer une application à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ si l'image est le couple « (prix, volume) ».
On définit[1] alors $f:(c,a,r)\mapsto(3\,c+4,5\,a-2,5\,r,c+a+r)$ qui est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$: on note $f\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$.
Tout ce qu'il faut pour que l'application soit linéaire, c'est que les quantités image (ici le prix et le volume) suivent la règle de proportionnalité par rapport aux données source (ici les denrées).

Définition 1.1 *(L'espace des applications linéaires)*

Soient E et F, deux espaces vectoriels.
Une application $f:E\to F$ est dite linéaire si elle vérifie **une** des assertions suivantes (équivalentes) :

- $\begin{cases}\forall(u,v)\in E^2,\ \ f(u+v)=f(u)+f(v)\\ \forall\lambda\in\mathbf{R},\ \forall u\in E,\ f(\lambda u)=\lambda f(u)\end{cases}$
- $\forall\lambda\in\mathbf{R},\ \ \forall(u,v)\in E^2,\ f(\lambda u+v)=\lambda f(u)+f(v)$
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2,\ \ \forall(u,v)\in E^2,\ f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F

Ainsi, les applications linéaires respectent les deux opérations des espaces vectoriels : l'addition et la multiplication externe.

une application linéaire traduit un rapport de proportionnalité

Exemple

L'application $f:x\mapsto \mathrm{e}^x$ est-elle une application $\mathbf{R}$−linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$?
Solution :

Exemple

Donner l'ensemble des applications $\mathbf{R}$−linéaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Solution :

Propriété 1.2

Si $f\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $f(0_E)=0_F$.

Preuve

$f(0_E)=f(0_{\mathbf{R}}\cdot 0_E)=0_{\mathbf{R}}\cdot f(0_E)=0_F$. ■

Exemple

L'application $f:\begin{cases}\mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3\\ (x,y) & \mapsto (x+y,y-1,y)\end{cases}$ est-elle linéaire ?
Solution :

Définition 1.3 *(Applications particulières)*

- On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On appelle **morphisme identité**, l'endomorphisme $x\mapsto x$ de E dans E.
  On le note Id_E.
- On appelle **isomorphisme** toute application linéaire bijective.
- On appelle **automorphisme** tout endomorphisme bijectif.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

1. On suppose que les trois aliments ont la même densité, ce qui n'est pas tout à fait réaliste, mais même si on prend en compte les différences de densité, on obtient une application linéaire.

Explications
Le morphisme identité ne *fait rien*. Il reste dans le même espace et ne modifie pas l'objet qu'il prend en argument. Il joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition entre endomorphismes.
Un isomorphisme, est un morphisme qui agit de façon réversible : il existe une application réciproque qui fait le travail inverse. En particulier, il ne perd, ni n'ajoute aucune information au vecteur sur lequel il agit. Nous verrons lors de l'étude de la dimension finie qu'un isomorphisme transforme un espace vectoriel en un autre de même nature géométrique : une droite en une autre droite, un plan en un plan...
Un automorphisme est un isomorphisme qui agit au sein du même espace vectoriel : l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes. Géométriquement, il déforme l'espace de façon réversible. Par exemple, les rotations sont des automorphismes du plan.

Exemple
L'application qui donne le couple (prix, volume) en fonction du panier de courses (exemples précédents) est une application linéaire non bijective. Ce n'est pas un isomorphisme. La connaissance du couple (prix, volume) ne me permet pas de retrouver la composition exacte du panier (pas injectif).

Exemple

- L'application nulle de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ est un endomorphisme non bijectif.
- $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (y,x) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$.

Définition 1.4

S'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$,
alors on dit que les deux espaces E et F sont **isomorphes**.

Savoir que deux espaces sont isomorphes est très pratique. Cela veut dire que toutes les opérations et propriétés (liées à la structure d'espace vectoriel) que l'on aura démontré pour l'un pourront être appliquées à l'autre par l'intermédiaire de l'isomorphisme. Ces deux espaces se comportent donc comme s'il s'agissait de deux images déformées du même espace.

Exemple
Montrer qu'un espace vectoriel E est toujours isomorphe à lui-même.
Solution :

Ici, nous avons défini les applications linéaires *individuellement* : chacune de leur côté. Mais si on prend un peu de recul, on peut s'apercevoir qu'il existe une harmonie entre elles. Ou pour parler plus mathématiquement, que l'on peut doter l'ensemble des applications linéaires de structures algébriques.

Ainsi, nous allons voir que $(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$ est lui-même un espace vectoriel ainsi que $(\mathcal{L}(E),+,\cdot)$.

Propriété 1.5 *(Opérations sur les applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels

- Toute combinaison linéaire d'applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$.
- Toute combinaison linéaire d'endomorphismes de E est un endomorphisme de E.

$$(\mathcal{L}(E),+,\cdot) \text{ et } (\mathcal{L}(E,F),+,\cdot) \text{ sont des espaces vectoriels.}$$

Preuve

- Soient f et g deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E,F)$. $\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda u+v) = f(u+\lambda v) + g(u+\lambda v) &= f(u)+\lambda f(v)+g(u)+\lambda g(v)\\ &= (f+g)(u)+\lambda(f+g)(v)\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est linéaire : $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Il ne reste qu'à montrer le produit par un scalaire. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mu \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad (\mu f)(\lambda u+v) = \mu f(u+\lambda v) &= \mu f(u)+\mu\lambda f(v)\\ &= (\mu f)(u)+\lambda(\mu f)(v)\end{aligned}$$

Et $\mathcal{L}(E,F)$ contient l'application nulle.
C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}^E$.
L'espace des endomorphismes est un cas particulier pour $F = E$. ■

Exemple
Montrer que l'application $f : (x,y,z) \mapsto (x+y, z, x-z)$ est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et donner son application réciproque.
Solution :

2 Image et noyau

E et F désignent deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.

Propriété 2.1

- L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.
- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.

Explications
À nouveau, ces propriétés traduisent le fait que l'application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel. En particulier, si la stabilité est vérifiée dans l'espace de départ, alors elle se trouve naturellement vérifiée dans l'image : l'image est un espace vectoriel.

Preuve

- Soit G un sous-espace vectoriel de E, montrons que $f(G)$ est un sous espace vectoriel de F.
  - $0_E \in G$ (car G est un sev de E), et donc $0_F = f(0_E) \in f(G)$.
  - Soit $(v, v') \in (f(G))^2$, et $\lambda \in \mathbf{R}$,
    il existe $(u, u') \in G^2$ tel que $v = f(u)$ et $v' = f(u')$ (définition de l'image directe).
    Or $v + \lambda v' = f(u) + \lambda f(u') = f(u + \lambda u')$. On peut donc poser $w = u + \lambda u'$.
    G est stable par combinaison linéaire, donc $w \in G$, ainsi $v + \lambda v' = f(w) \in f(G)$.

  Donc $f(G)$ non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée F.
- Soit H un sous-espace vectoriel de F, montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous espace vectoriel de E.
  - $0_F \in H$ (car H est un sev de F), or $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in f^{-1}(H)$.
  - Soit $(u, u') \in \left(f^{-1}(H)\right)^2$, et $\lambda \in \mathbf{R}$,
    $f(u + \lambda u') = f(u) + \lambda f(u')$.
    Or $f(u) \in H$ et $f(u') \in H$ par définition de u et u'.
    Et H est un espace vectoriel, donc $f(u) + \lambda f(u') \in H$.
    Ainsi $f(u + \lambda u') \in H$, donc $u + \lambda u' \in f^{-1}(H)$.

  Donc $f^{-1}(H)$ non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace E.

■

Définition 2.2

L'**image** de f est l'image directe de E par f.

$$\mathrm{Im}\,(f) = \left\{f(u),\ u \in E\right\}$$

Le **noyau** de f est l'ensemble des antécédents de 0_F par f.

$$\mathrm{Ker}\,(f) = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \left\{u \in E, f(u) = 0_F\right\}$$

Propriété 2.3

$\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de F. $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Preuve
Ce sont des cas particuliers de la propriété 2.1.

■

Exemple
Soit $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tel que } x + y - 3z = 0 \text{ et } z = y + t\right\}$.
Interpréter E comme le noyau d'une application linéaire.
Solution :

Exemple
Soit $f : (x, y) \mapsto (x, x + y, 2x - y)$. Donner une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(f)$.

Solution :

Théorème 2.4 *(Caractérisation des applications injectives et surjectives)*

1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

C'est la caractérisation des applications injectives qui nous servira le plus (pour la surjectivité, c'est simplement la définition que nous rappelons ici). Dès que l'on demande de montrer qu'une application est injective, il faut penser à étudier son noyau.
Cette caractérisation traduit bien la rigidité d'une application linéaire : pour étudier l'unicité de l'antécédent de n'importe quelle image, il suffit de le faire pour 0 et cela nous donne le résultat pour tout le reste de l'espace vectoriel !

Preuve

1. - (sens direct) $f(0_E) = 0_F$ car f est linéaire (cf propriété 1.2).
     Et par unicité de l'antécédent, $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
   - (sens réciproque)
     On suppose $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$ et on cherche à montrer que f est injective.
     Soient $(u, u') \in E^2$ tels que $f(u) = f(u')$.
     Alors $f(u) - f(u') = 0_F$ et par linéarité, $f(u - u') = 0_F$.
     Ainsi $u - u' \in \mathrm{Ker}\,(f)$, et d'après notre hypothèse : $u - u' = 0_E$.
     Donc $u = u'$ et l'application est injective.
2. C'est la définition d'une application surjective : rien de spectaculaire.

■

Exemple

Soit $f : (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y - z + t, x + y, -z - t)$. f est-elle injective ?

Solution :

3 Composition d'applications linéaires

Propriété 3.1

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

Preuve

- Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. ⚠ $g \notin \mathcal{L}(E, F)$ pour que la composée existe.

$$\begin{aligned}\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad (g \circ f)(\lambda u + v) &= g(f(u + \lambda v)) \quad \text{(linéarité de } f\text{)}\\ &= g(f(u) + \lambda f(v))\\ &= g(f(u)) + \lambda g(f(v)) \quad \text{(linéarité de } g\text{)}\\ &= (g \circ f)(u) + \lambda (g \circ f)(v)\end{aligned}$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective, alors f admet une réciproque f^{-1}, mais rien ne dit a priori que f^{-1} est aussi linéaire. Montrons-le.
  Soient $(w, w') \in F$, $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose $u = f^{-1}(w)$ et $u' = f^{-1}(w')$.

$$\begin{aligned}f^{-1}(w + \lambda w') = f^{-1}(f(u) + \lambda f(u')) &= f^{-1}(f(u + \lambda u')) \quad \text{(linéarité de } f\text{)}\\ &= u + \lambda u' \quad (\text{car } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E)\\ &= f(w) + \lambda f(w')\end{aligned}$$

  Donc $f^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$. ■

Corollaire 3.2

Soit E un espace vectoriel,

- $\mathrm{GL}(E)$ est stable par composition,
- si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

Preuve

- La composée de deux applications linéaires est encore linéaire, et la composition de deux bijections est une bijection.
- Nous avons vu que f^{-1} est linéaire. De plus, elle est bijective de réciproque f. Ainsi $f \in \mathrm{GL}(E)$.

■

Exemple

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathrm{GL}(E)$.
Montrer que $f \circ g = 0 \iff f = 0$.

Solution :

Propriété 3.3 *(Rappel)*

1. La composée de deux injections est une injection.
2. La composée de deux surjections est une surjection.
3. La composée de deux bijections est une bijection.
   En particulier, si f et g sont deux isomorphismes, alors $f \circ g$ est un isomorphisme et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Preuve

Voir le chapitre sur les applications. ■

Définition 3.4 *(Puissances)*

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$,
On définit les **puissances** de f par

$$\begin{cases} & f^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall n \in \mathbf{N}, & f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f \end{cases}$$

Explications

Faire la puissance n-ième de f, c'est appliquer f, n fois de suite.
Cela suppose que f soit un endomorphisme pour que l'espace d'arrivée corresponde à l'espace source.

Définition 3.5 *(Endomorphisme nilpotent)*

f est dit nilpotent d'ordre $p \in \mathbf{N}^*$ si $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$

Remarque : la notation 0 désigne l'endomorphisme nul.

Exemple

Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible.

Propriété 3.6 *(Binôme de Newton et formule de Bernoulli)*

Soient f et g deux endomorphismes qui **commutent**, c'est-à-dire tels que $f \circ g = f \circ g$.
$\forall n \in \mathbf{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} g^k \qquad \text{(Binôme de Newton)}$$

$$f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g) \sum_{k=0}^{n} f^k g^{n-k} = (f-g) \sum_{k=0}^{n} f^{n-k} g^k \qquad \text{(Formule de Bernoulli)}$$

⚠ L'hypothèse de commutativité est indispensable et il faut absolument la rappeler à chaque fois que l'on fait appel à l'une de ces formules.

Méthode *(Recherche de l'inverse d'un endomorphisme)*

Comme cela a été vu dans le chapitre sur les applications, pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, il suffit de trouver son inverse. C'est-à-dire $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Une méthode très utilisée consiste à trouver une relation polynomiale en f qui est égale à l'endomorphisme nul. Cette méthode est détaillée dans l'exemple qui suit.

Exemple *(Méthode du polynôme annulateur)*

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que $f^3 + 2f^2 + f + 3\mathrm{Id}_E = 0$.
Montrer que f est inversible et donner son inverse en fonction des puissances (positives) de f.
Solution :