Dénombrement

« Contemple donc le ciel, compte les étoiles si tu peux les compter.[...]
Telle sera ta descendance. »
Livre de la Genèse, 15,5.

Le dénombrement est une partie délicate en mathématiques. Notre but ne sera pas d'étudier la science du dénombrement, mais simplement d'utiliser quelques uns de ses outils en vue des probabilités. Pour dire les choses plus simplement : on ne vous demande pas tant de comprendre le dénombrement, que de l'appliquer dans des situations concrètes.
Pour vous, le mot clef de ce chapitre est l'**intuition**. Ainsi, ce cours n'a de sens que s'il est travaillé de concert avec la feuille de TD.

1 Cardinal d'un ensemble fini, réunion et produit

Dans ce cours, beaucoup de résultats sont admis.

Définition 1.1 *(Cardinal d'un ensemble fini)*

Soit E un ensemble avec un nombre fini d'éléments. On note $\text{Card}\,(E)$ le nombre de ses éléments.
On appelle ce nombre le **cardinal de** E.

Par convention $\text{Card}\,(\emptyset) = 0$

On trouvera aussi les notations $|E|$ ou $\#E$.

Exemple

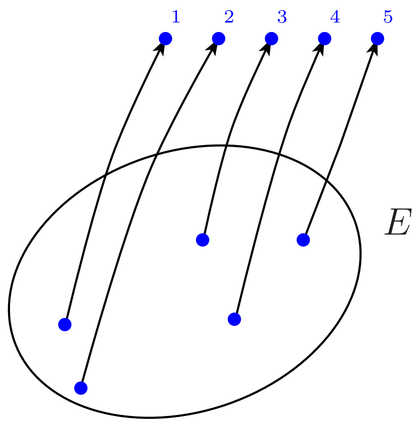
$\text{Card}\,[\![0,5]\!] = 6$
$\text{Card}\,[\![1,n]\!] = n$

Théorème 1.2 *(Cardinal et bijection)*

Soit un ensemble fini E et $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{Card}\,E = n \text{ si et seulement s'il existe une bijection entre } E \text{ et } [\![1,n]\!]$$

Explications



Interprétation du cardinal par une bijection

Établir une bijection entre E et $[\![1,n]\!]$, c'est donner un numéro distinct à chaque élément de E. C'est donc compter les éléments de E.
Quand vous comptez sur les doigts d'une main, vous faites une bijection entre vos doigts et $[\![1,5]\!]$. Par exemple, vous associez 1 au pouce, 2 à l'index, 3 au majeur, 4 à l'annulaire et 5 à l'auriculaire[1].

1. Pour ceux qui avaient oublié la dénomination exacte de vos doigts, considérez cette énumération comme une révision gracieusement offerte par la maison.

On exige que l'application soit une bijection pour bien compter chaque élément une et une seule fois.
Remarque : En général, c'est cette propriété que l'on donne comme définition du cardinal.

Lemme 1.3
Soient n, p deux entiers naturels non nuls,

$$[\![1, n]\!] \text{ est en bijection avec } [\![1, p]\!] \text{ si et seulement si } n = p.$$

Preuve

Admis

Pour les curieux
Commençons par montrer que s'il existe une *injection* de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, alors $n \leq p$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Initialisation : si $n = 1$, alors nécessairement $p \geq 1 = n$ car il n'existe pas d'application d'un ensemble non vide, vers un ensemble vide.
Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque fixé. On suppose que le résultat est vrai à ce rang.
Soit $p \in \mathbf{N}$, et on suppose qu'il existe une injection f de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.
on note $k = f(n+1) \in [\![1, p]\!]$.

- si $k = p$, alors $f_{|[\![1,n]\!]}^{|[\![1,p-1]\!]}$ est une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p-1]\!]$.
  Par hypothèse de récurrence, on a donc $n \leq p - 1$, donc $n + 1 \leq p$.
- si $k \neq p$, on construit l'application

$$g : \begin{cases} [\![1, n]\!] & \to [\![1, p-1]\!] \\ i & \mapsto \begin{cases} f(i) & \text{si } f(i) \neq p \\ k & \text{si } f(i) = p \end{cases} \end{cases}$$

  Cette application est bien à valeurs dans $[\![1, p-1]\!]$ par construction.
  Elle est clairement injective (élémentaire).
  Donc g est une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p-1]\!]$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $n \leq p - 1$, donc $n + 1 \leq p$

Ainsi, l'hérédité est vérifiée.
Donc $\forall (n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, s'il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, alors $n \leq p$.

preuve du lemme : Si $[\![1, n]\!]$ et $[\![1, p]\!]$ sont en bijection, alors, si on note f une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, on a $n \leq p$ d'après ce qu'on vient de démontrer.
Et f^{-1} est une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, ainsi on a également $p \leq n$.
Donc $p = n$. ■

On peut généraliser cette notion à des ensembles finis non vides quelconques :

Théorème 1.4

Deux ensembles finis non vides E et F sont en bijection si et seulement s'ils ont même cardinal.

Preuve

Idée de la preuve : on établit des bijections entre E et $[\![1; n]\!]$ et entre F et $[\![1; p]\!]$ et on utilise le fait que la composée de deux bijections et une bijection.

$$\begin{tikzcd} {[\![1, n]\!]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi_1"'] & {[\![1, p]\!]} \arrow[d, shift right, "\varphi_2"'] \\ E \arrow[r, "\psi"'] \arrow[u, shift right, "\varphi_1^{-1}"'] & F \arrow[u, shift right, "\varphi_2^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

φ_1 et φ_2 sont deux bijections : $\mathrm{Card}\,(E) = n$ et $\mathrm{Card}\,(F) = p$.
(sens direct) Si E et F sont en bijection, on pose $\psi : E \to F$ une bijection.
Alors si on note $f = \varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1$, c'est une bijection de $[\![1, n]\!]$, dans $[\![1, p]\!]$. Donc $n = p$ et $\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(F)$.
(sens réciproque) Si $n = p$, alors dans le schéma, on peut choisir $f = \mathrm{Id}$ (la fonction identité).
Si on pose $\psi = \varphi_2 \circ \mathrm{Id} \circ \varphi_1^{-1}$, alors c'est une bijection entre E et F. ■

Lemme 1.5
Soit n un entier naturel non nul,
Toute partie de $[\![1, n]\!]$ est finie et de cardinal inférieur ou égal à n.

Preuve

Admis.

Pour les curieux
On montre par récurrence sur n.
Initialisation : Pour $n = 1$ alors le sous-ensemble est soit vide, soit égal à $[\![1, n]\!]$ tout entier. Dans tous les cas, il est fini et de cardinal inférieur ou égal à n.
Hérédité : Supposons le résultat vrai pour un $n \geq 1$ quelconque fixé.
Montrons alors que le résultat est aussi vrai pour $n + 1$.
On considère donc un sous-ensemble $E \subset [\![1, n+1]\!]$,

- Si $E = [\![n+1]\!]$, alors E est fini de cadinal $n + 1$.
- Sinon, il existe au moins un élément $k \in [\![1, n+1]\!] \setminus E$.

  - Si $k = n + 1$, alors E ne contient pas $n + 1$ et c'est un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$, et il est donc de cardinal fini, inférieur ou égal à n, donc à $n + 1$.
  - Sinon, on construit une application

$$g : \begin{cases} E & \to [\![1, n]\!] \\ i & \mapsto \begin{cases} i & \text{si } i \neq n+1 \\ k & \text{si } i = n+1 \end{cases} \end{cases}$$

    Alors g est une injection de E dans $[\![1, n]\!]$, et induit donc une bijection de E dans $g(E) \subset [\![1, n]\!]$.
    $g(E)$ est une partie de $[\![1, n]\!]$, donc par hypothèse de récurrence, $g(E)$ est finie et de cadinal inférieur à n.
    E étant en bijection avec $g(E)$, c'est donc aussi une partie finie de même cardinal inférieur ou égal à n.

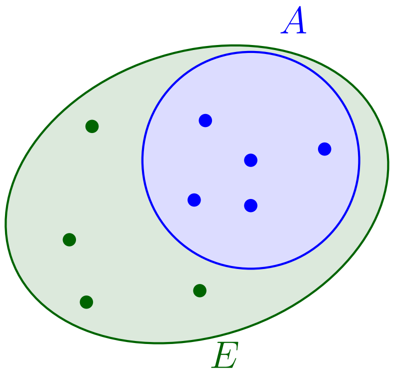
Ainsi, on a montré que dans tous les cas, E est fini et de cardinal inférieur ou égal à $n + 1$.
Par principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$. ■

Propriété 1.6 *(Cardinal d'une partie)*

Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$,

$$A \text{ est un ensemble fini et } \operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} E$$

avec cas d'égalité si et seulement si $A = E$.



Dénombrement : inclusion d'un ensemble dans un autre.

Explications

Cette propriété est très utile pour remplacer le raisonnement par double inclusion. En effet, il suffit de montrer une seule inclusion et l'égalité des cardinaux (finis) pour avoir l'égalité des ensembles.

Preuve

Si $E = \emptyset$, le résultat est clair.
Sinon, $\operatorname{Card} E = n \geq 1$ et il existe une bijection $\varphi : E \to [\![1; n]\!]$.
$\varphi(A)$ est donc un sous-ensemble de $[\![1; n]\!]$ (par croissance de l'image directe),
Donc $\varphi(A)$ est fini et $\operatorname{Card} \varphi(A) \leq n$ (lemme).
Or $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(\varphi(A))$ car φ est une bijection, donc

$$\operatorname{Card}(A) \leq n$$

cas d'égalité :
⋆ (sens réciproque) évident.
⋆ (sens direct) $\varphi(A) = [\![1; n]\!]$, donc $\varphi(A) = \varphi(E)$, or φ bijective, donc $A = E$. ■

Définition 1.7 *(Union disjointe)*

Soient A, B deux ensembles,

on dit que $A \cup B$ est une union **disjointe** si $A \cap B = \emptyset$

Explications

Il n'y a aucun élément commun à A et à B. Ainsi, lorsque l'on fait l'union, on n'a pas de doublons.

Lemme 1.8 *(Cardinal de l'union disjointe)*

Si A et B sont des ensembles finis d'union disjointe,
alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$$

Explications

Si on réunit deux ensembles qui n'ont aucun élément en commun, alors le nombre total d'éléments de l'union sera égal au nombre d'éléments de A « plus » le nombre d'éléments de B.

Preuve

Preuve intuitive :
Si A possède p éléments et B possède q éléments, alors on compte de 1 à p les éléments de A, puis de $p+1$ à $p+q$ les éléments de B : au lieu de revenir à 0 pour compter les éléments de B, on les compte à la suite de ceux de A.
Rédaction formelle :
1er cas : Si $A = \emptyset$ ou si $B = \emptyset$ le résultat est trivial.
2ème cas : Par définition du cardinal, il existe une bijection $\varphi_1 : A \to [\![1; p]\!]$ et une bijection $\varphi_2 : B \to [\![1; q]\!]$.
On définit une nouvelle application

$$\psi : \begin{cases} A \cup B & \to [\![1, p+q]\!] \\ x & \mapsto \left| \begin{array}{ll} \varphi_1(x) & \text{si } x \in A \\ \varphi_2(x) + p & \text{si } x \in B \end{array} \right. \end{cases}$$

Cette application ψ est clairement injective (on montre que si $x \neq x'$, alors $\psi(x) \neq \psi(x')$: la vérification est à faire en exercice – par disjonction des cas).
De même, elle est surjective. En effet,

- si $y \in [\![1, p]\!]$, alors $\varphi_1^{-1}(y) \in A \subset A \cup B$ est un antécédent de y par ψ.
- si $y \in [\![p+1, q]\!]$, alors $\varphi_2^{-1}(y-p) \in B \subset A \cup B$ est un antécédent de y par ψ.

Donc ψ est bijective, ainsi $\operatorname{Card}(A \cup B) = p + q = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$. ■

Explications

Imaginez que vous ayez une urne A avec p boules rouges numérotées de 1 à p et une urne B avec q boules bleues numérotées de 1 à q.
On mélange les deux urnes : le but du lemme est de compter le nombre total de boules : la réunion de A et B.
Le numéro sur la boule rouge issue de l'urne A s'appelle φ_1 : c'est lui qui permet de désigner chaque boule rouge de façon unique. Ainsi, φ_1 permet de compter les boules de A.
De même, chaque boule bleue issue de l'urne B possède un numéro appelé φ_2. Il permet de compter les q boules bleues de B.
Lorsque les deux urnes ont été mélangées, pour compter le nombre total de boules, on commence par lire les numéros sur les boules rouges. De cette façon, on compte toutes les boules rouges de 1 à p avec φ_1.
Pour continuer à compter, il ne faut pas repartir à 1, mais continuer avec $p+1$, $p+2$...

si on veut obtenir le nombre total de boules à la fin.
Ainsi, lorsque l'on prend la boule bleue avec le numéro 1, à la place, on lui donne le numéro $p+1$. de même, la boule bleue avec le numéro 2 correspond à la $p+2^{\text{ième}}$ boule...
On a simplement remplacé φ_2 par $\varphi_2 + p$, pour éviter d'avoir plusieurs fois le même numéro dans la même urne (par exemple deux fois le numéros 1 : une fois avec la boule rouge et une fois avec la boule bleue, ce qui ne permettrait pas de compter).
Lorsque l'on arrive à la dernière boule bleue, elle porte donc le nouveau numéro $p+q$: on a compté $p+q$ numéros au total !

Exemple

Vous fusionnez deux carnets d'adresse enregistrés sous format informatique.
On suppose que le premier carnet d'adresse contient n adresses, et que le second en contient p.
S'ils n'ont aucune adresse en commun, alors le fichier fusionné contiendra $n+p$ adresses.
Par contre, s'il y a des adresses en commun, il ne faudra les compter qu'une seule fois chacune. Ce sera l'objet de la formule du crible (théorème 1.10).

Mais avant d'énoncer cette formule, il faut apprendre à enlever les éléments en trop, c'est-à-dire les éléments du complémentaire : les refusés.

Propriété 1.9 *(Cardinal du complémentaire)*

Si E est un ensemble fini et $A \subset E$, alors

$$\text{Card}\,\overline{A} = \text{Card}\,E - \text{Card}\,A$$

Où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E, c'est-à-dire $E \setminus A$.

Explications

Les éléments dans $\overline{A}$ sont tous les éléments de E sauf ceux de A.

Preuve

$E = \overline{A} \cup A$ et l'union est disjointe donc $\text{Card}\,E = \text{Card}\,(\overline{A}) + \text{Card}\,A$. ■

Théorème 1.10 *(Formule du crible)*

Si A et B sont des ensembles finis,
alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

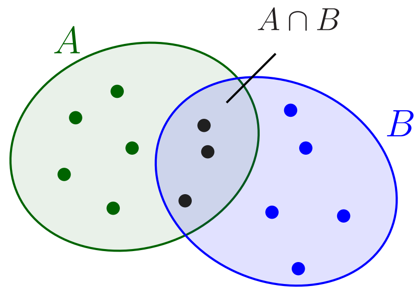
$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B)$$

Explications

Contrairement à l'union disjointe, il y a ici des éléments en commun entre les deux ensemb
réunit : il y a des doublons.
Il ne faut donc compter ces éléments qu'une seule fois dans l'union.
Lorsqu'on fait le calcul $\text{Card}\,A + \text{Card}\,B$, on compte chacun de ces doublons deux fois et il f
retrancher une fois pour avoir le bon dénombrement :

$$\text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B)$$

avec $\text{Card}\,(A \cap B)$ qui désigne le nombre de doublons.



Preuve

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et l'union est disjointe, donc $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,(B \setminus A)$
Or $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et l'union est disjointe, donc $\text{Card}\,B = \text{Card}\,(B \setminus A) + \text{Card}\,(A \cap B)$
Ainsi, en remplaçant $\text{Card}\,(B \setminus A)$ dans la première expression par $\text{Card}\,B - \text{Card}\,A \cap B$, on trouve

$$\text{Card}\,A \cup B = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,A \cap B$$

■

Propriété 1.11 *(Cardinal d'un produit cartésien)*

Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}\,E \times \text{Card}\,F$$

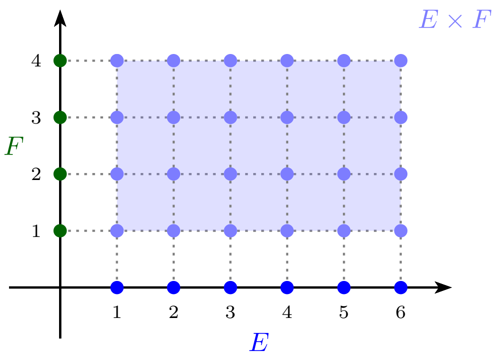
Explications

On peut interpréter le cardinal du produit cartésien comme celui d'une surface :
si on place les éléments de E sur un axe et ceux de F sur un autre,
alors le cardinal du produit cartésien correspond à la surface délimitée par E et F.

La formule est « longueur × largeur ».

Cela se généralise au produit cartésien d'un plus grand nombre d'ensembles : par exemple, un produit cartésien de 3 ensembles sera le volume :

$$\text{Card}\,(E \times F \times G) = \text{Card}\,E \times \text{Card}\,F \times \text{Card}\,G$$



Preuve

On note $\text{Card}\,E = n$, un entier quelconque et on fait une récurrence sur le cardinal de F.

Initialisation :
Si $\text{Card}\,F = 0$, alors $E \times F$ est vide et son cardinal est nul. La propriété est donc bien initialisée.

Hérédité :
On suppose le résultat vrai pour $\text{Card}\,F = p$ avec p un entier naturel fixé, et on cherche à montrer la propriété pour un ensemble F' de cardinal $p+1$.
F' peut donc s'écrire $\{x_1, x_2, \cdots, x_p, x_{p+1}\} = F \cup \{x_{p+1}\}$ si on note $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ de cardinal p.
Les éléments de $E \times F'$ sont les couples (a_i, x_j) pour $a_i \in E$ et $x_j \in F'$ (c'est-à-dire $j \in [\![1, p+1]\!]$).
Donc

$$\begin{aligned} E \times F &= \{(a_i, x_j),\ a_i \in E, j \in [\![1, p+1]\!]\} \\ &= \{(a_i, x_j),\ a_i \in E, j \in [\![1, p]\!]\} \cup \{(a_i, x_{p+1}), a \in E\} && \text{(l'union est disjointe)} \end{aligned}$$

Ainsi $E \times F' = \Big(E \times F\Big) \cup \Big(E \times \{x_{p+1}\}\Big)$ et

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(E \times F') &= \text{Card}\,\Big(E \times F\Big) + \text{Card}\,\Big(E \times \{x_{p+1}\}\Big) && \text{(union disjointe)} \\ &= np + \text{Card}\,\Big(E \times \{x_{p+1}\}\Big) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Or $E \times \{x_{p+1}\}$ est de cardinal n.
Pour le démontrer formellement, il n'est pas difficile de construire une bijection entre E et $E \times \{x_{p+1}\}$ en posant

$$\varphi\ :\ \begin{cases} E & \to E \times \{x_{p+1}\} \\ a_i & \mapsto (a_i, x_{p+1}) \end{cases}$$

Ainsi $\text{Card}\,(E \times F') = np + n = n(p+1) = \text{Card}\,E \times \text{Card}\,F'$.
L'hérédité est donc démontrée

Conclusion :
Par principe de récurrence, pour tous ensembles finis E et F,

$$\text{Card}\,E \times F = \text{Card}\,E \times \text{Card}\,F$$

■

Exemple

Quel est le cardinal de $[\![1, 3]\!] \times [\![8, 14]\!]$?

Corollaire 1.12

E est un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Card}\,(E^p) = (\text{Card}\,E\,)^p$$

Explications

Un p-uplet s'écrit sous la forme $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in E^p$.
Pour x_1, on a n possibilités (autant que d'éléments dans E).
pour chaque choix de x_1, on a n possibilités pour x_2, donc au total on a $n \times n = n^2$ possibilités pour (x_1, x_2).
Pour chaque possibilité de (x_1, x_2), on a encore n possibilités pour x_3, c'est-à-dire, au total n^3 possibilités pour (x_1, x_2, x_3)
Et ainsi de suite...
C'est le volume d'un hypercube en dimension p (de côté $n = \text{Card}\,E$).

Exemple

Vous avez un cadenas à code avec 3 molettes comportant chacune 10 positions de 0 à 9.
Combien y-a-t-il de codes possibles ?
Solution :

2 Combinatoire

A Arrangements

Définition 2.1 *(Rappel)*

Soit E un ensemble non vide.
On appelle **liste à p éléments de E** (*ou p-liste de E*), toute famille d'éléments de E indexée par $[\![1,p]\!]$:

$$(x_1, x_2, ..., x_p) \text{ tel que } \forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i \in E.$$

Propriété 2.2

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $p \in \mathbb{N}^*$,
le nombre de p-listes (ou p-uplets) de E est n^p

Preuve

C'est une reformulation du corollaire 1.12 les p-listes de E correspondent par définition au éléments de E^p. ∎

Définition 2.3

Soit E un ensemble fini non vide, et $p \in \mathbb{N}$,
on appelle **p-arrangement** de E, tout p-uplet d'éléments **distincts** de E.

Si $\operatorname{Card} E = n$, alors on note traditionnellement A_n^p le nombre de p-arrangements de E.

Explications

Les p-arrangements sont les **p-listes sans répétition**. On s'interdit de prendre deux fois le même élément.

Exemple *(Tirage dans une urne)*

Soit une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n.
Si on tire *successivement* p boules (sans remises), alors il y a A_n^p tirages possibles (p-arrangement).
Par contre, si on tire *successivement* p boules avec remises, alors il y a n^p tirage possibles (p-liste).
Attention : dans les deux cas, c'est comme au tiercé, l'ordre a de l'importance. Si on tire deux fois les mêmes boules mais dans un ordre différent, alors cela donne deux tirages différents. Si on ne veut pas s'occuper de l'ordre de tirage, alors, il ne faut compter qu'une seule fois tous les tirages qui correspondent au même ensemble. C'est ce que nous allons faire plus loin.

Théorème 2.4

Pour E un ensemble fini non vide de cardinal n, et $0 \leq p \leq n$, alors le nombre de p-arrangements de E est

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque : Si $p > n$, il n'y a aucun p-arrangement (on ne peut pas tirer plus d'éléments qu'il n'y en a dans l'ensemble).

Preuve

D'un point de vue formel, on pourrait rédiger la preuve avec une récurrence sur p. Mais c'est un peu dur.
Intuitivement on voit que l'on a n possibilités pour le premier élément,
Pour chacun de ces n choix, il reste $n-1$ éléments dans l'urne, donc $n-1$ possibilités pour le choix du $2^{\text{ème}}$ élément,
Ainsi, pour le tirage des deux premiers éléments, on a $n(n-1)$ possibilités.
Pour le tirage du $3^{\text{ème}}$ élément, les deux premiers étant fixés, il reste $(n-2)$ possibilités.
Donc le nombre total de choix pour 3 éléments est $n(n-1)(n-2)$.
Et ainsi de suite...
Pour le $p^{\text{ième}}$ éléments, il reste $(n-p+1)$ possibilités. Au total, il y a donc $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ possibilités pour le choix (ordonné) de p éléments sans répétition. ∎

B Permutations

Définition 2.5

Soit E un ensemble fini non vide.
Une permutation est une liste de E qui contient exactement une fois chaque élément de E.
On note σ_n les permutations de $[\![1,n]\!]$

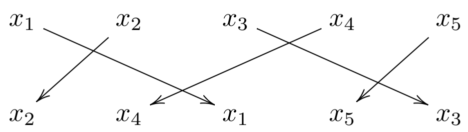
Remarque : Si $\operatorname{Card} E = n$, alors les permutations de E sont les n-arrangement sur E. C'est-à-dire les listes de tous les éléments de E sans répétition.

Explications

Faire une permutation sur un ensemble, c'est changer l'ordre de ses éléments.
En fait, les permutations sont simplement les bijections de E sur lui-même.

Explications

Lorsque l'on compte les éléments de E, on leur donne un ordre (à travers la bijection de $[\![1;n]\!]$ dans E).
Une permutation correspond simplement à « changer l'ordre » des éléments de l'ensemble par une bijection.



Théorème 2.6

Si E est un ensemble fini non vide de cardinal n, alors il y a $n!$ permutations de E.

$$\operatorname{Card} \sigma_n = n!$$

Preuve

Découle du nombre de p-uplets.
On peut aussi le voir comme : n possibilités pour le premier élément, $n-1$ pour le second. . . ■

Exemple

1. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?
2. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot ENSEMBLE ?

Solution :

C Parties à p éléments

Définition 2.7 *(p-combinaisons)*

Pour E un ensemble fini non vide. Une **p-combinaison** de E est une partie de E à p éléments (distincts).

Théorème 2.8

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $p \leq n$,
le nombre de parties de E à p éléments est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Se lit « p parmi n ».

Explications

Par définition, il n'y a pas d'ordre dans un ensemble, et tous les éléments sont deux à deux distincts (revoir le cours sur les ensembles de début d'année).
Ainsi, les $p-$combinaisons, à l'instar des p-arrangements sont constitués d'éléments deux à deux distincts. La différence est que les $p-$arrangements prennent en compte l'ordre, alors qu'il est indifférent pour les combinaisons.
On comprend donc, que pour une p-combinaison possible, il existe autant de $p-$arrangements avec les mêmes éléments, qu'il y a de façon de les réordonner : $p!$ (le nombre de permutations de p éléments). il y a donc $p!$ fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons. C'est ce qui donne la formule

$$p!\binom{n}{p} = A_n^p$$

Preuve

Admise, la formalisation peut s'avérer assez lourde. ■

Exemple

On possède 8 boules numérotées dans une urne. On tire successivement 3 boules et on note les numéros dans l'ordre (a, b, c).
Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
Solution :

Exemple

À la fin d'un dîner, les convives repartent chez eux. Avant de partir, ils se serrent l'un, l'autre la main (chacun part isolément de son côté). Combien y aura-t-il eu de poignées de main échangées, s'il y avait 16 convives ?
Solution :

Explications

Se souvenir On considère le nombre de p-arrangements (ou p-listes sans répétition) lorsque l'ordre à une importance. Lorsque l'ordre n'a pas d'importance, on considère le nombre de parties à p éléments (c'est-à-dire que l'on divise pas $p!$)
Valeurs à retenir :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Liste ordonnée		Avec répétition : OUI	Avec répétition : NON
OUI		p-listes n^p	p-arrangements $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
NON		(p-*suites*)	p-combinaisons $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$

D Triangle de Pascal, formule du binôme de Newton

L'objet de cette dernière partie et de tenir la promesse faite en début d'année : donner une interprétation combinatoire aux formules vues en début d'année avec les coefficients binomiaux.

Propriété 2.9 *(Symétrie)*

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq p \leq n$ alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Preuve

Nous avons déjà vu une preuve par le calcul.
On peut aussi comprendre que choisir p éléments parmi n, c'est la même chose que de décider ceux que l'on ne choisit pas : $n-p$.

■

Théorème 2.10 *(Formule du triangle de Pascal)*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n$, alors

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Preuve

J'appelle mes $n+1$ éléments de E : $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$. Je mets à part l'élément x_{n+1}
Pour choisir $p+1$ éléments dans E, soit je prends l'élément x_{n+1} dans mon choix, soit je ne le prends pas.

1. Si je prends l'élément x_{n+1}, alors j'ai $\binom{n}{p}$ choix pour les autres.
2. Si je ne le prends pas, alors j'ai $\binom{n}{p+1}$ choix possibles.

Ces deux solutions sont exclusives l'une de l'autre, le nombre total de solutions sera donc la somme des deux. D'où la formule voulue. ■

Théorème 2.11 *(Formule du binôme de Newton)*

Soient $n \in \mathbb{N}$, et a, b deux éléments qui commutent.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve

Les coefficients binomiaux correspondent au nombre de façon d'obtenir $a^k b^{n-k}$ en prenant un élément dans chaque parenthèse du produit. ■

Théorème 2.12

Si E est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et non vide et

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}$$

Preuve

On note $n = \operatorname{Card} E$ et on suppose $n \geq 1$.
Les parties de E sont énumérées en fonction de leur nombre d'éléments.
Si on note P_k l'ensemble des parties de E à i éléments, alors pour $0 \leq k \leq n$,

$$\operatorname{Card} P_k = \binom{n}{k}$$

Or $\mathcal{P}(E)$ est l'union disjointe de ces ensembles :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k$$

Alors d'après la formule du binôme de Newton

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Cela est également vrai si E est vide ; car on a alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ ■

Méthode *(Somme ou produit ?)*

Il n'est pas toujours facile de savoir s'il faut additionner ou mutliplier les « sous-dénombrements » pour obtenir le nombre total de possibilité.
Voici de quoi vous aider :

- **Somme = disjonction des cas**
  C'est une union disjointe. Chaque « sous-dénombrement » correspond à des tirages complets.
  L'important, dans cette disjonction est de n'oublier aucun cas, et surtout de ne pas en compter en double (formule du crible).
- **Produit = décomposition du tirage**
  On décompose chaque tirage. Les « sous-dénombrement » correspondent chacun à une partie du tirage total.
  Par exemple, lorsque l'on tire plusieurs cartes par tirage, chaque facteur du produit correspond à une carte dans le tirage.

3 Complément hors programme

Nota : Par nécessité psychologique personnelle, j'intègre ici quelques aspects plus théoriques qui ne font pas partie du programme. Cette dernière partie est à destination des meilleurs élèves qui souhaitent disposer de davantage d'outils face aux exercices. Elle n'est à aborder que lorsque le reste du cours est maîtrisé.

A Nombre d'applications entre ensembles

Théorème 3.1

Si E et F sont des ensembles finis non vides, alors l'ensemble F^E des applications de E vers F est fini et

$$\text{Card}\left(F^E\right) = (\text{Card}\, F)^{\text{Card}\, E}$$

Preuve

Si $\text{Card}\, E = n$, on note $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ses éléments.
On construit une bijection entre F^E et F^n par

$$\begin{array}{ccc} F^E & \to & F^n \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n)) \end{array}$$

L'application est clairement bijective (puisqu'elle revient à énumérer toutes les images des points de E par φ), donc les ensembles ont le même cardinal.
Ainsi

$$\text{Card}\left(F^E\right) = (\text{Card}\, F)^{\text{Card}\, E}$$

■

Dans cette preuve, on réinterprète un n-uplet comme une application de $[\![1; n]\!]$ dans E. Si vous reprenez votre cours sur la logique et les ensembles de début d'année, vous verrez que c'est déjà ce que nous avions fait. Vous découvrez ainsi à votre plus grande stupéfaction que votre cours est cohérent !

Exemple

Redémontrer la formule $\text{Card}\, \mathcal{P}(E) = 2^n$ en réalisant une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0; 1\}^E$.
On pourra s'aider de la fonction indicatrice.

B Applications entre ensembles

Définition 3.2 *(Rappel)*

Soit f une application de E vers F
f est une **injection** si chaque élément de F admet *au plus* un antécédent, c'est-à-dire si

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

f est une **surjection** si chaque élément de F admet *au moins* un antécédent par f, c'est-à-dire si

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \text{ tel que } f(x) = y$$

f est une **bijection** si c'est à la fois une injection et une surjection : chaque élément de F admet un unique antécédent par f,

$$\forall y \in F, \ \exists! x \in E, \text{ tel que } f(x) = y$$

Propriété 3.3

Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F

1. Si f est injective alors $\text{Card}\, E \leq \text{Card}\, F$
2. Si f est surjective alors $\text{Card}\, E \geq \text{Card}\, F$
3. Si f est bijective alors $\text{Card}\, E = \text{Card}\, F$

Preuve

1. C'est le premier résultat qui a été démontré dans ce cours pour montrer l'unicité du cardinal (preuve en petits caractères).
   Si on oublie cette preuve que peu d'entre vous aurez lu, on peut la voir comme une conséquence de ce qui a été admis précédemment en considérant la bijection $\widetilde{f} : E \to f(E)$, avec $f(E) \subset F$.
2. Pour chaque $y \in F$, on choisit x_y un antécédent de y par f (n'importe lequel) et on définit $\varphi(y) = x_y$.
   φ est alors une injection de F dans E.

3. Cela a été démontré plus haut (ne pas dire que cela découle des deux précédentes, puisqu'on utilise cette propriété pour montrer les deux précédentes).

■

Théorème 3.4

Soit E et F, deux ensembles de **même cardinal**, et $f : E \longrightarrow F$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective,
2. f est surjective,
3. f est bijective.

Preuve

$a) \Rightarrow c)$

Si f injective, alors f bijective sur $f(E) \subset E$. Donc $\text{Card}\, E = \text{Card}\, f(E) \leq \text{Card}\, F$. Et $f(E) = F$ si et seulement si les cardinaux sont égaux. C'est le cas ici. Donc f bijective.

$b) \Rightarrow c)$

Si f est surjective, on réalise une injection de F dans E comme dans la preuve précédente.

Donc c'est une bijection et c'est l'application réciproque de f.

$c) \Rightarrow a)$ et $c) \Rightarrow b)$ sont évidents. ■