

DÉRIVABILITÉ

« C'est toujours le plus mauvais danseur qui se plaint de la pente de la colline. »
Proverbe Tibétain

Ce chapitre vient en complément de ce qui a déjà été vu dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

On désigne par « vrai » intervalle, un intervalle qui contient au moins deux points (et donc une infinité).

1 DÉRIVABILITÉ EN UN POINT

A Dérivabilité et développement limité

Soit f une fonction définie sur un « vrai » intervalle I , et $a \in I$.

Définition 1.1 (Dérivée)

- On dit que f est **dérivable** en a si son taux d'accroissement admet une limite finie en a .

On appelle **dérivée de f en a** et on note $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ cette limite.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en a si son taux d'accroissement admet une limite finie à gauche en a .

On appelle **dérivée à gauche de f en a** et on note $f'(a^-)$ ou $\frac{df}{dx}(a^-)$ cette limite.

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

- On définit de même la **dérivée à droite** en a .

Remarque : On pourrait également dire que f est dérivable en a , si son taux d'accroissement est prolongeable par continuité en a . $f'(a)$ est alors la valeur du prolongement.

Définition 1.2 (Développement limité à l'ordre 1)

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre 1** en a , s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon_a(x).$$

avec ε_a une fonction définie sur I telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0$.

On note

$$f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a).$$

Définition 1.3 (Développement limité à gauche ou à droite)

On dit que f admet un **développement limité à gauche** en a , s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in I$

$$x \leq a \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon_a(x).$$

avec ε_a une fonction de limite nulle en a .

On note

$$f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + o_{x \rightarrow a^-}(x - a).$$

On définit de même le développement limité à droite.

Exemple

Soit $f : x \mapsto |x|$. Montrer que f admet une dérivée à gauche de 0 et une dérivée à droite de 0, mais pas de dérivée en 0.

Solution :

Théorème 1.4 (*Dérivabilité et développement limité d'ordre 1*)

- f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas, et avec les notations précédentes, $f'(a) = \lambda$.
- f est dérivable à gauche de a si et seulement si elle admet un développement limité à gauche de a . Dans ce cas, et avec les notations précédentes, $f'(a^-) = \lambda$.
- f est dérivable à droite de a si et seulement si elle admet un développement limité à droite de a . Dans ce cas, et avec les notations précédentes, $f'(a^+) = \lambda$.

Preuve

On fait la preuve pour le premier point, les autres sont des cas particuliers.
sens réciproque : on suppose que f admet un développement limité d'ordre 1 en a . On peut donc écrire $f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon_a(x)$.
 Et pour $x \neq a$, on obtient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda + \varepsilon_a(x)$.
 Si on fait tendre x vers a , avec $x \neq a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda$.
 Donc f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$.
Sens direct : on suppose que f est dérivable en a .
 Ainsi le taux d'accroissement admet une limite finie : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
 On définit la fonction $\varepsilon_a : \begin{cases} x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ a \mapsto 0 \end{cases}$
 ε_a est alors bien définie sur I et continue en a avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_a(x) = 0 = \varepsilon_a(a)$ (par définition de la dérivée). Ainsi, $\forall x \neq a$, en multipliant l'expression par $x - a$, on trouve $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = \varepsilon_a(x)(x - a)$.
 C'est-à-dire $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon_a(x)(x - a)$.
 Cette expression est aussi vraie en $x = a$.
 Ainsi f admet un développement limité d'ordre 1 en a . ■

Explications

Le développement limité à l'ordre 1 est une manière de dire que la dérivée est une approximation de la fonction au voisinage de a (on dit que c'est une approximation à l'ordre 1). Ainsi, la tangente correspond à la « meilleure approximation possible » de la courbe par une droite affine.

Remarque : L'avantage de l'écriture avec le développement limité par rapport au taux d'accroissement est que cela évite d'avoir recours au quotient. Elle est donc aussi valable en $x = a$ contrairement au taux d'accroissement.

Théorème 1.5

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.
 On suppose que f est dérivable à gauche et à droite de a , alors

$$f \text{ est dérivable en } a \text{ si et seulement si } f'_g(a) = f'_d(a).$$

Dans ce cas, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$

Preuve

Si f est dérivable en a , alors la limite à gauche de a et la limite à droite de a sont égales à la limite en a .
 Réciproquement, si les deux limites sont égales, alors on peut écrire les développements limités correspondants avec deux fonctions ε_g pour le développement limité à gauche et ε_d pour celui à droite.
 Ainsi, il existe une valeur commune $\lambda \in \mathbf{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \leq a, & f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + \varepsilon_g(x)(x - a) \\ \forall x \geq a, & f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + \varepsilon_d(x)(x - a) \end{cases}$$

On définit alors la fonction ε par $\varepsilon : x \mapsto \begin{cases} \varepsilon_g(x) & \text{si } x \leq a \\ \varepsilon_d(x) & \text{si } x > a \end{cases}$
 Alors, $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + \varepsilon(x)(x - a)$.
 Ainsi, f admet un développement limité en a . Elle est donc dérivable en a et sa dérivée $f'(a) = \lambda = f'_g(a) = f'_d(a)$. ■

On remarque que ce résultat est « plus fort » que son homologue avec les limites. En effet, dans le chapitre sur les limites, nous avons vu qu'il ne suffisait pas d'avoir une limite à gauche et une limite à droite (fussent-elles égales) pour avoir une limite au point (exemple de la fonction de Dirac).
 Ici, la dérivée à gauche et la dérivée à droite sont suffisantes pour obtenir la dérivée au point. Cela vient de ce que la notion de dérivée « s'appuie » toujours sur le point considéré alors que les limites à gauche et à droite l'ignorent totalement.

Exemple

Pour montrer que $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, il suffit de montrer que sa dérivée à gauche et sa dérivée à droite existent et sont différentes.

Exemple

Donner une application définie sur $]0; 1[$ admettant en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite, mais telle qu'en une infinité de points, f ne soit pas dérivable.

Solution :

Définition 1.6 (*Dérivabilité sur un intervalle*)

On dit que f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout point de I . On note $\mathcal{D}(I)$, $\mathcal{D}(I, \mathbf{R})$, $\mathcal{D}^1(I)$ ou $\mathcal{D}^1(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I .

Remarque : Comme la continuité, la dérivabilité n'est pas une notion globale. C'est une théorie pour les myopes : pour savoir si une courbe est dérivable, il faut la regarder d'infiniment près, point par point. Le nez collé contre la feuille, on suit la courbe point après point sans s'occuper de la forme générale de la courbe : c'est une notion **locale**.

Propriété 1.7 (*Équation de la tangente en a*)

Si f est dérivable en a , alors f admet une tangente au point a d'équation

$$T(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Explications

La tangente est la droite affine qui passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$ et de pente, $f'(a)$.

B Dérivabilité et continuité**Théorème 1.8**

Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
La réciproque est fautive en général.

En pratique, ce théorème n'est pas utilisé sous cette forme. En particulier, on ne justifie pas la continuité d'une fonction usuelle par sa dérivabilité (la continuité d'une fonction est beaucoup plus simple à montrer que la dérivabilité).

Par contre, ce théorème peut être utilisé dans certains exercices théoriques sous sa forme contraposée :

« Si f n'est pas continue en a , alors f n'est pas dérivable en a . »

Par exemple, on peut utiliser cet argument pour obtenir une contradiction dans un raisonnement par l'absurde.

Preuve

Écriture avec le développement limité d'ordre 1 : si f est dérivable en a , alors on a $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon_a(x)(x - a)$.
Or la limite en a de la partie droite est nulle. Donc f est continue en a . ■

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0.

Théorème 1.9

Si f est dérivable à gauche et à droite de a , alors f est continue en a .

Preuve

Immédiat avec les développements limités. ■

⚠ Le théorème ne suppose pas que la fonction est dérivable en a . Ainsi, la fonction est continue même si les dérivées à gauche et à droite sont différentes.

Exemple

$x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, donc elle est continue en 0 (mais elle n'est pas dérivable en 0 car ses dérivées à gauche et à droite sont différentes).

Exemple (*Classique*)

Pour $n \in \mathbf{N}$, étude des fonctions $f_n : x \mapsto x^n \sin \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

Solution :

C Opérations sur les dérivées

Propriété 1.10

Soient f et g deux fonctions définies sur I , et $a \in I$.Si f et g sont dérivables en a , alors

- 1.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$
- ,
- $\lambda f + \mu g$
- est dérivable en
- a
- et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

- 2.
- fg
- est dérivable en
- a
- et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3. si de plus,
- $g(a) \neq 0$
- , alors
- $\frac{1}{g}$
- est dérivable en
- a
- et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

4. si de plus,
- $g(a) \neq 0$
- , alors
- $\frac{f}{g}$
- est dérivable en
- a
- et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Preuve

1. On fait simplement la combinaison linéaire des développements limités à l'ordre 1 de
- f
- et de
- g
- : il existe deux fonctions
- ε_1
- et
- ε_2
- définies sur
- I
- et de limite nulle en
- a
- telles que

$$\begin{cases} \forall x \in I, & f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a) \\ \forall x \in I, & g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \varepsilon_2(x)(x-a) \end{cases}$$

Alors, $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= \lambda (f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) + \mu (g(a) + g'(a)(x-a) + \varepsilon_2(x)(x-a)) \\ &= \lambda f(a) + \mu g(a) + (\lambda f'(a) + \mu g'(a))(x-a) + (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))(x-a) \end{aligned}$$

Avec $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ qui est une fonction définie sur I et de limite nulle en a (par somme de limites). Donc $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a .Ainsi $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

2. On fait le produit des deux développements limités à l'ordre 1 ce qui donne un développement limité du produit. Avec les notations précédentes :
- $\forall x \in I$
- ,

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= f(x)g(x) \\ &= (f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)(x-a)) \times (g(a) + g'(a)(x-a) + \varepsilon_2(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x-a) \\ &\quad + (\varepsilon_1(x)g(a) + \varepsilon_1(x)g'(a) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)(x-a) + \varepsilon_2(x)f(a) + \varepsilon_2(x)f'(a))(x-a) \end{aligned}$$

Or, ce qui est dans la dernière parenthèse est une fonction qui tend vers 0 (par produit et somme). L'expression donne donc un développement limité à l'ordre 1 du produit, ce qui justifie la dérivabilité. Ainsi $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

3. On écrit le taux de variation (ici c'est plus simple qu'avec les développements limités) : On sait que g est continue en a (car dérivable en a) et $g(a) \neq 0$. Donc il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas.

Sur ce voisinage :

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)(x - a)} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Or $\lim_{x \rightarrow a} -\frac{1}{g(x)g(a)} = -\frac{1}{(g(a))^2}$. Et l'autre quotient tend vers la dérivée de g en a .

Donc $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$.

4. C'est simplement les deux points précédents mis ensemble. ■

Théorème 1.11 (Dérivée d'une composée)

Soient I, J deux « vrais » intervalles de \mathbf{R} et $a \in I$

Soit u une fonction définie sur I et à valeurs dans J , et f une fonction définie sur J .

On suppose u dérivable en a et f dérivable en $u(a)$.

Alors $f \circ u$ est dérivable en a et

$$(f \circ u)'(a) = u'(a)f'(u(a))$$

Preuve

f est dérivable en $u(a)$, donc admet un développement limité à l'ordre 1 en $u(a)$

$$f(u(x)) = f(u(a)) + f'(u(a))(u(x) - u(a)) + \varepsilon(u(x))(u(x) - u(a))$$

Or u est dérivable en a , donc admet un développement limité à l'ordre 1 en a et

$$u(x) = u(a) + u'(a)(x - a) + \varepsilon_1(x)(x - a)$$

On remplace dans le développement limité de f

$$f(u(x)) = f(u(a)) + u'(a)f'(u(a))(x - a) + f'(u(a))\varepsilon_1(x)(x - a) + \varepsilon(u(x))(u'(a) + \varepsilon_1(x))(x - a)$$

Or $f'(u(a))\varepsilon_1(x)(x - a) + \varepsilon(u(x))(u'(a) + \varepsilon_1(x))(x - a)$ tend vers 0 quand x tend vers a (par composées, produits et somme).

$f \circ u$ admet un développement limité à l'ordre 1 en a , et $f \circ u$ est donc dérivable en a .

Sa dérivée est $(f \circ u)'(a) = u'(a)f'(u(a))$. ■

Théorème 1.12

Si f est une bijection de I sur $J = f(I)$, dérivable en $a \in I$, alors f^{-1} est dérivable en $y = f(a) \in J$ si et seulement si f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y) = a$, et dans ce cas

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Preuve

Pour $z \in J \setminus \{y\}$, si on note $x = f^{-1}(z)$, alors on peut écrire :

$$\frac{z - y}{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$(f^{-1}(z) \neq f^{-1}(y))$ par bijectivité de f^{-1}

Et par continuité de f^{-1} (cf chapitre sur la continuité), on trouve

$$\lim_{z \rightarrow y} \frac{z - y}{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

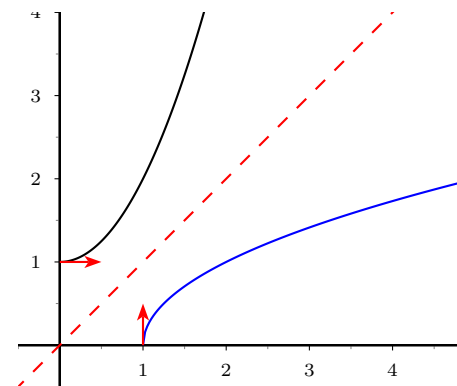
Donc par passage à l'inverse, f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas,

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{z \rightarrow y} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y)}{z - y} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Explications

La courbe de la réciproque est la symétrique de la courbe de la fonction par rapport à la première bissectrice $y = x$. Cela revient à échanger les rôles de x et y .

Si $f'(x) = 0$, alors la tangente est horizontale. Lorsque l'on effectue la symétrie, cela donne une tangente verticale, c'est-à-dire une pente infinie. On comprend donc la condition $f'(x) \neq 0$.



Remarque : On peut très facilement retrouver la formule précédente (ce n'est pas une preuve de la dérivabilité de f^{-1} en y), en dérivant $f \circ f^{-1} = \text{Id}$ comme une composée.

2 THÉORÈME DE ROLLE ET APPLICATIONS

A Théorème de Rolle

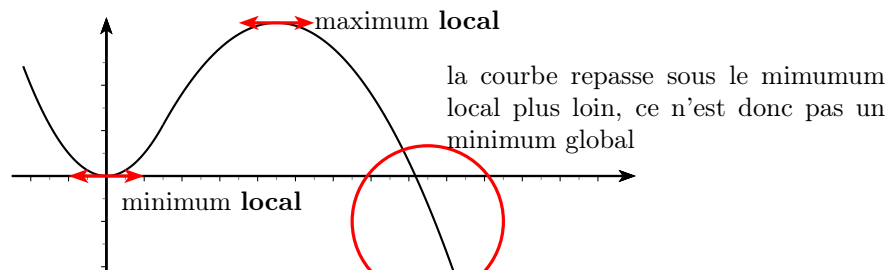
Théorème 2.1

Soit f définie sur I et dérivable en $a \in I$ **qui n'est pas une borne** de I .
Si f admet un extremum **local** en a , alors $f'(a) = 0$.

Méthode (Trouver les extremums locaux)

Pour trouver les extremums d'une fonction dérivable, on peut commencer par chercher ses points critiques (où la dérivée s'annule) puis chercher ceux parmi lesquels f est extrémal.

Remarque : L'extremum est *local*, cela veut dire que ce n'est un extremum qu'à proximité du point. Par contre, si on s'éloigne un peu trop, la courbe peut tout à fait dépasser cette valeur. Rappelez-vous que la notion de dérivée est une notion *locale*.



Preuve

Par exemple, si $f(a)$ est un maximum. On note τ le taux d'accroissement de f en a .

Par dérivabilité de f en a , τ admet une limite finie en a qui est $f'(a)$.

Comme a n'est pas une borne de l'intervalle, alors $f'(a)$ est à la fois la limite à gauche et la limite à droite.

Or pour $x \neq a$, $f(x) \leq f(a)$. Donc si $x < a$, par quotient de deux expressions négatives, on trouve : $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.

Et par passage de l'inégalité à la limite, $f'(a) \geq 0$.

De même, pour $x > a$, on trouve $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$.

Et par passage à la limite, $f'(a) \leq 0$. Ainsi $f'(a)$ est à la fois positif et négatif, donc $f'(a) = 0$. ■

Exemple

⚠ La réciproque est fautive. Un point peut être critique sans correspondre à un extremum. Donner un contre exemple.

Solution :

Théorème 2.2 (Théorème de Rolle)

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

Si f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : c est dans l'intervalle **ouvert** $]a, b[$.

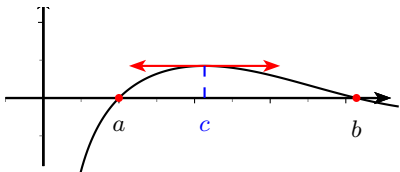
Preuve

Si f est constante sur $[a, b]$, alors n'importe quel point entre a et b convient.

Si f n'est pas constante, alors il existe x_0 tel que $f(x_0) > f(a)$ par exemple.

f est continue, donc d'après le théorème des bornes atteintes, $f([a, b])$ est un segment et on peut écrire $f([a, b]) = [m, M]$ avec $m < M$.

Comme $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M \geq f(x_0)$ (la dernière inégalité permet de vérifier que $c \neq a$ et $c \neq b$). Donc d'après le théorème précédent, $f'(c) = 0$.

**B Accroissements finis****Théorème 2.3** (Théorème des accroissements finis)

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

Si f définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

C'est une généralisation du théorème de Rolle pour $f(a) \neq f(b)$.

Preuve

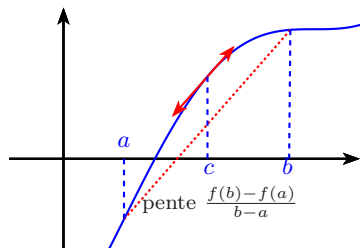
Idée : La preuve utilise le théorème de Rolle. L'idée est de « redresser » f pour lui appliquer le théorème. Ceci s'obtient en soustrayant à f , la corde qui relie ses extrémités.

L'équation de la « corde » qui relie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$ est

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

On pose la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h = f - g$. h vérifie donc les hypothèses du théorème du Rolle, ainsi $\exists c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

$$\text{Donc } f'(c) = g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Autre preuve :**

On « libère » b : $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a)$.

On a $\varphi(a) = 0$, et on choisit λ tel que $\varphi(b) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$, tel que $\varphi'(c) = 0$.

C'est-à-dire $\lambda = f'(c)$ (en dérivant φ).

Explications

Cet énoncé n'est pas utilisable pour trouver la valeur de c et démontrer une égalité sur un exemple concret. En effet, on sait que c existe, et le théorème donne une idée de sa localisation. Mais la valeur exacte de c nous est inconnue.

C'est la raison pour laquelle, on peut, sous certaines conditions, s'affranchir de la valeur exacte de c et trouver une expression plus exploitable. C'est l'objet de l'inégalité des accroissements finis qui suit.

Théorème 2.4 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, on suppose

- f continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$,
- $\exists m \leq M$ tels que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$.

Alors, $\forall (x, y) \in ([a, b])^2$, tels que $x \leq y$,

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x).$$

En particulier $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

On possède une autre formulation, plus simple et souvent largement suffisante dans laquelle on ne s'intéresse qu'à la pente maximale (en valeur absolue).

On ne fait plus la distinction entre la pente m de décroissance maximale et la pente M de croissance maximale pour ne considérer que la variation maximale, tous sens confondus.

Théorème 2.5 (Inégalité des accroissements finis - bis)

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, on suppose

- f continue sur $[a, b]$,
- f dérivable sur $]a, b[$,
- $\exists k \geq 0$, tel que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k$.

Alors, $\forall (x, y) \in ([a, b])^2$,

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Preuve

On utilise la formulation précédente avec $m = -k$ et $M = k$. ■

Explications

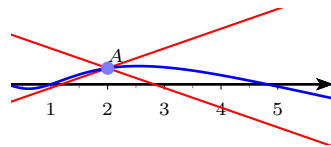
L'intérêt de l'inégalité des accroissements finis par rapport à l'égalité est que le majorant ne dépend plus de x ni de y .

Géométriquement, cette inégalité s'interprète comme un contrôle des variations de la fonction entre deux droites. C'est ce que l'on appelle une fonction *lipschitzienne*.

Contrairement à celle de l'exponentielle, les variations d'une fonction lipschitzienne sont bornées : elle « n'explose pas ».

Ainsi, lorsqu'on connaît la valeur de la fonction à un instant t , on sait qu'à l'instant $t + h$ cette fonction n'a pas varié de plus que $\widetilde{M}h$.

Un processus physique qui est lipschitzien est très appréciable : si on sait que l'on est suffisamment loin de la zone de danger, on peut estimer un temps minimal que mettrait le processus pour l'atteindre. Cela nous donne du temps pour réagir. C'est le contraire d'une explosion ou d'une réaction en chaîne où le système s'emballé et diverge de plus en plus rapidement : les variations sont alors fortes et imprévisibles.



Géométriquement : à partir du point A , la courbe reste confinée entre les deux droites de pente \widetilde{M} et $-\widetilde{M}$

Exemple

Une fonction f est dite α -lipschitzienne sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq \alpha|y - x|.$$

Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$, alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

Solution :

Méthode

L'inégalité des accroissements finis est très utile pour donner des encadrements et prouver des convergences pour les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Après avoir vérifié les hypothèses, si ℓ est un point fixe de f ,

$$|u_{n+2} - \ell| = |f(u_{n+1}) - f(\ell)| \leq k |u_{n+1} - \ell|$$

Et par récurrence immédiate :

$$|u_n - \ell| = k^n |u_0 - \ell|$$

Si $k < 1$, alors $k^n \rightarrow 0$ et on peut appliquer le théorème d'encadrement : $u_n \rightarrow \ell$.

⚠ Ne pas négliger la vérification des hypothèses :

- Il faut travailler sur un intervalle stable $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in [a, b]$. éventuellement qu'à partir d'un certain rang, quitte à ne pas faire la récurrence à partir de u_0 .
- $\ell \in [a, b]$ avec $f(\ell) = \ell$.
- f est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$.
- $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k$.

Ceci n'est intéressant que pour $k < 1$. (inégalité stricte).

C Dérivée et variations

Théorème 2.6

Soit f dérivable sur un intervalle I , alors

- f croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .
- f décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I .
- f constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .

⚠ C'est faux si I n'est pas un intervalle. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de dérivée négative sur \mathbf{R}^* mais n'est pas décroissante sur \mathbf{R}^* .

Preuve

Si f croissante alors $f' \geq 0$ sur I simplement d'après l'expression du taux de variation et le passage des inégalités aux limites.

Réciproquement, si $f' \geq 0$ sur I , alors pour tous $x_1 < x_2 \in I^2$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in]x_1, x_2[$, tel que

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2).$$

Cette quantité est positive par hypothèse.

Donc $f(x_1) \leq f(x_2)$ donc f croissante. On fait de même dans les deux autres cas. ■

Propriété 2.7

Si f est dérivable sur $]a, b[$,

- Si $f' \geq 0$ sur $]a, b[$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur $]a, b[$.
- Si $f' \leq 0$ sur $]a, b[$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur $]a, b[$.

Preuve

Pour le cas croissant (l'autre s'en déduit en prenant $-f$).

On suppose que $f'(x) > 0$ sur $]a, b[$ sauf en un nombre fini de points où elle est nulle. Ainsi, d'après le théorème 2.6, la fonction est croissante (au sens large) sur $]a, b[$.

Soit $x \leq y$ deux points de $]a, b[$.

Il existe au plus un nombre fini de points où f' s'annule entre x et y . Nommons alors $x_1 < y_1$ deux points consécutifs parmi ceux-ci.

(s'il n'y en a pas, on prend $x_1 = x$ et $y_1 = y$, et s'il n'y en a qu'un seul, on le choisit par exemple pour x_1 et on prend $y_1 = y$).

Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1, y_1[$ tel que $f(y_1) - f(x_1) = f'(c)(y_1 - x_1)$.

Or, d'après le choix de x_1 et y_1 , $f'(c) \neq 0$: il n'y a pas d'annulation de la dérivée dans $]x_1, y_1[$.

Donc $f(y_1) > f(x_1)$, et par croissance de f , $f(x) \leq f(x_1) < f(y_1) \leq f(y)$.

Donc $f(x) < f(y)$. Ainsi, f est strictement croissante. ■

Exemple

$x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbf{R} (même si $f'(0) = 0$).

3 FONCTIONS DE CLASSE \mathcal{C}^k **A Définition****Définition 3.1 (Dérivée k -ième)**

Soit f définie sur un « vrai » intervalle I , et $a \in I$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$

f admet une **dérivée k -ième** en a , si f est dérivable $k - 1$ fois sur un voisinage de a , et que cette dérivée $k^{\text{ème}}$ est dérivable en a .

On note $f^{(k)}(a)$, et on pose $f^{(0)} = f$.

⚠ Il faut que f soit dérivable $k - 1$ fois sur un *voisinage* de a . En effet, pour définir la dérivée k -ième, on utilise le taux d'accroissement de la dérivée $(k - 1)$ -ième. Cela suppose que cette dérivée ne soit pas seulement définie en a , mais sur un voisinage de a .

Définition 3.2

On dit que f est **dérivable k fois** sur I si f admet une dérivée k -ième en tout point de I .

On note $\mathcal{D}^k(I)$ ou $\mathcal{D}^k(I, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables k fois sur I .

Définition 3.3 (Fonction de classe \mathcal{C}^k)

Avec les hypothèses précédentes, on dit que f est de classe \mathcal{C}^k en a , si f admet une dérivée k -ième sur un voisinage de a et si $f^{(k)}$ est continue en a .

Définition 3.4

On dit que f est de classe \mathcal{C}^k sur I , si f est de classe \mathcal{C}^k en tout point de I .

On note $\mathcal{C}^k(I)$ ou $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I .

Définition 3.5

f est de classe \mathcal{C}^∞ en $a \in I$, si f est de classe \mathcal{C}^k en a pour tout $k \in \mathbf{N}$. f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I , si f est de classe \mathcal{C}^k sur I pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ ou $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbf{R})$, l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Remarque : Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, alors pour tout $p \leq k$, $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbf{R})$.

B Opérations sur les fonctions**Théorème 3.6 (Opérations)**

1. Si f et g admettent une dérivée k -ième en a , alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $f + g$ et λf admettent une dérivée k -ième en a , et

$$(f + g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a) \quad \text{et} \quad (\lambda f)^{(k)}(a) = \lambda f^{(k)}(a)$$

2. Si $(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$, et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $f + g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$ et $\lambda f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$.

Preuve

Par récurrence. ■

Théorème 3.7

1. Si f et g admettent une dérivée k -ième en a , alors fg admet une dérivée k -ième en a .
2. Si $(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$ alors $fg \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$.

Théorème 3.8

1. Si f et g admettent une dérivée k -ième en a et si g ne s'annule pas en a , alors $\frac{f}{g}$ admet une dérivée k -ième en a .

2. Si $(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$ et g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$.

Preuve

Par récurrence. ■

Théorème 3.9 (Régularité des fonctions usuelles)

1. Toute application polynomiale est de classe C^∞ sur \mathbf{R} .
2. Toute application rationnelle est de classe C^∞ sur son domaine de définition.
3. \ln est de classe C^∞ sur \mathbf{R}_+^* .
4. \exp est de classe C^∞ sur \mathbf{R} .
5. \sin, \cos sont de classe C^∞ sur \mathbf{R} .
6. \tan est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Preuve

Avec les théorèmes précédents. ■

En particulier, ce théorème donne la continuité des fonctions considérées (qui n'est pas vu comme une conséquence de leur dérivabilité).

Théorème 3.10 (Régularité d'une composée)

- Si u est définie sur I à valeurs dans J et admet une dérivée k -ième en $a \in I$ (avec I et J de « vrais » intervalles),
- et si f est définie sur J et admet une dérivée k -ième en $u(a)$,

alors $f \circ u$ admet une dérivée k -ième en a .

Si $u \in C^k(I, J)$ et $f \in C^k(J, \mathbf{R})$, alors $f \circ u \in C^k(I, \mathbf{R})$.

⚠ L'image de u doit être incluse dans le domaine de définition de f .

Preuve

Par récurrence. ■

Théorème 3.11 (Régularité de la réciproque)

Soit $k \geq 1$,

- Si f réalise une bijection de I dans J ,
- et si $f \in C^k(I, J)$,
- et si la dérivée de f ne s'annule pas sur I ,

alors $f^{-1} \in C^k(J, I)$.

4 COMPARAISONS LOCALES DE FONCTIONS

danger Toute cette partie est hors programme en première année, mais simplifie grandement certains calculs. Leur usage sera donc accepté, à condition de savoir démontrer les résultats si cela est demandé.

A Négligeabilité et croissances comparées

Revoir les croissances comparées du chapitre sur les fonctions usuelles.

Définition 4.1 (Fonction négligeable devant une autre)

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I et $a \in \bar{I}$.

Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a , et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,

alors on note au voisinage de a

$$f(x) = o_{x \rightarrow a} g(x).$$

On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a .

Remarque : Cette notation n'est pas au programme de première année mais simplifiera de nombreux calculs et sera utilisée en deuxième année avec les développements limités.

Explications

Cette notation, dite de Landau, se comprend ainsi :

« $f(x)$ est aussi petit que l'on veut devant $g(x)$ pour x suffisamment proche de a . »

Théorème 4.2 (Croissances comparées en $+\infty$.)

Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et $a > 1$.

Au voisinage de $+\infty$, on a les relations suivantes :

$$\ln^\beta(x) \ll x^\alpha \ll a^x.$$

Ici, pour écrire la chaîne de négligeabilité, on a utilisé la notation de Vinogradov : $f(x) \ll g(x)$ qui veut dire $f(x) = o(g(x))$.

Se souvenir : Les exponentielles l'emportent sur les puissances, qui l'emportent sur les logarithmes.

Preuve

Voir les fonctions usuelles. ■

Méthode (Suites puissances)

Lorsque x est dans l'exposant, il faut en général repasser par la définition de la puissance avec l'exponentielle.

Exemple

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction définie pour tout $x > 1$, par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x^2}$.

Solution :

B Fonctions équivalentes en un point ou à l'infini**Définition 4.3** (*Fonctions équivalentes*)

Soient f, g définies sur I et $a \in \bar{I}$ tels que g ne s'annule pas au voisinage de a .
Les fonctions f et g sont **équivalentes** en a , si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

Exemple

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbf{R}^*$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.

⚠ C'est faux pour $\ell = 0$, on n'écrit **jamais** qu'une fonction est équivalente à 0.

Théorème 4.4

La relation \sim est une relation d'équivalence :

- (*symétrie*) : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
- (*réflexivité*) : $f(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
- (*transitivité*) : si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.

En supposant que les fonctions f, g et h sont définies sur I , $a \in \bar{I}$ et les fonctions ne s'annulent pas sur un voisinage de a .

Preuve

- Par passage à l'inverse de la limite.
- Le quotient est constant égal à 1, donc tend vers 1.
- $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}$ et on conclut par produit des limites.

Théorème 4.5 (*Propriétés conservées par la relation d'équivalence*)

1. Deux fonctions équivalentes en a sont de même signe sur un voisinage de a .
2. Deux fonctions équivalentes en a ont le même comportement asymptotique : si l'une admet une limite, alors l'autre possède la même limite.

Explications

L'intérêt des équivalents est de se ramener à des fonctions plus simples ayant le même comportement asymptotique.

Preuve

cette preuve est pour a un nombre réel fini. La preuve pour $a = \pm\infty$ ressemble beaucoup.

1. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap I, \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}$.
Donc sur un voisinage de a , f et g sont de même signe (et f ne s'annule pas).
2. On pose $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.
 φ est définie sur un voisinage de a et tend vers 1 en a .
Sur ce voisinage, $f(x) = \varphi(x)g(x)$.
Si g admet une limite finie ℓ en a , alors, par produit de limite, f admet la même limite en a . Par symétrie de la relation d'équivalence, on peut conclure.

⚠ Ce n'est pas parce que deux fonctions ont la même limite en un point qu'elles sont équivalentes au voisinage de ce point (par contre, c'est vrai si la limite est finie non nulle).

Théorème 4.6 (*Caractérisation des fonctions équivalentes*)

Soient deux fonctions f et g définies sur I et $a \in \bar{I}$.

On suppose que f et g ne s'annulent pas sur un voisinage de a .

$f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a} g(x)$
si et seulement si $f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a} f(x)$.

Explications

Cette caractérisation donne une interprétation quantitative à la proximité des deux fonctions.

Preuve

$$\begin{aligned} f(x) \underset{a}{\sim} g(x) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0 \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \\ &\iff f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow a} g(x) \end{aligned}$$

La seconde équivalence s'obtient par symétrie.

Corollaire 4.7

Une fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus **haut** degré en $\pm\infty$,
 Une fonction polynomiale est équivalente à son monôme de plus **petit** degré en 0.

Propriété 4.8 (*Opérations sur les fonctions équivalentes*)

1. On peut multiplier les équivalents :

$$\text{si } f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) \text{ et } f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x) \text{ alors, } f_1(x)f_2(x) \underset{a}{\sim} g_1(x)g_2(x).$$

$$\text{si } f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}^* \text{ alors, } \lambda f(x) \underset{a}{\sim} \lambda g(x).$$

$$\text{si } f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ et } \alpha \in \mathbf{R} \text{ alors, } (f(x))^\alpha \underset{a}{\sim} (g(x))^\alpha.$$

2. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, et $u(x) \underset{b}{\sim} a$ alors, $(f \circ u)(x) \underset{b}{\sim} (g \circ u)(x)$.

3. On ne peut **pas additionner** des équivalents.

4. On ne peut **pas composer les équivalents avec une fonction à gauche**.

Remarque : Pour les puissances, α est quelconque (sous réserve d'existence de l'expression). En particulier les équivalents passent à l'inverse avec $\alpha = -1$.

La composition par une fonction u à droite revient à faire un changement de variable en posant $X = u(x)$. Par exemple, si $x \rightarrow 0$, alors $u(x) = \sqrt{x+1} \rightarrow 1$, et on peut poser $X = u(x) = \sqrt{x+1}$ et trouver l'équivalent pour $X \rightarrow 1$.

Théorème 4.9 (*Approximation affine*)

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Preuve

C'est une reformulation de la définition de la dérivabilité lorsque la dérivée est non

$$\text{nulle : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \quad \blacksquare$$

$$\iff f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

⚠ En général, l'équivalent est **faux** si $f'(x_0) = 0$.

Théorème 4.10 (*Équivalents usuels en 0*)

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

$$\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

avec $\alpha \neq 0$.

Preuve

Sauf pour le cosinus, ces formules résultent de l'application directe du théorème 4.9.

La formule pour le cosinus s'obtient simplement avec celle du sinus et en utilisant le théorème de Pythagore. ■