Espaces vectoriels de dimension finie

L'objet de ce chapitre est de formaliser la notion intuitive de dimension pour un espace.
On sait qu'une droite est un espace de dimension 1, un plan est un espace de dimension 2... L'idée est de formaliser cette notion pour attribuer une dimension aux espaces vectoriels (sous réserve qu'ils ne soient pas trop « gros »).

1 Dimension d'un espace vectoriel

A Approche intuitive

On parle naturellement d'un espace à 1, 2 ou 3 voire 4 dimensions dans la vie quotidienne. C'est ce que nous allons généraliser. On peut interpréter la dimension d'un espaces de deux façons complémentaires :

- *La dimension est le nombre de directions indépendantes selon lesquelles on peut se diriger au sein de l'espace.*
  - Par exemple, $\{0\}$ est un singleton. Si mon monde se réduisait à ce seul point, alors je serais nécessairement immobile : je ne pourrais pas changer de point et n'aurais donc aucun mouvement possible.
    $\{0\}$ est de dimension 0. C'est le seul espace de dimension 0.
  - $\mathbf{R}$ est une droite : une ligne. Si mon monde se réduisait à cette ligne, je n'aurais qu'une direction possible pour mes mouvements le long de cette droite : l'espace est de dimension 1.
    Réciproquement, tout espace de dimension 1 est une droite.
  - $\mathbf{R}^2$ est un plan. Je peux donc m'orienter suivant deux directions : avant/arrière et gauche/droite. L'espace est de dimension 2.
    Réciproquement, tout espace de dimension 2 est un plan.
  - Pour $\mathbf{R}^3$, j'ajoute une direction supplémentaire : haut/bas.
  - Un espace de dimension 4 est plus difficile à représenter, mais il comporte à son tour encore une direction de mouvement supplémentaire. On a coutume d'ajouter le temps que l'on pourrait faire défiler à notre guise : se déplacer dans le temps pour désigner cette dimension supplémentaire.
  - Et ainsi de suite. Pour chaque dimension supplémentaire, on ajoute une nouvelle direction possible pour un mouvement.
- *La dimension d'un espace est le nombre minimal d'informations qu'il faut pour pouvoir décrire parfaitement et sans ambigüité chaque vecteur de cet espace.*
  - Pour l'espace $\{0\}$, on n'a besoin d'aucune information pour décrire le vecteur considéré car on n'a pas le choix : il n'y a que le vecteur 0 possible.
    Ainsi $\{0\}$ est de dimension 0.
  - Pour l'espace $\mathbf{R}$ (ou toute droite linéaire), il suffit d'avoir l'abscisse pour connaître le vecteur considéré : une information donc de dimension 1.
  - Pour $\mathbf{R}^2$, il faut deux informations. Un vecteur du plan est décrit par un couple (abscisse, ordonnée). L'espace est de dimension 2.

  C'est cette deuxième approche qui nous servira à formaliser mathématiquement la notion de dimension.

Exemple

- Dans l'exemple initial du chapitre sur les espaces vectoriels, nous avions considéré des paniers de légumes composés de courgettes et d'aubergines. L'espace était de dimension 2.
- Si on rajoutait un autre type de légume à notre panier, alors, on aurait un espace de dimension 3 et chaque panier serait décrit par un triplet (x, y, z).

Intérêt de la base :
On voit donc que chaque nouvelle information indépendante donne une nouvelle direction, c'est-à-dire augmente la dimension de 1.
Ainsi, tout vecteur d'un espace de dimension n peut être décrit de façon unique par n informations.

La question est donc de traduire ces informations (des nombres réels) en vecteurs de l'espace.
Par exemple, avec les paniers de courgettes et aubergines, on peut traduire $(5, 3)$ par le panier « 5 courgettes et 3 aubergines ». Mais on pourrait aussi le traduire par « 3 courgettes et 5 aubergines ».
Il faut donc donner une clef de lecture pour comprendre que le 5 désigne le nombre d'aubergines et le 3, le nombre de courgettes. Cette « clef de lecture » est ce qui permet de transformer nos informations numériques en vecteurs de l'espace : on appelle cela une **base**.
Dans l'exemple en question, la base est simplement composée de deux vecteurs (ici des paniers) :

- $e_1 =$ « 1 aubergine et 0 courgettes »,
- $e_2 =$ « 0 aubergine et 1 courgettes ».

Ainsi, écrire $(5, 3)$ revient à faire $5e_1 + 3e_2 =$ « 5 courgettes et 3 aubergines ».
(e_1, e_2) est la base choisie pour l'espace (on pourrait en choisir d'autres).

La base sert de *repère*[1] dans l'espace considéré.
Par exemple, en dimension 1, la description de la droite suppose d'avoir choisi un vecteur directeur u (qui sert de base). Ainsi tout autre vecteur de la droite s'écrit $v = \lambda u$. λ est « l'information » qui donne v sans ambigüité.

La dimension de l'espace est égal au nombre de vecteurs qu'il faut pour constituer une base de l'espace.

Une fois cette base fixée, la connaissance des coordonnées du vecteur dans cette base permet de décrire exactement ce vecteur par un uplet.

1. La différence avec le repère vu en géométrie est qu'il n'est pas ici nécessaire de préciser l'origine car on choisit toujours l'origine O que l'on sait faire partie de l'espace.

Pourquoi une base ? On voit bien que la famille qui doit servir de repère doit être génératrice pour que l'on puisse décrire *tous* les vecteurs de l'espace grâce à elle.
De plus, on ne veut pas qu'elle porte d'informations redondantes et qu'elle permettre de décrire chaque vecteur de façon *unique*. Elle doit donc être libre.
Cela correspond exactement à la définition d'une base.

D'un point de vue formel, pour que tout ceci fonctionne, il faut s'assurer

1. que les espaces considérés possèdent tous au moins une base,
2. que pour un espace fixé, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs (sinon un espace aurait plusieurs dimensions...)

C'est l'objet des théorèmes qui suivent.

B Approche formelle

Définition 1.1

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Remarque : Certains espaces ne sont pas de dimension finie.
Par exemple l'ensemble des suites réelles est de dimension infinie car il n'admet aucune famille génératrice de dimension finie : il faut un nombre infini d'informations pour décrire une suite quelconque (il faut tout ses termes).
Si un espace admet une famille génératrice finie, alors on peut décrire chaque vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Et donc avec un nombre fini d'informations.
Le problème est, qu'en général, l'écriture du vecteur n'est pas unique. Pour éviter cet écueil, on veut donc que la famille soit aussi libre : une base.

Justifions donc que l'on peut en trouver une.

Théorème 1.2 *(Théorème de la base extraite)*

De toute famille génératrice finie d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.
Donc tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base (finie).

⚠ Cette base n'est pas unique.

Preuve

Idée : on part d'une famille génératrice et on enlève un à un les vecteurs « redondants » jusqu'à obtenir une famille libre (sans changer l'espace généré).
Soit $\mathcal{G} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille génératrice de E.
Si la famille est libre, alors c'est une base de E.
Si la famille est liée, alors un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres : par exemple $x_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k$.
Alors la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_{p-1})$ est génératrice.
On réitère ce processus en enlevant 1 à 1 les éléments surabondants de la famille jusqu'à obtenir une famille libre. Par construction cette famille est à la fois libre et génératrice : c'est donc une base.
(Le processus aboutit bien à un certain rang, car le nombre d'éléments dans la famille décroît strictement et une famille à un seul élément non nul est toujours libre.) ■

Maintenant que l'on sait que tout espace de dimension finie admet une base, il reste à démontrer que toutes ses bases ont le même nombre d'éléments pour pouvoir définir la dimension.

Théorème 1.3 *(Lemme de Steinitz)*

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Autre formulation : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie de E et $\mathcal{F}$ une famille libre de E, alors
$$\operatorname{Card} \mathcal{F} \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{G}$$

Explications

Ce théorème est assez intuitif. Il énonce simplement que si on peut exprimer $(n+1)$ vecteurs à partir de n vecteurs différents, alors les $n+1$ vecteurs ne peuvent pas être linéairement indépendants.

Preuve

Admis ■

Théorème 1.4 *(Dimension)*

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé **la dimension** de l'espace.
Par convention, l'espace vectoriel nul : $\{0_E\}$ est de dimension 0 (on ne parle pas de base pour cet espace).

Preuve

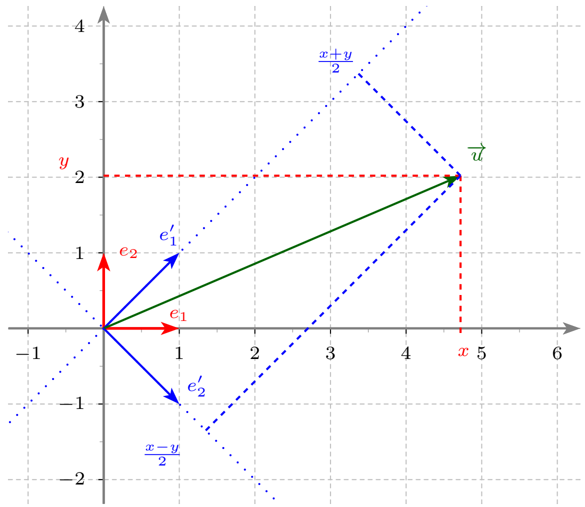
Si E admet une base à n éléments. Cette base est une famille génératrice, donc toute famille libre de E admettra au plus n éléments.
Donc toutes les autres bases admettent au plus n éléments.
Si on suppose qu'il existe une autre base admettant strictement moins que n éléments, alors en échangeant les rôles, on voit que la première base qui contient n éléments ne peut pas être libre. C'est absurde. ■

Exemple

- Le plan $\mathbf{R}^2$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Pour connaître un vecteur, il me faut au minimum deux informations. Par exemple l'abscisse et l'ordonnée. L'espace est de dimension 2, et pour construire une base, je prends deux vecteurs (e_1, e_2), tel que e_1 serve à donner l'abscisse : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, l'ordonnée.

  Un vecteur (x,y) du plan est alors décrit par $xe_1 + ye_2$.

  On peut aussi choisir une autre base (cela revient à changer de repère). Par exemple, prendre $e_1' = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$. Le vecteur (x,y) s'écrit dans cette base $(x,y) = \frac{x+y}{2}e_1' + \frac{x-y}{2}e_2'$



Méthode *(Déterminer la dimension d'un espace)*

En général, pour déterminer la dimension d'un espace, on lui trouve une base.
Il faut alors montrer qu'elle est à la fois libre et génératrice.

Propriété 1.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit $\mathcal{F}$ une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie.
$$\operatorname{Card} \mathcal{F} \leqslant n \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{G}.$$

Preuve

C'est simplement le théorème 1.3. ■

De même que l'on peut supprimer des éléments d'une famille génératrice jusqu'à obtenir une base, on peut compléter une famille libre et obtenir une base.
C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 1.6 *(Théorème de la base incomplète)*

Toute famille libre d'un espace de dimension finie peut-être complétée en une base. Les vecteurs pour compléter la famille peuvent être choisis dans une famille génératrice finie quelconque.

Preuve

Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille libre de E.
On suppose que l'on possède une famille génératrice finie quelconque $\mathcal{G} = (y_1, y_2, \cdots, y_q)$ (existe car E est de dimension finie).

- Si tout élément de $\mathcal{G}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice.
  En effet, si $\forall i \in [\![1, q]\!], \exists (\lambda_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que $y_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{i,k} x_k$.
  Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, $\forall x \in E, \exists (\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$.
  Alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \mu_i \lambda_{i,k} x_k$. $\mathcal{F}$ est génératrice, c'est donc une base.
- Sinon, il existe un élément de $\mathcal{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i : par exemple y_1 (quitte à réordonner). Alors $(x_1, x_2, ..., x_p, y_1)$ est une famille libre.

On réitère le processus en ajoutant 1 à 1 les éléments de $\mathcal{G}$ jusqu'à obtenir une famille génératrice. Alors, par construction elle sera aussi libre. Ce sera donc une base.
(Le processus s'arrête nécessairement au plus tard quand tous les éléments de $\mathcal{G}$ ont été intégrés à $\mathcal{F}$). ■

Pour se souvenir

Famille libre $\xrightarrow{\text{ajoute des vecteurs}}$ **Base** $\xleftarrow[\text{retire des vecteurs}]{\text{Th. base extraite}}$ **Famille génératrice**

Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Explications

La base est un ensemble de vecteurs de E, à partir desquels, je peux exprimer tous les autres *de façon unique*.

- Le fait que je puisse exprimer tous les autres vecteurs à partir de ceux de la base traduit que la base est une famille génératrice.
- Le fait que cette expression soit unique, traduit que la base est une famille libre.

Intuitivement : Lorsque je possède une famille génératrice, si elle n'est pas libre, c'est qu'il y a une redondance d'information entre ces éléments. Je peux donc en supprimer certains tout en restant générateur. Lorsque je ne peux plus en supprimer, c'est que la famille est une base : elle est aussi libre.
De même, si une famille est libre, il me manque des informations pour pouvoir exprimer tous les vecteurs. Je peux donc compléter la famille pour obtenir une base.

Théorème 1.7 *(Caractérisation des bases)*

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, et $\mathcal{F}$ une famille de n **vecteurs** de E, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E,
2. $\mathcal{F}$ est génératrice de E,
3. $\mathcal{F}$ est libre.

Preuve

- Si $\mathcal{F}$ est une base, alors elle est génératrice.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice. Si elle était liée, alors on pourrait lui enlever un vecteur et elle resterait génératrice. C'est absurde car alors il existerait une famille génératrice à $n-1$ éléments (qui est moins que le nombre d'éléments de la base qui forme une famille libre). Donc $\mathcal{F}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est libre. Si ce n'était pas une base, alors il existerait $y \in E$ tel que $y \notin \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$. Alors, la famille $\mathcal{F}$ complétée par y serait libre et aurait plus d'éléments qu'une base (qui est génératrice). C'est impossible d'après Steinitz.
  Donc la famille $\mathcal{F}$ est génératrice : c'est une base. ■

Méthode *(Montrer qu'une famille est une base)*

Lorsque l'on travaille dans un espace E dont on connaît la dimension n.
Pour montrer que $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs, et de prouver qu'elle est **soit** libre, **soit** génératrice.
En général, le plus simple est de montrer qu'elle est **libre**.

Propriété 1.8 *(Coordonnées d'un vecteur dans une base)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.
Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique comme une combinaison des e_i.

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

C'est-à-dire que la matrice colonne $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ décrit parfaitement x.

⚠ Si on change de base, alors les (λ_i) sont également changés. On indique donc la base utilisée en indice dans la notation : $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Preuve

L'existence des scalaires vient du caractère générateur de la base, leur unicité de la liberté de la base. ■

2 Sous espaces vectoriels de dimension finie

Propriété 2.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un sous espace vectoriel de E,
alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, on a alors

$$\dim E = \dim F \qquad \Longleftrightarrow \qquad E = F.$$

Preuve

Si $F = \{0_E\}$ c'est terminé,
Sinon, une famille libre de F est également libre dans E, donc toutes les familles libres de F ont au plus n vecteurs (d'après Steinitz). Si on note p le nombre maximum de vecteurs que peut contenir une famille libre de F, alors $p \leqslant \dim E$.
On considère une famille libre de F à p vecteurs : $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.
Si, par l'absurde, cette famille n'est pas génératrice de F, alors il existe $y \in F$ tel que $y \notin \text{Vect}\ (e_1, \cdots, e_p)$. La famille complétée $(e_1, \cdots, e_p, y)$ est donc une famille libre de F avec $(p+1)$ vecteurs.C'est contradictoire avec la définition de p (cardinal maximal d'une famille libre).
Donc $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F.
Ainsi F est de dimension finie, et $\dim F = p \leqslant \dim E$.
Cas d'égalité :
On pose $n = \dim E$ et on suppose que $\dim F = \dim E = n$.
F possède donc une base de la forme $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$. Cette famille est libre dans F, donc également dans E et son cardinal est égal à la dimension de E.
D'après la propriété 1.7, c'est donc une base de E.
Ainsi $F = \text{Vect}\ (\mathcal{F}) = E$. Donc les espaces sont égaux. ■

Méthode *(Égalité de deux espaces vectoriels)*

Pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont égaux, il suffit de montrer que $F \subset E$ et que $\dim F \geqslant \dim E$.

L'égalité des dimensions remplace la deuxième inclusion d'un raisonnement par double inclusion.

Définition 2.2 *(Nature de sous espaces particuliers)*

Soit E un espace de dimension finie n et F un sous espace de E,

- Si $\dim F = 1$, alors F est une **droite vectorielle.**
- Si $\dim F = 2$, alors F est un **plan vectoriel.**
- Si $\dim F = n - 1$, alors F est un **hyperplan vectoriel.**

Théorème 2.3 *(Sous espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.)*

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$, trois situations se présentent :

- Soit $\dim F = 0$, c'est-à-dire $F = \{0\}$: il ne contient que le vecteur nul.
- Soit $\dim F = 1$. Il contient un vecteur non nul e et tous ses vecteurs sont proportionnels à e.
  Géométriquement : F est une droite vectorielle.
- Soit $\dim F = 2$, alors $F = \mathbf{R}^2$
  (inclus et de même dimension, donc égal).

3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.1 *(Rang d'une famille de vecteurs)*

Le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré

$$\text{rg}\ (u_1, \cdots, u_n) = \dim \left(\text{Vect}\left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right)\right).$$

Exemple

$\text{rg}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = n$ si et seulement si la famille est libre.

Méthode *(Calcul du rang par le pivot)*

Le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est égal au nombre de pivot de la matrice formée des vecteurs colonne correspondants.
Les vecteurs donnant les pivots forment alors une base de l'espace engendré.

Preuve

En effet, réaliser le pivot sur la matrice revient à chercher les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que la combinaison linéaire soit nulle : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.

- S'il y a autant de pivots que de colonnes, alors, il n'y a que des inconnues principales et la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$: la famille est libre.
- Pour chaque paramètre, si on lui affecte par exemple la valeur 1, alors on peut obtenir une combinaison linéaire qui donne 0.
  Par exemple, on obtient $u_{i_0} + \displaystyle\sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i = 0$.
  Ainsi $u_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \lambda_i u_i$: il s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs et peut donc être supprimé de la famille sans changer l'espace engendré.
  Si on retire ainsi tous les vecteurs donnant des paramètres, on obtient donc une famille libre, pour le même espace engendré : c'est une base.

■

Exemple *(exercice récapitulatif)*

Dans $\mathbf{R}^4$, on définit les vecteurs

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,2,1,0) & v_2 = (-1,1,1,0) & v_3 = (1,5,3,0) \\ v_4 = (3,3,1,0) & v_5 = (0,1,0,1) & v_6 = (-1,3,3,-1) \end{array}$$

On note $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

1. Dire sans calculs si la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est libre.
2. Extraire de cette famille, une sous famille de rang maximal que l'on notera $\mathcal{E}$. Quelle est la dimension de F ?
3. Compléter $\mathcal{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$. On notera cette base $\mathcal{B}$.
4. Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution :