Applications linéaires en dimension finie

Notation : Dans tout le chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie.

1 Action sur une base

Si on munit E d'une base, alors toute application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ peut être caractérisée par son action sur cette base : il suffit de connaître les images des éléments de la base de E pour connaître complètement l'application linéaire.

Théorème 1.1 *(Caractérisation par l'image d'une base)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E.
f est décrite de manière unique par son action sur la base : $(f(e_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Tout vecteur $x \in E$ peut être décomposé sur la base :

$$x = \sum_{j\in[\![1,n]\!]} x_j e_j, \qquad \text{ainsi} \quad f(x) = \sum_{j\in[\![1,n]\!]} x_j f(e_j).$$

Exemple

Si on reprend l'exemple du panier de courses, il suffit de connaître les prix unitaires des produits de *base* pour connaître le prix de n'importe quel panier.

Propriété 1.2

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E,
alors $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

En d'autres termes, tous les éléments de l'image $\mathrm{Im}\,(f)$ peuvent être obtenus à partir des images de la base de E : il suffit de connaître l'image des éléments de la base de E pour générer l'espace $\mathrm{Im}\,(f)$ tout entier.

Preuve

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, alors par définition de l'image, il existe un antécédent x : $f(x) = y$.
Or x peut être décomposé sur la base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$: $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p$.
avec $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$. Donc $y = f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p)$.
Par linéarité de f, $y = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \cdots + \lambda_p f(e_p)$.
Ainsi, tout $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$.
Donc $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$.

■

Théorème 1.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E,

- f est injective de E dans F
  si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F.
- f est surjective de E sur F
  si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
- f est un isomorphisme de E dans F
  si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.

Se souvenir

Injective	$\longleftrightarrow$	Libre
Surjective	$\longleftrightarrow$	Génératrice
Bijective	$\longleftrightarrow$	Base

Injectivité et liberté sont deux façons d'exprimer l'unicité d'une écriture. De même, surjectivité et catactère générateur expriment l'existence de l'écriture.

Preuve

- **(sens direct)** On suppose f injective.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbf{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k) = 0$, alors $f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k\right) = 0$.
  Ainsi $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \in \operatorname{Ker}(f)$ et on sait que f est injective, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.
  Donc $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k = 0$.
  Or $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base, la famille est donc libre. Donc tous les λ_k sont nuls.
  Donc la famille $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p))$ est libre.
  (sens réciproque) On suppose que la famille est libre.
  Soit $x \in \operatorname{Ker} f$.
  $x \in E$ et on peut le décomposer sur la base $(e_1, e_2, \cdots e_p)$:
  $$\exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbf{R}^p \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$$
  Ainsi $0_F = f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f(e_k)$ (par linéarité).
  Or la famille des $(f(e_k))_{k\in[\![1,p]\!]}$ est supposée libre, donc tous les λ_k sont nuls.
  Donc $x = 0$.
  Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et f est injective.
- f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
  Or $(f(e_k))_{k\in[\![1,p]\!]}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
  f est donc surjective, si et seulement si c'est une famille génératrice de F.
- Conséquence des deux points précédents.

$\blacksquare$

Se souvenir

Entre des espaces de dimension finie :

Un isomorphisme est une application qui transforme une base en une autre.

En particulier, l'image d'une base de E par un isomorphisme est une base de F.

Exemple

Montrer qu'une application est injective si et seulement si elle « transforme » *toute* famille libre de E en une famille libre de F.

Corollaire 1.4

Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils sont de même dimension.

2 Rang d'une application linéaire

Dans cette partie, E et F désignent des espaces de dimension finie.
$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ désignent des bases de E et F.

Définition 2.1 *(Rang d'une application linéaire)*

Le **rang** d'une application linéaire de E vers F est la dimension de son image $\operatorname{Im}(f)$.

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Propriété 2.2 *(Lien avec le rang de la famille image d'une base)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F))$ et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$$

Preuve

$\operatorname{rg}(f) = \dim f(E) = \dim(\operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))) = \operatorname{rg}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$. $\blacksquare$

Propriété 2.3

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$$

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, alors

$$\operatorname{rg} f \leqslant \min(n,p)$$

Preuve

Si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E,
alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$, donc l'image possède une famille génératrice à n éléments. Donc $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im}(f) \leqslant n = \dim E$
Or $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, donc $\dim \operatorname{Im}(f) \leqslant \dim F$ $\blacksquare$

Théorème 2.4 *(Rang et composition)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$	Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^q)$, $$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$$

Preuve

$\operatorname{Im}(g \circ f) = (g \circ f)(E) = g(\operatorname{Im} f)$ et d'après la propriété précédente 2.3,
$\operatorname{rg}(g \circ g) \leqslant \dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rg}(f)$.
De plus, $\operatorname{Im}(f) \subset F$, donc par croissance de l'image directe,
$\operatorname{Im}(g \circ f) = g(f(E)) \subset g(F) = \operatorname{Im}(g)$.
D'après la propriété précédente 2.3, $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Im}(g) = \operatorname{rg}(g)$ ∎

Propriété 2.5 *(Invariance du rang par la composée avec un isomorphisme)*

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\varphi_E \in \mathrm{GL}(E)$, et $\varphi_F \in \mathrm{GL}(F)$ Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ \varphi_E) = \operatorname{rg}(\varphi_F \circ f) = \operatorname{rg}(\varphi_F \circ f \circ \varphi_E)$	Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^p)$, $\varphi_1 \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$, et $\varphi_2 \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^p)$ Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ \varphi_1) = \operatorname{rg}(\varphi_2 \circ f) = \operatorname{rg}(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1)$

Remarque : Les hypothèses de ce théorème sont trop fortes : il suffit d'avoir φ_E surjective et φ_F injective pour avoir l'égalité.

Preuve

$\varphi_E(E) = E$ car l'application est bijective et en particulier surjective. Donc $(f \circ \varphi)(E) = u(E)$, ainsi $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg} f$.
Et par bijectivité de φ_F, $\varphi_F(\operatorname{Im}(f))$ est isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$ et en particulier les deux espaces ont la même dimension (il suffirait d'avoir φ_F injective, car alors φ_F serait bijective sur son image). Donc $\operatorname{rg}(\varphi_F \circ f) = \operatorname{rg} f$. ∎

Propriété 2.6

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors	Si $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^p)$, alors
• f injective $\iff$ $\operatorname{rg} f = \dim E$	• f injective $\iff$ $\operatorname{rg} f = n$
• f surjective $\iff$ $\operatorname{rg} f = \dim F$	• f surjective $\iff$ $\operatorname{rg} f = p$
• f bijective $\iff$ $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$	• f bijective $\iff$ $\operatorname{rg} f = n = p$

Preuve

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E (on pose $n = \dim E$).

- *preuve intrinsèque :* f est injective si et seulement si elle est bijective sur son image.
  preuve équivalente qui utilise les bases : f est injective si et seulement si $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$ est une famille libre de $\operatorname{Im} u$. Or c'est toujours une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
  f est donc injective si et seulement si c'est une base de $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = n$.
- f est un surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
  si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim F$ (car l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset F$ est toujours vérifiée). ∎
- Conséquence des deux points précédents.

Explications

Ces propriétés doivent devenir naturelles pour vous.
Ainsi, il faut se rappeler qu'une application linéaire ne peut pas *dilater* un espace : elle ne peut pas augmenter la dimension et $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) \leqslant n$.
La dimension de l'image ne peut être plus grande que celle de l'espace de départ.
La conséquence immédiate est que, si $\dim F > \dim E$, alors f ne peut pas être surjective, elle ne peut pas « remplir » F tout entier car il eusse fallu pour cela que f dilatât l'espace.

De même, si la dimension de l'espace d'arrivée est strictement plus petite que celle de l'espace de départ, cela veut dire que f doit perdre de l'information en chemin : elle ne peut pas être injective.

Corollaire 2.7

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$,	Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^p)$,
• $\dim E > \dim F$ $\Rightarrow f$ n'est pas injective.	• $n > p$ $\Rightarrow f$ n'est pas injective.
• $\dim E < \dim F$ $\Rightarrow f$ n'est pas surjective.	• $n < p$ $\Rightarrow f$ n'est pas surjective.

Théorème 2.8

Si f est un endomorphisme en dimension finie,
ou si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$ alors

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, 2x-y) \end{cases}$. Sans aucun calcul, on sait que cette application n'est pas surjective car la dimension de l'espace d'arrivée est supérieure à la dimension de l'espace de départ : $\operatorname{rg} f \leqslant 2$.

Explications
Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avions vu que si une famille est composée d'autant de vecteurs que la dimension de l'espace, alors le fait que ce soit une base, qu'elle soit libre ou qu'elle soit génératrice est équivalent.
Il s'agit du même théorème pour les applications linéaires. Ainsi, la bijectivité, l'injectivité et la surjectivité correspondent respectivement au fait que l'image d'une base est : soit une base, soit une famille libre, soit une famille génératrice.

Méthode *(Prouver que f est un isomorphisme)*

Pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de dimension finie est un isomorphisme, on peut successivement :

1. Montrer que les deux espaces ont la même dimension,
2. Montrer que l'application est injective (noyau réduit à 0)

C'est souvent l'injectivité d'une application qui est la plus simple à démontrer (montrer que si $x \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $x = 0$). Lorsque les espaces sont de même dimension, cela peut donc permettre de montrer la surjectivité (qui est en général plus dure à montrer directement).

3 Matrice d'une application linéaire

Dans cette partie, nous allons utiliser les bases (en dimension finie), pour décrire complètement les vecteurs et caractériser les applications linéaires.
Cette démarche a l'avantage (et l'inconvénient) d'être moins abstraite et permettra de réaliser de nombreuses démonstrations de façon exclusivement calculatoire.
C'est ce que nous appelons l'approche *matricielle*.

A Matrice dans une base

Le résultat fondateur de cette approche est le théorème 1.1 selon lequel une application linéaire est entièrement déterminée par son action sur une base.
On considère donc deux espaces de dimension finie E et F.
$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ est une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. **Décomposition sur la base de départ :**

   D'après le théorème 1.1, pour tout vecteur $x \in E$, on peut écrire
   $$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j).$$

2. **Décomposition sur la base de d'arrivée :**

   Or $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ est une base de F, donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on peut décomposer $f(e_j)$ de façon unique dans la base $\mathcal{F}$:
   $$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i.$$

3. **Écriture matricielle :**

   Dans la base $\mathcal{F}$, $f(e_j)$ peut donc s'écrire comme la matrice colonne
   $$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$

   Ainsi $y = f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_j f(e_j) + \cdots + x_n f(e_n)$.

Matriciellement :

$$Y = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{p,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & & & a_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & & & a_{p,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX$$

Notation

On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ la matrice de l'application f entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.
Pour deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ données, la matrice décrit parfaitement l'application linéaire.

Conséquence

Toute application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie peut être caractérisée par une matrice.

Cette matrice dépend du choix des bases.

Explications

Le fait de choisir des bases particulières permet de ne pas se préoccuper de la nature de l'espace vectoriel considéré. Tout vecteur s'écrit dans la base sous la forme d'un n-uplet de $\mathbf{R}^n$. Ainsi, on peut oublier l'espace vectoriel ambiant pour travailler dans $\mathbf{R}^n$.
Par exemple, pour l'espace des applications polynomiales $\mathbf{R}_{n-1}[x]$, choisir la base canonique revient à modéliser chaque polynôme par le tableau (vecteur) de ses coefficients.
Les résultats prouvés sur $\mathbf{R}^n$ pourront donc être appliqués à n'importe quel espace vectoriel de dimension finie n (en choisissant une base quelconque pour celui-ci). Cela explique pourquoi le programme se limite à l'étude des espaces vectoriels de type $\mathbf{R}^n$.

De même, toute application linéaire entre E de dimension n et F de dimension p peut s'écrire sous la forme d'une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$.

Remarque : La matrice qui est introduite ici correspond exactement à celle que nous avions déjà obtenue, de façon plus intuitive, pour trouver le noyau d'une application linéaire de $\mathcal{L}\left(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p\right)$ (lors de l'application du pivot).
Ce chapitre permet de formaliser cette approche pour appliquer ce même procédé avec des espaces plus compliqués (par exemple les fonctions polynomiales) ou avec des bases autres que la base canonique.

Ceci sera développé dans le chapitre sur les changements de base.

Méthode *(Écrire une application linéaire dans une base)*

La matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ s'obtient en écrivant les vecteurs colonne $f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)$ côte à côte dans la base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$.

$\mathcal{E}$: départ

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \\ \leftarrow f_p \end{array} \end{array}$$

$\mathcal{F}$: arrivée

Propriété 3.1 *(« Réciproque »)*

Toute matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ peut être interprétée comme la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ avec $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ munis de leur base canonique.

⚠ L'espace de départ correspond aux colonnes de la matrice. Ainsi, la dimension de l'espace de départ est le nombre de **colonnes** et celle de l'espace d'arrivée est le nombre de lignes. Pour $f : \mathbf{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{R}^p$, la matrice est dans $\mathcal{M}_{p,\mathbf{n}}(\mathbf{R})$.

Matriciel versus intrinsèque :

- *L'approche matricielle* consiste en une description des objets à partir d'une base de l'espace. Cette description est toujours tributaire du choix préalable d'une base. Nous verrons dans le chapitre consacré, que changer de base n'est pas aisé.
- Au contraire, *l'approche intrinsèque*, n'utilise aucune base pour décrire les objets mais uniquement leurs propriétés intrinsèques. C'est moins calculatoire et d'avantage lié à la nature propre de l'objet en question. Mais c'est souvent plus abstrait.

Ces deux approches sont complémentaires, et il faut savoir jongler entre les deux.

Théorème 3.2

Soit E un espace de dimension p et F un espace de dimension n.
On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ respectivement des bases de E et de F.

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{M}_{n,p} \\ f & \mapsto \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En particulier, $\dim\left(\mathcal{L}(E,F)\right) = n \times p = \dim(E) \times \dim(F)$.

B Action matricielle d'une application linéaire

Théorème 3.3 *(Calcul matriciel de $f(x)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n) : \text{ base de } E \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_p) : \text{ base de } F.$$

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$, on note $A = \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ et $X = \text{mat}_{\mathcal{E}}(x)$.

La matrice colonne de $f(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ est AX.

Preuve

Il suffit d'écrire le produit matriciel. ■

Explications

N'oublions pas que nous sommes en algèbre linéaire : on ne fait qu'étudier des situations de proportionnalité. Revenez donc en $4^{\text{ème}}$ quelques instants et vous remarquerez que vous l'aviez déjà appris : calculer $f(x)$, c'est multiplier x par le coefficient de proportionnalité a. La seule différence est qu'ici, le coefficient de proportionnalité n'est pas un nombre, mais une matrice.

Chercher l'image d'un vecteur par une application linéaire revient à faire un produit matriciel.

C Opérations sur les matrices

Théorème 3.4

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie.
On désigne par $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des bases respectives de ces trois espaces.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f' \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2; \qquad \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\lambda f + \mu f') = \lambda \, \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) + \mu \, \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f')$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g) \times \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$$

- $\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\text{Id}_E) = I_n$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \in \text{GL}(E) \iff \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et dans ce cas :

$$\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f^{-1}) = \left(\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)\right)^{-1}$$

Preuve

- immédiat en construisant la matrice de $\lambda f + \mu f'$.
- pour un $x \in E$ quelconque, on vérifie que $(v \circ f)(x) = g(f(x))$.
Ainsi, avec les matrices, cela revient à faire successivement le produit avec $\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$ puis $\text{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)$.
- Il suffit de construire la matrice de l'application identité.
- Si $f \in \text{GL}(E)$, alors on utilise les deux points précédents :

$$I_n = \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\text{Id}_E) = \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}\left(f \circ f^{-1}\right) = \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) \times \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f^{-1})$$

Réciproquement, si la matrice est inversible, alors il existe une application g représentée par la matrice inverse. Et le calcul précédent montre alors que $g = f^{-1}$ (et en particulier que $f \in \text{GL}(E)$). ■

⚠ On choisit les mêmes bases pour les différentes applications : la matrice dépend du choix de la base.

⚠ Si on prend deux bases différentes de E : $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, alors $\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\text{Id}_E) \neq I_n$.

Remarque : La première propriété revient à dire que pour les bases de E et de F fixées (avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$),

l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R}) \\ f & \mapsto \text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f) \end{cases}$ est linéaire.

Propriété 3.5 *(Isomorphisme entre deux bases différentes)*

Si $f \in \text{GL}(E)$ et $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E, alors

$$\text{mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(f^{-1}) = \left(\text{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)\right)^{-1}.$$

Preuve

On adapte la preuve précédente. ■

Retour en arrière :

Dans le chapitre sur les matrices, nous avions admis qu'il suffit d'avoir une matrice inverse à droite ou à gauche pour montrer qu'une matrice est inversible. C'est une conséquence de ce corollaire.
Plus précisément, nous avions formulé ainsi le théorème :
Pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ soit inversible, il suffit qu'il existe un inverse à gauche, ou un inverse à droite. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} A \quad \text{inversible} &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ tel que } AB = I_n) \\ &\iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ tel que } BA = I_n) \end{aligned}$$

En quoi cela est-il une conséquence du théorème précédent ?
Cela vient du fait qu'une matrice carrée A représente un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une certaine base.
S'il existe B telle que $AB = I_n$, alors on peut interpréter B comme la matrice d'un

endomorphisme $g \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Ceci prouve que f est surjective (prouvé en exercice dans le chapitre sur les application).
En effet, $g(E) = E$ donc $E = \mathrm{Id}_E(E) = f(g(E)) = f(E)$, ce qui prouve que $\mathrm{Im}\,(u) = E$: u est surjective.
Or u est un endomorphisme donc sa surjectivité est équivalente à sa bijectivité.
Donc u est un isomorphisme de E.
Ainsi $A \in \mathrm{GL}(E)$.
On montre de même que l'existence d'un inverse à gauche équivaut à l'injectivité de u et donc à sa bijectivité.
Ce résultat qui est vrai pour les matrices (dimension finie) est faux en dimension infinie.

4 Donnez-moi un pivot... je soulèverai le monde

A Rang d'une matrice

Théorème 4.1 *(Rang d'une matrice)*

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f)$,
alors le nombre de pivots de A est égal au rang de f.

On peut donc définir de façon équivalente :

Définition 4.2 *(Rang d'une matrice)*

Le **rang d'une matrice** est égal (de façon équivalente) :

1. au rang de son application linéaire. Il ne dépend pas du choix des bases.
2. au nombre de pivots de sa matrice échelonnée.
3. au rang de la famille de ses vecteurs colonne.

Preuve

Le rang d'une application linéaire ne dépend pas du choix de la base d'après la définition 2.1. C'est intrinsèque à l'application linéaire.
Ce rang est égal à celui de la famille $(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n))$. d'après la propriété 2.2.
Or, ces vecteurs forment justement les vecteurs colonne de la matrice A.
Enfin, il a été prouvé dans le chapitre sur les espaces vectoriels en dimension finie, que le rang de cette famille est égal au nombre de pivots de la matrice échelonnée. ■

Propriété 4.3

Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$,

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,\left(A^T\right).$$

B Interprétation du nombre de pivots

Théorème 4.4

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ sa matrice (le choix des bases n'importe pas).

- Le nombre de pivots de A est égal
  - au rang de f,
  - à la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$,
  - à la dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonne.
- Le nombre d'inconnues secondaires (nombre de colonnes - pivots) de A est égal
  - à la dimension de $\ker(f)$.

Ainsi

- f est **surjective** si et seulement si A admet autant de pivots que de lignes.
- f est **injective** si et seulement si A admet autant de pivots que de colonnes.
- f est **bijective** si et seulement si $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Théorème 4.5 *(Théorème du rang)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\mathrm{rg}\,(f) + \dim\,(\ker f) = \dim(E).$$

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$,

$$\mathrm{rg}\,(f) + \dim\,(\ker f) = n.$$

Preuve

nombre de pivots + nombre de paramètres = nombre de colonnes. ■

Méthode

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$, et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p\right)$, On réalise le pivot sur les **lignes** de A.

Les colonnes qui ont donné les pivots

- forment une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
- forment une base de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonne.