Séries numériques

« Si je devais me réveiller après avoir dormi pendant mille ans, ma première question serait : l'hypothèse de Riemann a-t-elle été démontrée ? »
David Hilbert

1 Généralités

Définition 1.1 *(Série numérique)*
Soit une suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On appelle **somme partielle** de terme général u_n, la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La **série numérique** de terme général u_n désigne la suite (S_n) des sommes partielles.
On note cette série $\sum u_n$.
u_n s'appelle alors le **terme général** de la série.

Définition 1.2 *(Nature de la série)*
La série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Dans la cas contraire, la série **diverge**.
La **nature** d'une série désigne sa convergence ou sa divergence.

Théorème 1.3
Toute série à termes positifs admet une limite dans $[0, +\infty]$. On note cette limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Remarque : De même, toute série à termes négatifs admet une limite dans $[-\infty, 0]$.
⚠ Noter que l'intervalle est fermé en $+\infty$: la limite est finie ou infinie.
C'est faux si la série n'est pas à termes positifs.

Exemple
Étudier la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

Définition 1.4 *(Reste d'ordre n)*
Soit $\sum u_n$ une série *convergente*. Le **reste** d'ordre n de la série est défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

⚠ Pour le reste d'ordre n, la somme commence à $n+1$.
Ceci n'a de sens que si la série converge.

Exemple
Donner le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Propriété 1.5
On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Théorème 1.6 *(Condition nécessaire de convergence)*

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0.

La réciproque est **FAUSSE**.

Contraposée : Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit qu'elle diverge *grossièrement.*

Méthode
Si on demande la nature d'une série, commencer par étudier la limite de son terme général.

Exemple
Montrer que $\sum \sin n$ diverge.

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = n^2\left(e^{\frac{1}{n+1}} - e^{\frac{1}{n}}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

2 Liens suites - séries

Méthode *(Série téléscopique)*
Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$,
la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exemple

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$. Exprimer u_n en fonction de n.

Méthode *(Retrouver le terme général)*
Si (S_n) est une suite de sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, alors,

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

3 Opérations sur les séries convergentes

Théorème 3.1 *(Produit par une constante)*
Si (u_n) est une suite réelle, et $\lambda \in \mathbf{R}$ **non nul**, alors $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature.
Et si elles convergent, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Théorème 3.2 *(Somme des limites)*
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Méthode *(Changements d'indices)*
Les changements d'indices du type $j = j+p$, avec p une constante fixée, se réalisent de la même façon sur les sommes des séries **convergentes** que sur les sommes finies (mais la borne $+\infty$ ne change pas).
Par exemple, si $\sum u_n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}.$$

4 Séries usuelles

A Séries géométriques

Définition 4.1 *(Série géométrique)*
On appelle **série géométrique**, toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Théorème 4.2 *(Critère de convergence des séries géométriques)*
La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Propriété 4.3
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$,
Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

Exemple *(Paradoxe de Zénon ou Achille et la Tortue)*

Achille aux pieds ailés disputa un jour une course avec la tortue. Bon joueur, Achille accorde 100m d'avance à la tortue. Mais, bien que deux fois plus rapide que la tortue, il ne la rattrapa jamais.
En effet, le temps qu'Achille parcourt les 100 premiers mètres, la tortue avait avancé de 50 m. Puis quand Achille eut parcouru ces 50 m, la tortue en avait encore parcouru 25 de plus... et ainsi de suite : la tortue resta toujours devant.
Commenter.

Théorème 4.4 *(Séries géométriques dérivées)*
La **série géométrique dérivée** $\sum nq^{n-1}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

La **série géométrique dérivée seconde** $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

B Séries de Riemann

Définition 4.5 *(Séries de Riemann)*
On appelle **série de Riemann**, tout série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
Pour $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n}$ s'appelle la **série harmonique**.

Théorème 4.6 *(Séries de Riemann)*
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

C Série exponentielle

Théorème 4.7 *(Série exponentielle)*
Pour $x \in \mathbf{R}$, la **série exponentielle** $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

5 Convergence absolue

Définition 5.1 *(Convergence absolue)*
Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 5.2
Une série absolument convergente est convergente :

« *la convergence absolue implique la convergence simple* »

Dans ce cas, $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

⚠ la réciproque est **fausse.**

Une série qui est convergente, sans être absolument convergente est dite *semi-convergente.*

Exemple
Donner la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Dans toute la fin du chapitre, on ne traitera plus que des séries **à termes positifs.**

6 Critères de convergence des séries à termes positifs

A Comparaison série intégrale

⚠ Le théorème suivant n'est pas au programme, et doit donc être redémontré dans chaque cas particulier. Mais il est d'usage tellement commun qu'il n'est pas possible de le passer sous silence.

Théorème 6.1 *(Comparaison série intégrale)*
Soit f une fonction **positive** décroissante sur $\mathbf{R}_+$,
La série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $\displaystyle\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exemple
Prouver le théorème sur la convergence/divergence des séries de Riemann.

B Théorèmes de comparaison

Théorème 6.2 *(Comparaison des séries à termes positifs)*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** telles que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant v_n$.

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple
Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^n}$ converge.

Théorème 6.3 *(Critère avec des équivalents)*
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes à **positives**, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

⚠ Cela ne veut pas dire que les sommes partielles soient équivalentes ! En particulier, si elles convergent, la limite dépend fortement des premiers termes des suites.

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$.

Théorème 6.4 *(Négligeablilité)*
Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites **positives**.
Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 6.5 *(Comparaison aux séries usuelles)*
Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs**,

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}^* \cup \{\pm\infty\}$, alors $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $q > 1$ tel que $(q^n u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.

Corollaire 6.6 *(Critère de d'Alembert)*
Soit (u_n) est une suite à termes **strictement** positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \geqslant 0$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, ce théorème ne permet pas de conclure, il faut une autre approche.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple

Prouver la convergence de la série exponentielle pour $x > 0$.

Théorème 6.7 *(Séries doubles)*
Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}^2}$, une suite positive à deux indices.
Alors

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}.$$

Avec la convention que « $(+\infty) + a = +\infty$ » pour $a \in \mathbf{R}$.