Primitives et intégration

« Il ne faut pas uniquement intégrer. Il faut aussi désintégrer. C'est ça la vie. C'est ça la philosophie. C'est ça la science. C'est ça le progrès, la civilisation. »
La Leçon, Ionesco

Introduction historique : Au III$^{\text{ème}}$ av. J.C., **Archimède** propose de calculer une surface ou un volume en sommant une multitude d'*indivisibles*. Ainsi, une sphère est considérée comme un empilement de lamelles circulaires très fines dont on somme les volumes élémentaires (imaginer une tomate coupée en fines tranches).
Les arabes puis l'occident moderne utiliseront cette méthode avec dextérité pour calculer de nombreuses aires et volumes. Mais les grandes avancées théoriques n'arriveront qu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avec Pascal, puis Newton et Leibniz. Il n'est pas étonnant de retrouver ici des grands noms du calcul différentiel : l'intégrale, comme le calcul différentiel entretient dès l'origine un lien très fort avec l'infiniment petit.
Newton (1642-1727) définit l'intégrale comme une dérivation à l'envers.
Leibniz (1646-1716) s'intéresse davantage à l'aspect sommatoire de l'intégrale comme une généralisation de la somme discrète $\sum$. Il introduit les notations actuelles :

$$\int \quad \text{désigne un grand } S \text{ comme « Somme » et } \mathrm{d}x \text{ désigne l'infiniment petit.}$$

Le terme d'intégrale apparaît pour la première fois dans sa correspondance. Il énonce le théorème fondamental qui sera démontré par Cauchy au XIX$^{\text{ème}}$.
Ces deux approches complémentaires font la richesse de l'intégrale : c'est à la fois une aire (somme d'aires *élémentaires*) et une primitive (*contraire* de la dérivée).
C'est à partir de cette idée, que **Riemann** (1826-1866) développera la première définition rigoureuse de l'intégrale.
Lebesgue (1875-1941) définit la théorie de la mesure grâce à laquelle on peut mesurer des objets infiniment petits. Le calcul d'aires s'en trouve révolutionné et donne naissance à l'intégrale de Lebesgue (pas à votre programme).

Notations : La mention du segment $[a,b]$ dans les définitions et théorèmes sous-entend que $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, avec $a<b$ (le segment contient au moins deux points).

1 Primitives

Dans ce chapitre, nous commençons par une approche purement calculatoire comme Newton à partir de la définition de la dérivée.
L'approche géométrique sera vue dans un deuxième temps.

A Définition et structure

Définition 1.1

Soit $f : I\to\mathbf{R}$,
On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F'=f$.

Explications
Trouver une primitive, c'est faire l'opération inverse de celle de la dérivation. Si on dérive la primitive, on retrouve la fonction initiale. C'est ainsi qu'il faudra se rappeler les primitives usuelles.

⚠ On a défini une primitive d'une fonction et non d'un réel. On parle donc d'une primitive de f et non de $f(x)$.

Propriété 1.2

Une primitive sur I est dérivable sur I et en particulier continue.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k(I,\mathbf{R})$, alors les primitives de f sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}(I,\mathbf{R})$.

Preuve
Immédiat avec la définition. ■

Théorème 1.3

Soit $f : I\to\mathbf{K}$, si f admet une primitive F sur un **intervalle** I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F+\text{cste},\quad \text{cste}\in\mathbf{R}\}$$

Exemple
Les primitives de $x\mapsto x^3-5x+2$ sont toutes les fonctions de la forme $x\mapsto \frac{x^4}{4}-\frac{5}{2}x^2+2x+c$ avec $c\in\mathbf{R}$.

Explications
La primitive n'est **pas unique**.
Cela provient de ce que la dérivée fait « perdre de l'information » sur la courbe. Connaître la dérivée en tout point de la courbe ne permet pas de reconstruire la courbe.

Il faut aussi avoir un point de départ.
Par exemple, si la dérivée de la fonction est $x \mapsto 2x$, alors on sait que la fonction est du type $x \mapsto x^2$. Par contre, cela peut être $x \mapsto x^2+1$ ou $x \mapsto x^2-2\pi$. Ces deux fonctions ont les mêmes pentes en tout point, mais elles sont simplement translatées verticalement l'une par rapport à l'autre.
Ainsi, lorsqu'on cherche une primitive, on a à disposition toutes fonctions dont les courbes sont translatées verticalement l'une par rapport à l'autre : elles ont les mêmes pentes en tout point, mais translatées.
Formellement (peut être sauté en première lecture) :
L'application qui à une fonction f – dérivable – associe sa dérivée n'est pas injective. Chaque élement de l'image peut donc avoir potentiellement plusieurs antécédents : plusieurs primitives.
Par contre, les primitives n'étant translatées que d'une constante, il suffit d'avoir une information supplémentaire pour connaître exactement la primitive.
Ainsi, l'application $f \mapsto (f', f(0))$ est injective pour l'ensemble des fonctions dérivables : si on impose le passage par un point (par exemple $(0, f(0))$, cela fixe la constante c de manière unique et l'application devient injective : il y a unicité de la primitive.

Preuve

Par double inclusion.
On note $E = \{F + \text{cste}, \quad \text{cste} \in \mathbf{R}\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des primitives de f.
$\forall \text{cste} \in \mathbf{R}$, $(F+\text{cste})' = F' = f$, donc $F + \text{cste} \in \mathcal{P}$. Ainsi $E \subset \mathcal{P}$.
Réciproquement si $G \in \mathcal{P}$, alors $G' = f = F'$, donc $(G-F)' = 0$.
Or I est un intervalle, donc $G - F$ est constante sur I. Si on note cste cette constante, alors $G = F + \text{cste} \in E$. Donc $\mathcal{P} \subset E$, et par double inclusion $\mathcal{P} = E$ ■

⚠ C'est faux si I n'est pas un intervalle. Il faut alors plusieurs constantes car la translation vertical peut différer entre deux parties de I qui ne se touchent pas.

Exemple

Donner toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}^*$.
Solution :

B La notation intégrale

Notation *(signe intégrale)*

Pour f une fonction continue sur un intervalle I, et pour $a \in I$,
on note $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Preuve

L'existence de la primitive est admise à ce stade.
Unicité : on suppose qu'il existe deux primitives F et G de f qui s'annulent en a.
D'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ tel que $F = G + k$.
Or $G(a) + k = F(a) = 0$ et $G(a) = 0$, donc $k = 0$ et $F = G$.
D'où l'unicité de la primitive de f qui s'annule en a. ■

Notation

Pour $f \in \mathcal{C}^0(I)$, on note $\displaystyle\int f$ une primitive de f sur I.

Remarque : Cette notation sera peu utilisée car elle n'est pas très rigoureuse. En effet, il existe une infinité de primitives et l'on peut donc donner plusieurs valeurs à cette notation.

Notation *(Crochet)*

Pour $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, on note

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f\big]_a^b = f(b) - f(a).$$

Preuve

Pour $x \in [a,b]$, $x \mapsto \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ désigne l'unique primitive de f' qui s'annule en a.
Or f est une primitive de f'. Ainsi, d'après le théorème 1.3, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in [a,b], \qquad \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) + k$$

or la primitive s'annule en a, donc $f(a) + k = 0$, et $k = -f(a)$.
Pour $x = b$, on a donc bien $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. C'est ce que l'on note $\big[f\big]_a^b$. ■

C Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$		
$\mathrm{e}^{\lambda x}, \lambda \in \mathbf{R}^*$	$\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{\lambda}$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$		
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$				

On peut justifier toutes ces primitives en les dérivant. Celle du logarithme sera obtenue un peu plus loin par intégration par parties.

Méthode *(Intégration de sinus et cosinus)*

Pour intégrer une fonction qui dépend des puissances de sinus et de cosinus, penser à linéariser comme cela a été vu dans le chapitre sur les nombres complexes.

Exemple

Calculer $\int_0^x \cos^2 t \sin^4 t \, \mathrm{d}t$.

Solution :

D Formes composées et changement de variable

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$u'u^\alpha$, pour $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u'e^u$	e^u	$u' \sin u$	$-\cos u$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$			$u' \cos u$	$\sin u$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$			$\dots$	$\dots$

Exemple

Trouver une primitive de $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Solution :

Cette notion de dérivée composée se généralise avec le théorème de changement de variable.

Théorème 1.4 *(Le changement de variable)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K})$, a, b deux points de I et $u \in \mathcal{C}^1([a,b], I)$

$$\int_a^b u'(t)(f \circ u)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Preuve

Pour la preuve, il suffit de voir que nous avons à faire à une **composition** de fonctions.
Pour cela, on « rend la liberté à b » (que l'appele x pour plus de commodité).
Si on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x u'(t)(f \circ u)(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_{u(a)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$
alors $F'(x) = G'(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, donc $F - G$ est une constante.
Or $(F-G)(a) = 0$ donc $F = G$. ∎

Exemple *(À savoir refaire)*

Primitives de fractions rationnelles du type $\displaystyle\int_a^x \frac{\alpha t + \beta}{at^2 + bt + c}\,\mathrm{d}t$.

E L'intégration par parties

Théorème 1.5 *(Intégration par parties)*

Si u et v sont deux applications $\mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{K})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(x)v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve

La preuve est triviale et c'est elle qui permet de bien comprendre cette formule. Elle provient de la dérivation d'un **produit**.
$(uv)' = u'v + uv'$, donc uv est une primitive de $u'v + uv'$ qui est continue sur $[a,b]$ (car $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{K})$)
Donc $\int_a^b u'v + uv' = [uv]_a^b$, et avec la linéarité on obtient la formule voulue. ∎

Exemple

Calculer $\int_0^x t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Exemple

Trouver une primitive de $\ln$.

2 Intégration

Après l'approche calculatoire, nous abordons l'interprétation géométrique de l'intégrale. Le lien entre ces deux approches sera réalisé avec le théorème fondamental de l'analyse.
L'idée maîtresse est de définir l'intégrale comme « l'aire sous la courbe » comme cela a été fait au lycée. Il faut à présent trouver un moyen concret pour définir cette surface. Pour cela, on raisonne comme au primaire : les aires les plus simples à calculer sont les aires des rectangles. Ainsi, pour évaluer l'aire d'une figure ou sous une courbe, on peut la tracer sur un papier quadrillé et compter le nombre de petits carrés qui composent la surface. Plus la taille des carrés sera petite, meilleure sera l'approximation.
C'est exactement ce que nous allons faire ici avec les sommes de Riemann. Le choix d'un quadrillage de plus en plus fin se traduit par un passage à la limite.

Remarque importante : Dans tout le chapitre nous travaillerons sur des **segments** de $\mathbf{R}$. Sauf exercice très spécifique, il n'y aura pas d'intervalles infinis ou ouverts cette année (car alors on n'est pas sûr que l'aire sous la courbe soit finie, ni même définie).

A Définition de l'intégrale

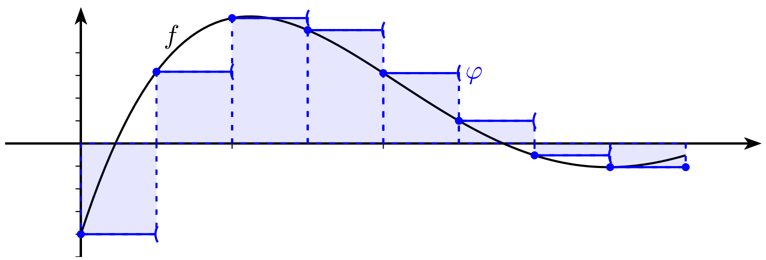
Définition 2.1 *(Sommes de Riemann)*

Soit f continue sur $[a,b]$,
On définit la n-ième somme de Riemann de f sur $[a,b]$ par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad \text{avec } \forall k \in [\![0;n-1]\!], \quad x_k = a + \frac{b-a}{n}k.$$

En particulier, pour $[a,b]=[0,1]$

$$R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$



Explications
La somme de Riemann est l'aire sous la courbe de la fonction « en escalier » φ definie à partir de f avec un pas de longueur $\frac{1}{n}$.

Remarque : On pourrait également définir l'intégrale à partir des sommes $\widetilde{R_n}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. La différence avec les sommes définies plus haut est alors

$$R_n(f) - \widetilde{R_n}(f) = \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Plus la largeur des rectangles diminue, plus la somme de Riemann s'approche de l'aire sous la courbe. C'est le principe même de construction de l'intégrale de Riemann :

Théorème 2.2

Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}))$, la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))$ converge dans $\mathbf{R}$. On appelle **intégrale** de f sur $[a,b]$ cette limite que l'on note

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f.$$

Preuve
Admis. ■

Exercice
Si f est **croissante** alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, R_n(f) \leqslant \int_a^b f \leqslant R_n(f) + \frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right).$$

Solution :

Exemple

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$.

Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

On admettra provisoirement le lien primitive intégrale : à savoir que les notations $\int_a^b f$ désignent le même nombre, que l'on parle de primitive ou d'intégrale.

Solution :

B Propriétés de l'intégrale

Théorème 2.3 *(Propriétés de l'intégrale)*

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ et $c \in [a,b]$.

1. *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. *Relation de Chasles*[1] *:* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. *Inégalité triangulaire :* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
4. *Positivité :* Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
5. *Positivité stricte :* Si $f > 0$ sur I sauf en un nombre fini de points et si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$.
6. *Comparaison :* si $f \leqslant g$, et $a \leqslant b$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Preuve

Ce sont les propriétés sur les sommes de Riemann étendues par passage à la limite (il y a juste un petit travail pour la stricte positivité car le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges). ■

Remarque : On pourrait aussi utiliser ces propriétés pour donner une définition équivalente de l'intégrale sans passer par les sommes de Riemann.

La définition est plus *simple*, mais aussi plus abstraite :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$,

On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par l'unique réel $\int_a^b f$ tel que l'intégrale vérifie :

1. *linéarité :* $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. *positivité :* Si $f \geqslant 0$ (et si $a \leqslant b$), alors $\int_a^b f \geqslant 0$.
3. $\int_a^b 1 = b - a$.
4. *relation de Chasles :* si $c \in [a,b]$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b$.

Théorème 2.4

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R}_+)$ à valeurs **positives**,

$$\int_a^b f = 0 \quad \text{si et seulement si } f \text{ est nulle sur } [a,b].$$

1. La relation est également valable si $c \notin [a,b]$, quand f est continue « jusqu'à » c.

Remarque : Le résultat reste évidemment valable si f est continue et de signe constant.

Preuve

Si f non nulle, alors $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$.
Or f continue sur $[a,b]$, donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [c-\eta, c+\eta], |f(x)-f(c)| \leqslant \frac{1}{2}f(c)$
.
(on prend $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $[c-\eta, c+\eta] \subset [a,b]$. Si c était une borne de $[a,b]$, alors par continuité, on pourrait prendre un autre c suffisamment proche dans l'ouvert $]a,b[$ tel que $f(c) > 0$).
Donc pour $x \in [c-\eta, c+\eta]$, $f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(c)$:
par comparaison, $\int_{c-\eta}^{c+\eta} f \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} \frac{1}{2}f(c)\,\mathrm{d}t \geqslant \eta f(c) > 0$.
Or f positive sur $[a,b]$, donc $\int_a^{c-\eta} f \geqslant 0$ et $\int_{c+\eta}^b f \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
Donc $\int_a^b f = \int_a^{c-\eta} f + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f + \int_{c+\eta}^b f \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} f > 0$.
C'est absurde, donc f est identiquement nulle sur $[a,b]$. ∎

Théorème 2.5 *(Majoration d'un intégrale)*

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$,

$$\left|\int_a^b gf\right| \leqslant \left(\sup_{[a,b]}|g|\right) \times \int_a^b |f|.$$

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)\sup_{[a,b]}|f|.$$

Preuve

1. d'après l'inégalité triangulaire, $\left|\int_a^b gf\right| \leqslant \int_a^b |f\,g|$.
   D'après le théorème des bornes atteintes appliqué à g sur le segment $[a,b]$ (car g continue) : $\sup_{[a,b]}|g|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a,b], |(f\,g)(x)| \leqslant \sup_{[a,b]}|g| \cdot |f(x)|$.
   La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors de conclure.
2. Idem, d'après l'inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.
   D'après le théorème des bornes atteintes appliqué sur le segment $[a,b]$ (car f continue) : $\sup_{[a,b]}|f|$ est bien défini. Donc $\forall x \in [a,b], |f(x)| \leqslant \sup_{[a,b]}|f|$.
   La croissance de l'intégrale et sa linéarité permettent alors d'écrire
   $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \sup_{[a,b]}|f| \cdot \int_a^b 1 = (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$.

∎

Explications

On peut interpréter facilement ces inégalités sur les sommes finies (cela est justifié par la définition de l'intégrale à partir des fonctions en escalier) :
Si, au lieu de f, g, on choisit des familles $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k \mu_k| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\mu_i| \leqslant \left(\max_{i \in [\![1,n]\!]} |\mu_i|\right) \sum_{k=1}^n |\lambda_k|.$$

De même,

$$\left|\sum_{k=1}^n \lambda_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |\lambda_k \mu_k| \leqslant \sum_{k=1}^n \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i| \leqslant n \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i|.$$

Théorème 2.6 *(Valeur moyenne d'une fonction)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$, $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c).$$

$f(c)$ est appelé la **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$.

Explications

Si on interprète sur les sommes finies, cela correspond à la valeur moyenne : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \lambda_k$.
Dans le cas discret, il n'y a aucune raison qu'il soit atteint par un des λ_k, par contre, les valeurs de λ_k ne peuvent pas être toutes plus grandes ou toutes plus petites que la moyenne : il y en a des plus grandes et des plus petites. La différence avec les applications continues est que nous ne disposons pas de théorème des valeurs intermédiaires pour atteindre la moyenne.

Preuve

Si on pose $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$, et $g : x \mapsto f(x) - m$, alors $\displaystyle\int_a^b g = 0$.
Si g était de signe constant, par exemple positive et ne s'annulait pas, alors $\int_a^b g > 0$. C'est absurde.
Donc g s'annule (ou change de signe, auquel cas elle s'annule d'après le théorème des valeurs intérmédiaires). Donc $\exists c \in]a,b[$ tel que $g(c) = 0$. Donc $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f = f(c)$. ∎

Exemple *(classique)*

Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$ tel que $\int_a^b f = 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

⚠ En général on ne peut pas intervertir entre les limites et le signe intégral :

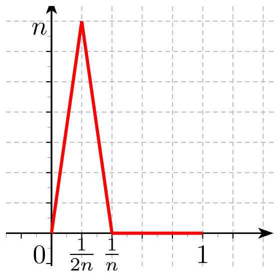
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

Par exemple si on pose

$$\forall n \geqslant 1, f_n(x) : x \mapsto \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^2(x - \frac{1}{2n}) + n & \text{si } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\forall x \in [0,1], \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$,

mais $\forall n \in \mathbf{N}^* \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.



3 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 3.1 *(Théorème fondamental de l'analyse)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$,

$$x \mapsto \int_a^x f \ \text{ est la seule primitive de } f \text{ sur } [a,b] \text{ qui s'annule en } a$$

Autre formulation :

$$x \mapsto \int_a^x f \quad \text{ est dérivable sur } [a,b] \text{ de dérivée } f.$$

Ce théorème assure l'existence d'une primitive (et donc d'une infinité) pour toute fonction continue sur un segment et il en donne une expression.

Preuve

On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, et on calcule son taux d'accroissement :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f\right) \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f\right) - f(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{(in. triangulaire)} \end{aligned}$$

Si $h < 0$, on inverse les bornes de l'intégrale pour l'inégalité triangulaire, mais le raisonnement reste identique.
Or f est continue en x, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $|t - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
Donc pour $|h| \leqslant \eta$,

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin $\int_a^a f = 0$.
Pour l'unicité, la démonstration a déjà été vue lors du chapitre sur les primitives. ■

Corollaire 3.2

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{R})$,

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

⚠ Soyez bien attentif à la différence entre le théorème fondamental 3.1 et son corollaire 3.2.
Dans le théorème 3.1,

- **hypothèse :** on exige que la fonction soit continue
- **conclusions :** on obtient que
  - L'intégrale est dérivable,
  - Sa dérivée est une valeur : $f(x)$. Cela ne dépend pas du point a, car la dérivée est une notion *locale*, sans mémoire de ce qui se passe plus loin.

En revanche, dans le corollaire 3.2,

- **hypothèse :** on exige que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ et pas seulement continue. On calcule l'intégrale de la dérivée, c'est donc la dérivée qui doit être continue et pas seulement la fonction.
- **conclusion :** on obtient la valeur de l'intégrale, c'est une différence. Elle dépend deux deux bornes car l'intégrale est une surface qui dépend à la fois du point de départ et de celui d'arrivée.

Corollaire 3.3

Si f est continue sur $[a,b]$, alors f admet une primitive F sur $[a,b]$ et $\forall (x,y) \in [a,b]^2$,

$$\int_x^y f = F(y) - F(x)$$

Exemple

$f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, sa dérivée est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$

On en déduit que $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée est $x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{-x^4} - \mathrm{e}^{-x^2}$.