

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE EN DIMENSIONS 2 ET 3

« Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. »
Inscription au fronton de l'Académie de Platon

L'objet de ces courtes révisions de géométrie est d'offrir des objets faciles à visualiser qui illustreront les prochains chapitres sur les espaces vectoriels et les applications linéaires.

Les objets considérés ne sont que des cas particuliers des espaces vectoriels qui seront vus au chapitre suivant.

Notations : Dans le chapitre, on désignera habituellement par \mathcal{P} le plan muni d'un repère orthonormal, et par \mathcal{E} l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormal.

1 VECTEURS

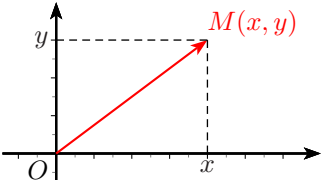
Définition 1.1 (*Vecteurs et opérations*)

Dans le plan	Dans l'espace
<p><i>Définition :</i></p> <p>Un vecteur de \mathbf{R}^2 est un couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$</p> <p><i>Opérations sur les vecteurs :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, alors $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$ • Si $\vec{u} = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda \vec{u} = (\lambda x, \lambda y)$ <p>Le vecteur opposé à \vec{u} est $-\vec{u} = (-x, -y)$.</p>	<p>Un vecteur de \mathbf{R}^3 est un triplet $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$, alors $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$ • Si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda \vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ <p>Le vecteur opposé à \vec{u} est $-\vec{u} = (-x, -y, -z)$.</p>

Les opérations se font simplement coordonnée par coordonnée : on ajoute les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles.

2 REPRÉSENTATION EUCLIDIENNE

Théorème 2.1

Dans le plan	Dans l'espace
<ul style="list-style-type: none"> On munit le plan, ou l'espace, d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$	<ul style="list-style-type: none"> On munit l'espace d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$
<ul style="list-style-type: none"> Tout vecteur se décompose de façon unique en fonction des <i>vecteurs de base</i> : Si $\vec{u} = (x, y)$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$	<ul style="list-style-type: none"> Tout vecteur se décompose de façon unique en fonction des <i>vecteurs de base</i> : Si $\vec{u} = (x, y, z)$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
<ul style="list-style-type: none"> À chaque vecteur, on associe un unique point (et réciproquement) : $\begin{cases} \mathbf{R}^2 & \rightarrow \mathcal{P} \\ (x, y) & \mapsto M(x, y) \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> À chaque vecteur, on associe un unique point (et réciproquement) : $\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \rightarrow \mathcal{E} \\ (x, y, z) & \mapsto M(x, y, z) \end{cases}$
Si M est un point du plan (ou de l'espace), on note \vec{OM} le vecteur qui lui est associé.	
	

Explications

On peut identifier chaque vecteur à un unique point du plan (et réciproquement). (x, y) sera tantôt interprété comme un vecteur ou comme un point selon les situations (à condition d'avoir précisé au préalable le repère dans lequel on travaille).

Approfondissement :

De façon plus précise, on établit une bijection entre les vecteurs de \mathbf{R}^n et les points de l'espace correspondant.

Cette bijection dépend du choix du repère. Si on avait choisi un autre repère, par exemple $\vec{i} = (1, 1)$ et $\vec{j} = (-1, 1)$, alors on aurait décomposé les vecteurs différemment en fonction de \vec{i} et \vec{j} et on aurait abouti à une représentation euclidienne différente. Ainsi, avec les deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} donnés ci-dessus, le vecteur (x, y) correspondrait au point $M(\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2})$ car $(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{-x+y}{2}(-1, 1) = \frac{x+y}{2}\vec{i} + \frac{-x+y}{2}\vec{j}$.

Cette question du choix des vecteurs de base dans le repère sera une question cruciale pour les espaces vectoriels.

Définition 2.2

À tout couple de points (A, B) , on associe un unique vecteur \vec{AB} :

Dans le plan	Dans l'espace
$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.	$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.
Lorsque $\vec{AB} = \vec{CD}$, on dit que \vec{AB} et \vec{CD} sont deux représentants d'un même vecteur.	

Explications

Ces coordonnées correspondent à « la coordonnée du point d'arrivée *moins* la coordonnée du point de départ ». C'est comme si on prenait A comme origine du repère au lieu de O .

On remarque que cette définition est cohérente avec le théorème 2.1 : si on prend $A = O(0, 0)$, alors on obtient $\vec{OB} = (x_B - 0, y_B - 0) = (x_B, y_B)$.

Théorème 2.3

Tout vecteur \vec{u} est associé à une unique **translation** $t_{\vec{u}}$:

Dans le plan	Dans l'espace
Pour $\vec{u} = (a, b)$,	Pour $\vec{u} = (a, b, c)$,
$t_{\vec{u}} : \begin{cases} \mathcal{P} & \rightarrow \mathcal{P} \\ A(x, y) & \mapsto A'(x + a, y + b) \end{cases}$	$t_{\vec{u}} : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow \mathcal{E} \\ A(x, y, z) & \mapsto A'(x + a, y + b, z + c) \end{cases}$

Réciproquement, à toute translation, on peut associer un unique vecteur.

Explications

On peut interpréter la *flèche* du vecteur ainsi : elle translate du point de départ vers le point d'arrivée.

Tous les couples de points correspondant à la même translation sont donc identifiés au même vecteur.

Ce théorème définit une bijection entre l'ensemble des vecteurs et l'ensemble des translations.

Exemple

Soient $A(2, 3)$ et $B(5, 4)$.

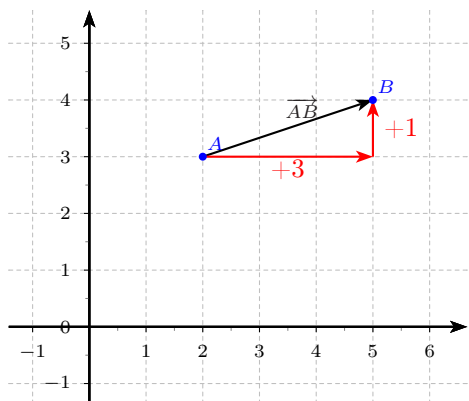
Le vecteur \vec{AB} a donc pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A) = (3; 1)$.

Ces coordonnées traduisent la transformation qui passe du point A au point B .

En effet, si on ajoute ces coordonnées à celles de A , on obtient le point B .

$$x_A + (x_B - x_A) = x_A + x_B - x_A = x_B$$

$$y_A + (y_B - y_A) = y_A + y_B - y_A = y_B$$



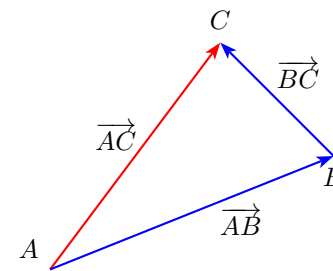
Si $C = (-1, 0)$, quelles doivent être les coordonnées de $D(x_D, y_D)$ pour que $\vec{AB} = \vec{CD}$?

Solution :

Théorème 2.4 (*Relation de Chasles*)

Si A, B et C sont trois points quelconques, alors

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$



En allant de A à C , je peux passer par B et y faire une petite pause...

Preuve

C'est immédiat avec les coordonnées.

Par exemple, si on travaille dans le plan, alors on peut noter $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} &= (x_B - x_A, y_B - y_A) + (x_C - x_B, y_C - y_B) \\ &= (x_B - x_A + x_C - x_B, y_B - y_A + y_C - y_B) \\ &= (x_C - x_A, y_C - y_A) = \vec{AC}. \end{aligned}$$



3 ORTHOGONALITÉ

Définition 3.1 (*Produit scalaire*)

Dans le plan	Dans l'espace
Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs de \mathbf{R}^2 .	Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de \mathbf{R}^3 .
On définit le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} par	On définit le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} par
$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Remarque : Le produit scalaire est à valeurs dans \mathbf{R} , c'est un réel et non un vecteur.

Définition 3.2 (*Orthogonalité*)

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dit **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

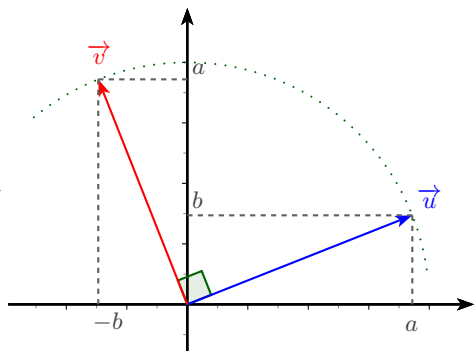
Exemple

Montrer que le seul vecteur qui soit orthogonal à tous les vecteurs est le vecteur nul.

Solution :

Méthode (Trouver un vecteur orthogonal dans le plan)

Soit $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur du plan.
Le vecteur $\vec{v} = (-b, a)$ lui est orthogonal



Méthode (Trouver des vecteurs orthogonaux dans l'espace)

Soit $\vec{u} = (a, b, c)$ un vecteur du plan.
Les vecteurs $\vec{v} = (-b, a, 0)$ et $\vec{v}' = (0, -c, b)$ et $\vec{v}'' = (-c, 0, a)$ lui sont orthogonaux.

Preuve

Il suffit de faire le calcul. ■

On remarque que dans l'espace à trois dimensions, si \vec{u} n'est pas nul, alors les vecteurs orthogonaux à \vec{u} forment un plan que l'on note \vec{u}^\perp .

Ainsi, les trois vecteurs \vec{v} , \vec{v}' et \vec{v}'' sont coplanaires : on peut en prendre 2 non colinéaires pour définir un repère de ce plan \vec{u}^\perp et le troisième vecteur s'écrit alors en fonction des deux autres.

Par exemple, lorsque $b \neq 0$, les vecteurs \vec{v} et \vec{v}' ne sont pas colinéaires et peuvent donc former un repère du plan \vec{u}^\perp . \vec{v}'' peut se décomposer suivant \vec{v} et \vec{v}' :

$$\vec{v}'' = \frac{c}{b} \cdot \vec{v} + \frac{a}{b} \cdot \vec{v}'$$

(si $b = 0$, \vec{v} et \vec{v}' sont colinéaires et ne forment donc pas une base du plan \vec{u}^\perp . Mais on peut alors prendre \vec{v} et \vec{v}'' ou \vec{v}' et \vec{v}'' , selon les valeurs de a et c , comme repère du plan.)

Conclusion : si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors tous les vecteurs orthogonaux à \vec{u} peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois là.

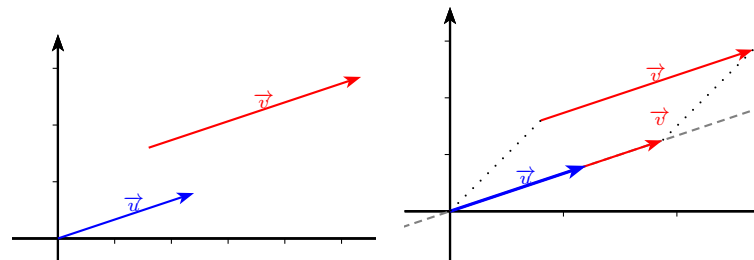
4 DROITES DANS LE PLAN ET L'ESPACE

Définition 4.1 (Colinéarité)

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** s'ils sont proportionnels, c'est-à-dire, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Explications

Les deux vecteurs placés à l'origine sont sur la même ligne, ou leurs représentants sont parallèles.



Exemple

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors les vecteurs orthogonaux à \vec{u} sont exactement tous les vecteurs colinéaires à \vec{v} . Nous verrons plus loin que c'est une façon de décrire une droite (propriété 4.4).

Définition 4.2 (Droites du plan ou de l'espace)

Une droite (d) du plan \mathcal{P} est définie à partir d'un vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ non nul et un point $A(x_0, y_0)$ par lequel elle passe.

La droite est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{u}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

On note souvent (AB) : la droite de vecteur directeur \vec{AB} passant par A .

Dans l'espace à trois dimension, on rajoute une troisième coordonnée z pour le point et le vecteur.

Explications

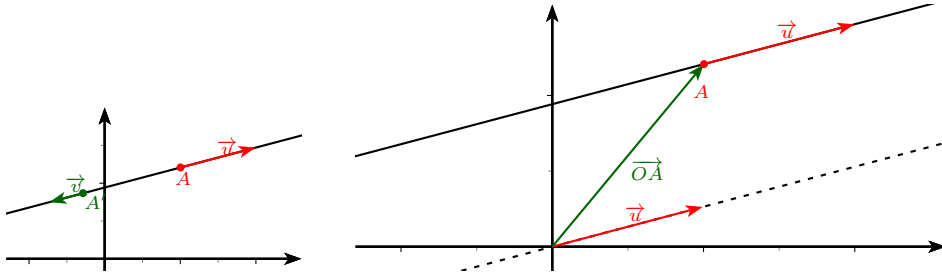
Le vecteur \vec{u} donne la direction de la droite et le point A sert à la traduire par rapport à l'origine.

On voit que l'écriture n'est pas unique : on peut prendre différents vecteurs, et différents points pour décrire une même droite. En effet, on peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite. Et \vec{u} peut être remplacé par tout vecteur non nul qui lui est colinéaire (qui donne la même direction).

Cette définition doit rappeler les solutions des systèmes linéaires avec second membre. Lorsque la solution est une droite affine, elle s'écrit sous la forme

$$(x_0, y_0, \dots) + \text{Vect}(\alpha, \beta, \dots).$$

Le premier vecteur donne les coordonnées du point A et le second vecteur indique la direction de la droite.



Explications

Ce sont l'ensemble des points situés entre A et B .

Intuitivement : on écrit un point M du segment comme le point A auquel on rajoute une portion de \overrightarrow{AB} :

Propriété 4.3 (Représentation paramétrique d'une droite du plan)

Une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ et passant par le point $A(x_A, y_A)$ a pour équation :

$$(d) \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbf{R}.$$

Remarque : Cette représentation n'est pas unique.

Propriété 4.4 (Équation implicite d'une droite du plan)

Une droite (d) du plan est parfaitement décrite par un point $A(x_A, y_A)$ par lequel elle passe et un vecteur orthogonal $\vec{v} = (a, b)$.

L'équation de cette droite est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Réciproquement, une équation de la forme $ax + by + c = 0$ désigne une droite du plan.

On parle de **représentation cartésienne**.

Remarque : On remarque que les expressions $-x_A$ et $-y_A$ correspondent à un changement d'origine du repère : au lieu de passer par $O(0, 0)$, la droite passe par $A(x_A, y_A)$.

Preuve

C'est l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp \vec{v}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0$. ■

Exemple

Soit l'équation d'une droite dans le plan : $(d) : 5x + 3y = 4$.

1. Trouver un vecteur orthogonal à la droite (d) et un point par lequel passe (d) .
2. En déduire une équation paramétrique de (d) .

Solution :

Exemple

Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$(d) : \begin{cases} x = 7t + 5 \\ y = -t + 1 \end{cases}.$$

1. Trouver un vecteur directeur à la droite (d) et un point par lequel passe (d) .
2. En déduire une équation cartésienne de (d) .

Solution :

Exemple

Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(2, 0)$ et $B(-4, 3)$.

Solution :

Propriété 4.5 (*Représentation paramétrique d'une droite de l'espace*)

Une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ a pour équation :

$$(d) \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \quad \text{pour } t \in \mathbf{R}.$$

Propriété 4.6 (*Équation implicite d'une droite de l'espace*)

L'équation d'une droite de l'espace est donnée par deux vecteurs non colinéaires qui lui sont orthogonaux.

$$\begin{cases} a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ a'(x - x_A) + b'(y - y_A) + c'(z - z_A) = 0 \end{cases}$$

On parle de **représentation cartésienne**.

Explications

On peut décrire une droite

- par l'intersection de deux plans.

Nous avons vu au moment des systèmes que dans un espace de 3, les solutions d'une équation (à trois inconnues) désignent un espace de dimension $2 = 3 - 1$.

Ainsi chaque équation désigne un plan. Si ces deux plans ne sont pas confondus ou parallèles (équations proportionnelles), alors ils sont sécants et leur intersection est une droite.

- par orthogonalité à deux vecteurs.

Une droite est décrite à partir de deux vecteurs non colinéaires : deux vecteurs non colinéaires désignent un plan. Et la droite décrite est celle qui est orthogonale à ce plan et passe par un point A (second membre).

Ainsi, la propriété ci-dessus, peut être interprétée soit comme l'intersection de deux plans (chaque équation désigne un plan), soit comme la donnée de deux vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') qui doivent tous deux être orthogonaux à $\vec{AM} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A)$.

Bien sûr, ces deux interprétations sont équivalentes (ce sont les mêmes équations).

5 PLANS DANS L'ESPACE

Définition 5.1 (*Plans dans l'espace*)

Un plan \mathcal{P} de l'espace \mathcal{E} est défini à partir de deux vecteurs $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ non colinéaires qui donnent sa direction et d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$ qu'il contient.

Le plan est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{u} + t'\vec{v}$ avec $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.

Remarque : Le choix de A et du vecteur \vec{u} n'est pas unique. On peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite, et \vec{u} et \vec{v} par deux autres vecteurs non colinéaires du plans.

Explications

A et les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} donnent trois points non alignés de l'espace. Cela permet de définir un plan. Le plan est décrit par deux réels $(t, t') \in \mathbf{R}^2$, il s'agit bien d'un espace de dimension 2. Les deux vecteurs donnent la *direction* du plan, et le point A permet de le translater par rapport à l'origine. C'est exactement la même logique que pour la droite que nous avons déjà vu.

Définition 5.2 (*Représentation paramétrique d'un plan*)

Un plan \mathcal{P} de vecteurs directeurs $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ et passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ a pour équation :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \quad \text{pour } (t, t') \in \mathbf{R}^2.$$

Remarque : Cette représentation n'est pas unique.

Propriété 5.3 (*Équation implicite d'un plan*)

Un plan (\mathcal{P}) du plan est parfaitement décrit par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ par lequel il passe et un vecteur orthogonal $\vec{w} = (a, b, c)$.

L'équation de ce plan est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de l'espace de la forme $ax + by + cz + d = 0$ désigne un plan.

On parle de **représentation cartésienne**.

Preuve

Ce sont simplement l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp \vec{w}$. ■

Exemple

Soit l'équation d'un plan : $\mathcal{P} : x + 3y + 2z = 4$.

1. Trouver un vecteur orthogonal au plan \mathcal{P} et un point par lequel passe \mathcal{P} .
2. En déduire une équation paramétrique de \mathcal{P} .

Solution :

Exemple

Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x &= 2t + 3t' - 5 \\ y &= 4t - t' + 1 \\ z &= t - 1 \end{cases} .$$

1. Trouver deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} et un point par lequel il passe.
2. Donner une équation cartésienne de (d) .
3. En déduire un vecteur orthogonal à \mathcal{P} .

Solution :

Exemple

Donner une équation paramétrique du plan qui passe par les points $A(1, 1, 2)$, $B(0, 1, -1)$ et $C(1, -1, -1)$.

Solution :

Exemple

Donner une équation cartésienne du plan qui passe par les points $A(0, 2, -1)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(1, 1, 1)$.

Solution :