Récurrence et suites usuelles

Ce chapitre est l'occasion d'aborder le principe de récurrence et de donner quelques formules pour l'étude de suites récurrentes linéaires simples que nous serons amenés à rencontrer régulièrement en exercice.
Les aspects sommatoires évoqués ici, ou l'écriture d'une racine complexe sous forme polaire sont indiqués par soucis d'exhaustivité, mais ces notions seront revues dans les chapitres correspondants (sommes et produits ou nombres complexes).

1 Principe de récurrence

C'est à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle que l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$ est enfin construit rigoureusement par Péano. $\mathbf{N}$ est ainsi construit avec 5 axiomes[1] (règles de bases) :

1. $\mathbf{N}$ contient un élément noté 0.
2. Tout entier naturel n à un unique successeur.
3. Aucun élément de $\mathbf{N}$, n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
5. Si un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors il est égal à $\mathbf{N}$.

Le principe de récurrence vu en terminale découle simplement du cinquième axiome. De façon plus imagée : on peut représenter $\mathbf{N}$ par une échelle infinie. Les axiomes précédents s'écrivent alors ainsi :

1. L'échelle contient un barreau noté 0.
2. Chaque barreau à une unique successeur : l'échelle est infinie (existence du successeur) et ne se sépare jamais en deux ou davantage (unicité du successeur).
3. Aucun barreau de l'échelle n'a 0 pour successeur : 0 est le barreau le plus bas de l'échelle, il n'y en a pas avant lui.
4. Deux barreaux qui ont le même successeur sont égaux : ce n'est pas un escabeau.
5. Si je prends une partie de l'échelle qui contient le barreau 0, et pour chaque barreau de cette partie, elle contient le barreau qui suit, alors j'ai toute l'échelle. En d'autre termes, si je pars du barreau 0 et qu'à chaque barreau, je sais aller au barreau suivant, alors je peux monter toute l'échelle.

C'est cette dernière « *opération* » qui constitue la récurrence : pour monter une échelle, il suffit de trouver le barreau du bas, et de savoir passer d'un barreau à son successeur. Si on se base sur l'axiomatique de Péano, le principe de récurrence n'est pas un théorème à prouver car il fait partie de la définition même de $\mathbf{N}$.

Principe 1.1 *(Récurrence simple)*

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion logique qui dépend de l'entier n.

Si 1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 2. Pour $n \in \mathbf{N}$ **quelconque** fixé, $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarques
• On peut réaliser des récurrences *finies* qui s'arrêtent à un certain rang N.
• On peut faire commencer la récurrence à 1, 2 ou à tout autre entier.
⚠ Ne pas oublier d'initialiser la récurrence, et de l'initialiser au **bon indice** : si la propriété doit être vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, il faut initialiser la récurrence à $n = 0$ (et non pas $n = 1$).

1. Il existe d'autres axiomatiques équivalentes pour définir $\mathbf{N}$, mais celle-ci est sans doute la plus intuitive.

Méthode *(Rédaction de la récurrence)*

Annonce : Prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Pour tout entier naturel n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « ... ».
Initialisation : On vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Pour $n \geqslant 0$ **quelconque fixé**, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
On montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.
Conclusion.

On utilise ce mode de raisonnement lorsque la propriété à démontrer dépend de n. Par exemple, le raisonnement par récurrence apparaît souvent avec les suites lorsque le terme u_{n+1} dépend du terme précédent u_n. Ce sont les suites définies par récurrence (il faut aussi définir à part le premier terme u_0).

Exemple

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Montrer que la suite est constante égale à 1.

Solution :
Prouvons le résultat par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 1$ ».
Initialisation : $u_0 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_n = 1$.
Alors $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$: (u_n) est constante égale à 1.

Exemple *(Le paradoxe de la boîte de crayons de couleur)*

On propose de montrer que dans une boîte de crayons de couleur, tous les crayons sont nécessairement de la même couleur.
Pour cela, faisons une récurrence sur le nombre de crayons que contient la boîte.
Rédaction de la récurrence :
Pour tout entier naturel non nul n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par :
$\mathcal{P}(n)$: « Si une boîte de crayons de couleur contient exactement n crayons, alors ils sont tous de la même couleur. »
Initialisation : pour $n = 1$, la propriété est évidemment vraie. En effet, si une boîte ne contient qu'un seul crayon de couleur, alors tous les crayons de la boîte sont de la même couleur (il n'y en a qu'un seul).
Hérédité : on suppose que cette propriété est vraie à un rang $n \geqslant 1$ quelconque fixé et on démontre qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.
Supposons donc une boîte de $n+1$ crayons de couleur.
• Prenons les n premiers ; on peut en former une boîte et d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont tous de la même couleur.
• Pour la même raison, les n derniers sont également tous de la même couleur.
Le crayon de couleur situé au milieu de la boîte fait tantôt partie des n premiers et tantôt des n derniers. Ainsi, il est de la même couleur que les n premiers et que les n derniers : tous sont de la même couleur que lui. Cela montre donc bien que tous les crayons de la boîte sont de la même couleur.
Conclusion : par principe de récurrence, quel que soit le nombre de crayons dans une boîte, ils sont tous de la même couleur. Où est l'erreur ?

Solution :
L'hérédité n'est valable que pour $n \geqslant 2$. En effet, il faut qu'il y ait au moins $n+1 = 3$ crayons dans la boîte pour que le raisonnement soit valable. Avec 2 crayon, on n'a pas de crayon commun aux deux sous boîtes qui ne contiennent chacune qu'un seul crayon.

Propriété 1.2 *(Récurrence simple)*

La récurrence simple se formalise ainsi, pour $\mathcal{P}(n)$, une propriété logique définie pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\Big(\mathcal{P}(0) \wedge (\forall n \in \mathbf{N},\, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))\Big) \Rightarrow \Big(\forall n \in \mathbf{N},\, \mathcal{P}(n)\Big).$$

Corollaire 1.3

Toute partie non vide majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément.

Preuve

Par récurrence : Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « toute partie A non vide de $\mathbf{N}$ majorée par n admet un plus grand élément. »
Initialisation : pour $n = 0$, si la partie A est majorée par 0 et non vide, alors elle est réduite au singleton $\{0\}$.
Ainsi, 0 est le plus grand élément de A.
Hérédité : supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbf{N}$, et considérons une partie A non vide de $\mathbf{N}$ et majorée par $n+1$.
Alors si $n+1 \notin A$, la partie est majorée par n et on applique l'hypothèse de récurrence.
si $n+1 \in A$, alors $n+1$ est le plus grand é lément de A.
Ceci prouve l'hérédité.
Par principe de récurrence, on a donc montré que toute partie non vide majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément que l'on appelle sont maximum. ■

Propriété 1.4 *(Équivalence avec le bon ordre sur $\mathbf{N}$.)*

Le principe de récurrence est équivalent à l'assertion suivante :
Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément (on dit que $\mathbf{N}$ est bien ordonné).

Preuve

- *(sens direct)* Soit A une partie non vide de $\mathbf{N}$.
  On note M l'ensemble des minorants de A. M est alors une partie non vide ($0 \in M$) majorée de $\mathbf{N}$ (elle est majorée par tout élément de A non vide).
  Ainsi M admet un plus grand élément $n_0 \in \mathbf{N}$.
  Si, par l'absurde, $n_0 \notin A$, alors $n_0 + 1$ serait également un minorant de A et n_0 ne serait donc pas le plus grand élément de M ce qui est absurde.
  Donc $n_0 \in A$ et c'est le plus petit élément de A.
- *(sens réciproque)* Ici, on suppose que $\mathbf{N}$ est bien ordonné, et on cherche à montrer qu'alors le principe de récurrence est vrai.
  Soit $\mathcal{P}$ une propriété vraie au rang 0 et qui vérifie l'hérédité.
  Supposons par l'absurde que $\mathcal{P}$ ne soit pas vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Alors l'ensemble des entiers pour lesquels $\mathcal{P}$ est fausse forme une partie non vide de $\mathbf{N}$.
Cette partie admet donc un plus petit élément n_0 (qui n'est pas 0 d'après l'initialisation). $n_0 \geqslant 1$, donc $n_0 - 1 \in \mathbf{N}$ et $\mathcal{P}(n_0 - 1)$ est vraie.
Or d'après l'hérédité $\mathcal{P}(n_0 - 1) \Rightarrow \mathcal{P}(n_0)$.
C'est absurde. Donc la propriété est bien vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ ce qui prouve le principe de récurrence.

■

Remarque : Sur tout ensemble muni d'un bon ordre, on peut donc utiliser ce principe de récurrence, ce qui n'est pas le cas de $\mathbf{R}$.

Exemple

Montrer que « tout entier positif est intéressant ».

Solution :

Raisonnons par l'absurde et supposons le contraire. Alors, l'ensemble des entiers non-intéressants est non vide et il contient donc un plus petit élément.
Mais, cet entier est alors très intéressant ! C'est absurde.
Donc tous les entiers positifs sont intéressants.

Théorème 1.5 *(Récurrence double)*

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion logique qui dépend de l'entier n.

Si 1. $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
2. pour $n \in \mathbf{N}$ **quelconque** fixé, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies implique $\mathcal{P}(n+2)$ vraie.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Formellement :

$$\Big(\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \big(\forall n \in \mathbf{N},\, \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\big)\Big) \Rightarrow \Big(\forall n \in \mathbf{N},\, \mathcal{P}(n)\Big).$$

Remarque : Cette fois-ci, c'est un théorème que l'on démontre à partir du principe de récurrence simple.

Preuve

Récurrence simple sur la propriété $\mathscr{Q}(n) =$« $\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)$ ». ■

Explications

La récurrence double est une récurrence pour laquelle l'assertion $\mathcal{P}(n)$ ne dépend pas seulement du terme précédent, mais de deux termes précédents $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n-2)$: on s'appuie sur les deux barreaux précédents pour monter sur le suivant. Cela suppose donc de faire une initialisation sur les deux premiers barreaux.
La récurrence double est surtout utile avec les suites à récurrence double pour lesquelles u_{n+2} dépend de u_n et de u_{n+1}. Il va sans dire que ce principe peut se généraliser sans problème à 3, 4 ou plus d'indices successifs.

Exemple

On définit la suite de Fibonacci par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N},\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que tous les termes de la suite de Fibonacci sont dans $\mathbf{N}$.

Solution :

La suite est définie par une relation de récurrence double. On démontre donc la propriété par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in \mathbf{N}$ ».
Initialisation : $u_0 = 1 \in \mathbf{N}$ et $u_1 = 1 \in \mathbf{N}$, donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.
Alors $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ est la somme de deux entiers naturels, c'est donc aussi un entier naturel. $u_{n+2} \in \mathbf{N}$, donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence double : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in \mathbf{N}$.

Si pour prouver $\mathcal{P}(n)$ on a besoin de tous les termes qui précèdent, on utilise alors la récurrence forte :

Théorème 1.6 *(Récurrence forte)*

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion logique qui dépend de l'entier n.

Si 1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$ **quelconque** fixé, le fait que les assertions $\mathcal{P}(k)$ soient vraies pour tous les $k \leqslant n$ implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Formellement :

$$\Big(\mathcal{P}(0) \wedge \big[\forall n \in \mathbf{N},\, \big(\forall k \leqslant n,\, \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big]\Big) \Rightarrow \Big(\forall n \in \mathbf{N},\, \mathcal{P}(n)\Big).$$

Preuve

C'est simplement le principe de récurrence appliqué à la propriété $(\forall k \leqslant n,\, \mathcal{P}(k))$. ■

Remarque : d'un point de vue purement formel, on peut même écrire

$$\Big(\forall n \in \mathbf{N},\, \big(\forall k < n,\, \mathcal{P}(k)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n)\Big) \Rightarrow \Big(\forall n \in \mathbf{N},\, \mathcal{P}(n)\Big).$$

En effet, pour $n = 0$, le contraire de $(\forall k < n,\, \mathcal{P}(k))$ est $(\exists k < n,\, \neg\mathcal{P}(k))$. Or, $\{k < 0\}$ est vide, donc il ne peut contenir aucun élément vérifiant $\mathcal{P}(k)$.
Ainsi, pour $n = 0$, $(\forall k < n,\, \mathcal{P}(k))$ est vraie et donc $\mathcal{P}(0)$ l'est aussi par implication.
On remarquera l'usage d'une inégalité stricte dans la premisse contrairement à la formulation dans le théorème.

Exemple *(Arithmétique)*

1. Montrer que tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un nombre premier comme diviseur.
   On rappelle qu'un nombre naturel est premier si il admet exactement deux diviseurs entiers positifs distincts : 1 et lui-même.

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Solution :

Nous reverrons cela dans le chapitre d'arithmétique. On remarque au préalable que 1 n'est pas un nombre premier car ses diviseurs 1 et lui-même ne sont pas distincts.

1. On procède par récurrence forte sur l'entier naturel $n \geqslant 2$.
   Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $\mathcal{P}_n$: « n admet un diviseur premier. »
   Initialisation : 2 est premier et se divise lui-même.
   Hérédité : Pour $n \geqslant 2$, supposons $\mathcal{P}_k$ pour tout $k \leqslant n$, puis raisonnons par disjonction des cas suivant $n+1$:
   Si $n+1$ est premier, alors il admet un diviseur premier (lui-même), sinon, il admet un diviseur d avec $2 \leqslant d \leqslant n$.
   Or, par hypothèse de récurrence forte, d admet un diviseur premier, qui est donc aussi diviseur premier de $n+1$.
2. On procède par l'absurde et on suppose qu'il en existe un nombre fini : $p_1, p_2, \cdots, p_n$.
   On pose alors $N = \prod_{k=1}^{n} p_k + 1$.
   Si N n'était pas premier, alors il admettrait un diviseur premier strict d'après ce que nous venons de voir.
   Donc, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que N soit divisible par p_k.
   Mais $\prod_{k=1}^{n} p_i$ est lui-même divisible par p_k, donc par différence, $1 = N - \prod_{i=1}^{n} p_i$ est divisible par p_k.
   C'est impossible car $p_k \geqslant 2$.
   On a donc démontré par l'absurde que l'ensemble des entiers premiers est infini.
   Cette preuve est présente dans les éléments d'Euclide (300 av. JC), mais ce résultat a ensuite fait l'objet d'un très grand nombre d'autres preuves.

Il reste une dernière situation : réaliser une récurrence « finie ».
Cela correspond simplement à un raisonnement héréditaire, mais valable pour un nombre fini de valeurs seulement.

Propriété 1.7 *(Récurrence finie)*

Soit $N \in \mathbf{N}$.
Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on définit une assertion logique $\mathcal{P}(n)$.
Si 1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. Pour $n \in [\![0, N-1]\!]$ **quelconque** fixé, le fait que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ soit vrais implique que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![0, N]\!]$.
Formellement :

$$\Big(\mathcal{P}(0) \wedge \big[\forall n \in [\![0, N-1]\!], \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big]\Big) \Rightarrow \Big(\forall n \in [\![0, N]\!], \mathcal{P}(n)\Big).$$

Remarque : On peut bien sûr réaliser aussi des récurrences finies doubles, triples,... ou fortes sur le même modèle.

Preuve

On considère simplement la propriété $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{P}(n)$ si $n \in [\![0, N]\!]$ et $\mathcal{Q}(n)$ vrai sinon.
On lui applique alors une récurrence « normale ». ■

2 Suite arithmétique

Définition 2.1 *(Suite arithmétique)*

(u_n) est une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbf{C}$ si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Théorème 2.2

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$
2. $\forall (p, n) \in \mathbf{N}^2, \quad u_n = u_p + (n-p)r.$
3. si $u_0 \in \mathbf{R}$ et $r \in \mathbf{R}$, alors la suite est à valeurs réelles et
   (a) Si $r > 0$, la suite est strictement croissante de limite $+\infty$,
   (b) Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante de limite $-\infty$,
   (c) Si $r = 0$, la suite est constante.

Preuve

1. Par récurrence.
   Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = u_0 + 0 \times r$. La relation est donc vérifiée au rang $n = 0$.
   Hérédité : on suppose la relation vraie au rang $n \in \mathbf{N}$ **fixé**, et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$.
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r \\ &= (u_0 + nr) + r \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_0 + (n+1)r. \end{aligned}$$
   Donc la relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
2. $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$ d'après le point précédent. Donc en soustrayant les deux égalités on obtient : $u_n - u_p = (n-p)r$, c'est-à-dire $u_n = u_p + (n-p)r$.
3. $u_n = u_0 + nr$.
   (a) Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Si $r < 0$, en exercice.
   (c) Si $r = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 + n \times 0 = u_0$, donc la suite est constante.

■

Théorème 2.3

Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} k = \frac{(n-m+1)\,(m+n)}{2} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Théorème 2.4 *(Rappel : somme arithmétique)*

Soit (u_n) une suite arithmétique.
Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} u_k = (n-m+1)\frac{u_n+u_m}{2} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_n+u_0}{2}.$$

(nombre de termes) $\times$ (moyenne des termes extrêmes).

Preuve

Voir les preuves dans le chapitre sur les sommes et produits. ■

3 Suite géométrique

Définition 3.1 *(Suite géométrique)*

(u_n) est une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbf{C}$ si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

Théorème 3.2

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = q^n u_0$.
2. $\forall (p,n) \in \mathbf{N}^2,\ p \leqslant n \Rightarrow u_n = q^{n-p} u_p$.
3. si $q \neq 0,\ \forall (p,n) \in \mathbf{N}^2,\ u_n = q^{n-p} u_p$
   ($q \neq 0$ car l'exposant $n-p$ peut être négatif).

⚠ si la suite commence à l'indice 1, alors on a $u_n = q^{n-\mathbf{1}} u_{\mathbf{1}}$.

Théorème 3.3

Soit $q \neq 1$.
Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Théorème 3.4 *(Rappel : somme géométrique)*

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Soient m et n deux entiers avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{\mathbf{k=m}}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \qquad \text{et en particulier :} \qquad \sum_{\mathbf{k=0}}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Remarque : Dans le cas où la raison vaut 1, on additionne simplement $n+1$ fois le même terme u_0.

Preuve

Voir les preuves dans le chapitre sur les sommes et produits. ■

4 Suite arithmético-géométrique

On combine les suites arithmétiques et géométriques en une seule :

Définition 4.1 *(Suite arithmético-géométrique)*

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique** si

$$\exists (a,\, b) \in \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b.$$

Remarque : Pour $a = 1$, c'est une suite arithmétique, et pour $b = 0$, c'est une suite géométrique.

⚠ a et b sont des constantes qui **ne dépendent pas** de n.

Théorème 4.2

Soit $(a,b) \in \mathbf{C}^2$ avec $a \neq 1$.
Si la suite $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b$$

alors l'équation $x = ax + b$ admet une unique solution ℓ,
et la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a.

Explications

La recherche de ℓ correspond à la recherche d'un *point fixe*, c'est-à-dire une suite constante qui est solution particulière de la relation de récurrence.
La suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est alors solution de « l'équation homogène » : $v_{n+1} = av_n$.
L'*équation homogène* est l'équation dont le second membre b est nul.
On retrouvera ce vocabulaire dans d'autres chapitres (équations différentielles, systèmes linéaires...).

Preuve

Comme $a \neq 1$, l'équation $ax + b = x$ admet une unique solution $\ell = \frac{b}{1-a}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = au_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n.$$

■

Exemple

Soit une suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 3u_{n+1} + 2u_n + 5 = 0.$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n et de u_0 pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Solution :

On met déjà la suite sous la bonne forme et on observe qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique :

$$u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n - \frac{5}{3}.$$

On résout l'équation $3x + 2x + 5 = 0$ et on trouve le point fixe $\ell = -1$.
On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - (-1) = u_n + 1$.
(v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n v_0.$$

C'est-à-dire : $u_n + 1 = \left(-\frac{2}{3}\right)^n (u_0 + 1)$.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n (u_0 + 1) - 1.$$

Théorème 4.3 *(Limite de la suite)*

Soit (u_n), une suite arithmético-géométrique **réelle**, de raison $a \neq 1$ et de point fixe ℓ.

- Si $u_0 = \ell$, alors la suite est constante égale à ℓ.
- Si $u_0 \neq \ell$, alors
  - si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  - si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ (le signe de la limite est celui de $u_0 - \ell$.)
  - si $a \leqslant -1$, alors u_n n'admet pas de limite en $+\infty$.

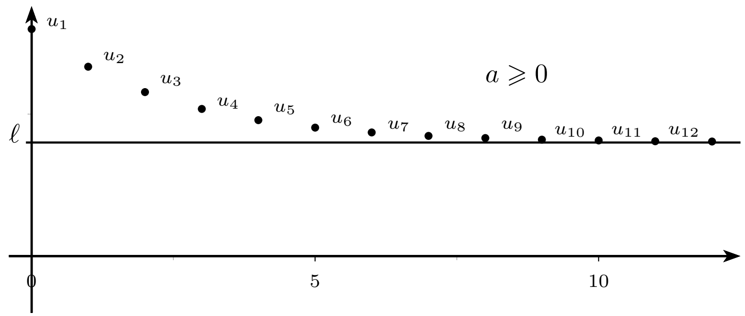
Remarque : Si la suite n'est pas à valeurs réelles, pour $|a| < 1$, la suite converge tout de même vers ℓ.

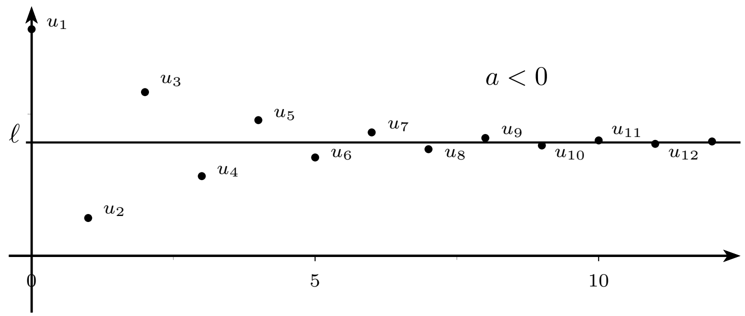
Preuve

En exercice. ■

Explications

Dans le cas où la suite converge ($|a| < 1$ ou $a = 1$), le point fixe joue le rôle « d'attracteur ». Si $a \geqslant 0$, alors la suite converge de façon monotone vers ce point fixe, et si $a < 0$, alors, la suite converge en oscillant vers ℓ.





5 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Les suites géométriques peuvent être qualifiées de suites récurrentes linéaires d'ordre 1. Cette partie s'intéresse à l'ordre 2.

Définition 5.1 *(Suite récurrente d'ordre 2)*

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** à coefficients constants si

$$\exists (a,\, b,\, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^2, \forall n \in \mathbf{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

On appelle **équation caractéristique** l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Remarque : si $a = 0$, alors c'est une suite récurrente d'ordre 1. La méthode fonctionne mais n'a aucun intérêt.

Théorème 5.2 *(Solutions de la récurrence d'ordre 2)*

Soit (u_n), une suite d'ordre 2 comme dans la définition précédente.
On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique :

- Si $\Delta \neq 0$, on note (r_1, r_2) les deux solutions de l'équation caractéristique, alors $\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$, tel que
$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n.$$
- Si $\Delta = 0$, on note r la racine double de l'équation caractéristique. Si $r\neq 0$, alors $\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$, tel que
$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_n = \lambda\, r^n + \mu\, \boldsymbol{n} r^n = (\lambda+\mu\, n)\, r^n.$$

λ et μ sont déterminés de façon unique par u_0 et u_1.

Dans le cas particulier d'une suite **réelle :**
si $\Delta < 0$, on note $r_\pm = \rho\,\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
Alors, $\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$, tel que
$$\forall n\in\mathbf{N},\ u_n = \rho^n\left(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)\right).$$

Remarque : Si $r=0$ est racine double, alors $b=c=0$: la suite vérifie $\forall n\geqslant 2,\ u_n=0$ et la formule donnée est valable pour $n\geqslant 2$.

Preuve

Remarque : La preuve qui suit suppose que l'on connaisse au préalable la forme des solutions, ce qui est loin d'être évident. Avec un peu de persévérance, on pourrait sans doute obtenir une telle formulation en s'inspirant des solutions de la suite arithmético-géométrique, cependant, ce serait beaucoup plus facile en faisant appel à l'algèbre linéaire et aux matrices. On verrait alors que ce théorème n'est qu'un cas particulier que l'on peut généraliser à tout ordre.

- Si $\Delta\neq 0$.
Si (u_n) est une suite solution, alors on peut trouver $(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$ tel que $\begin{cases} u_0 &= \lambda+\mu\\ u_1 &= \lambda r_1+\mu r_2.\end{cases}$
On résout et on trouve une unique solution : $\begin{cases}\lambda &= -\dfrac{u_1-r_2u_0}{r_2-r_1}\\ \mu &= \dfrac{u_1-r_1u_0}{r_2-r_1}.\end{cases}$
On montre ensuite par récurrence double, que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_{n+2}=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$.
Initialisation : D'après la résolution du système qui donne λ et μ en fonction de u_0 et u_1, la propriété est vraie aux rangs $n=0$ et $n=1$.
Hérédité : Soit $n\in\mathbf{N}$ quelconque fixé. On suppose que la relation est vraie aux rangs n et $n+1$.
Par définition de r_1, on a
$$ar_1^2+br_1+c=0.$$
En mutlipliant par λr_1^n, on trouve alors
$$a\lambda r_1^{n+2}+b\lambda r_1^{n+1}+c\lambda r_1^n=0.$$
On a le même résultat avec r_2 et μ ce qui donne
$$a\mu r_2^{n+2}+b\mu r_2^{n+1}+c\mu r_2^n=0.$$
En sommant les deux équations, on trouve donc
$$a\left(\lambda r_1^{n+2}+\mu r_2^{n+2}\right)+b\left(\lambda r_1^{n+1}+\mu r_2^{n+1}\right)+c\left(\lambda r_1^n+\mu r_2^n\right)=0,$$
ce que, avec l'hypothèse de récurrence, on peut encore écrire sous la forme
$$a\left(\lambda r_1^{n+2}+\mu r_2^{n+2}\right)-au_{n+2}=0.$$
Or $a\neq 0$, ce qui permet donc de conclure que
$$u_{n+2}=\lambda r_1^{n+2}+\mu r_2^{n+2}.$$
Ainsi l'hérédité et vérifiée et par principe de récurrence, l'expression donnée est bien le terme général de la suite.
- Si $\Delta=0$ et $r\neq 0$. On pose $\lambda=u_0$, et μ tel que $u_1=\lambda r+\mu r$, c'est-à-dire $\mu=\frac{u_1-ru_0}{r}$.
Comme r est l'unique racine du polynôme caractéristique, on sait[2] que $b=-2ar$ et $c=ar^2$.
On montre par récurrence double que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_{n+2}=\lambda r^n+\mu nr^n$.
Initialisation : D'après la résolution du système qui donne λ et μ en fonction de u_0 et u_1, la propriété est vraie aux rangs $n=0$ et $n=1$.
Hérédité : Soit $n\in\mathbf{N}$ quelconque fixé. On suppose que la relation est vraie aux rangs n et $n+1$.
Par définition de r, on a
$$ar^2+br+c=0.$$
En mutlipliant par $(\lambda+\mu n)r^n$, on trouve alors
$$a(\lambda+\mu n)r^{n+2}+b(\lambda+\mu n)r^{n+1}+c(\lambda+\mu n)r^n=0.$$
On remarque que $b=-2ar$, donc
$$2ar^2+br=0.$$
En sommant les deux équations, on trouve donc
$$a\left(\lambda+\mu(n+2)\right)r^{n+2}+b\left(\lambda+\mu(n+1)\right)r^{n+1}+c\left(\lambda\mu n\right)r^n=0,$$
Et en introduisant l'hypothèse de réccurence $(a\neq 0)$, on trouve bien
$$u_{n+2}=(\lambda+\mu(n+2))r^{n+2}$$
ce qui prouve l'hérédité.

2. Par exemple, on peut identifier ax^2+bx+c avec $a(x-r)^2$ avec $a\neq 0$.

- Dans le cas réel, si $\Delta < 0$, alors on peut utiliser une récurrence double avec les formules trigonométriques.
  Sinon, on utilise le résultat pour $\Delta \neq 0$ dans $\mathbf{C}$.
  Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

$$\begin{aligned} &= \lambda \rho^n \mathrm{e}^{in\theta} + \mu \rho^n \mathrm{e}^{-in\theta} \\ &= \lambda \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + \mu \rho^n (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)) \\ &= \rho^n ((\lambda + \mu)\cos(n\theta) + i(\lambda - \mu)\sin(n\theta)) \\ &= \rho^n (\lambda' \cos(n\theta) + \mu' \sin(n\theta)). \end{aligned}$$

Vérifions que les coefficients trouvés $\lambda' = \lambda + \mu$ et $\mu' = i(\lambda - \mu)$ sont bien réels.
$\star$ *Méthode 1 :* D'après le cas $\Delta \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{u_1 - \rho \mathrm{e}^{i\theta} u_0}{\rho \mathrm{e}^{-i\theta} - \rho \mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{-1}{\rho} \dfrac{u_1 - \rho \mathrm{e}^{i\theta} u_0}{2i \sin\theta} & (\sin\theta \neq 0 \text{ et } \rho \neq 0 \text{ car } \Delta < 0) \\ \mu = -\dfrac{u_1 - \rho \mathrm{e}^{-i\theta} u_0}{\rho \mathrm{e}^{i\theta} - \rho \mathrm{e}^{-i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} \dfrac{u_1 - \rho \mathrm{e}^{-i\theta} u_0}{2i \sin\theta}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda + \mu = \dfrac{1}{2i\rho \sin\theta} \left(-u_1 + \rho \mathrm{e}^{i\theta} u_0 + u_1 - \rho \mathrm{e}^{-i\theta} u_0\right) = u_0 \in \mathbf{R} \\ \mu' = (\lambda - \mu)i = \dfrac{1}{2\rho \sin\theta} \left(-u_1 + \rho \mathrm{e}^{i\theta} u_0 - u_1 + \rho \mathrm{e}^{-i\theta} u_0\right) \\ \quad = \dfrac{1}{2\rho \sin\theta} (-2u_1 + 2\rho u_0 \cos\theta)\, u_1 = -\dfrac{u_1 - \rho \cos\theta u_0}{\rho \sin\theta} \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Ce qui prouve bien le résultat voulu.
$\star$ *Méthode 2 :* On sait que la suite est à valeurs réelles (récurrence double immédiate), donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{R}$. Or

$$\begin{aligned} u_n \in \mathbf{R} &\Rightarrow u_n = \overline{u_n} \\ &\Rightarrow \rho^n (\lambda' \cos(n\theta) + \mu' \sin(n\theta)). = \overline{\rho^n (\lambda' \cos(n\theta) + \mu' \sin(n\theta))} \\ &\Rightarrow \rho^n (\lambda' \cos(n\theta) + \mu' \sin(n\theta)). = \rho^n \left(\overline{\lambda'} \cos(n\theta) + \overline{\mu'} \sin(n\theta)\right) \\ &\Rightarrow \left(\lambda' - \overline{\lambda'}\right) \cos(n\theta) = \left(-\mu' + \overline{\mu'}\right) \sin(n\theta) \quad \text{car } \rho^n \neq 0. \end{aligned}$$

En particulier pour $n = 0$, on trouve $\lambda' - \overline{\lambda'} = 0$, donc $\lambda' \in \mathbf{R}$.
Pour $n = 1$, $\sin(\theta) \neq 0$ (sinon $\Delta \geqslant 0$), donc, on obtient $-\mu' + \overline{\mu'} = 0$, donc $\mu' \in \mathbf{R}$. Ce qui prouve bien le résultat voulu.

■

Exemple

Étude de la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Solution :

La suite est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
L'équation caractéristique est $x^2 = x + 1$.
Les solutions de cette équation sont bien connues :

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

r_2 est appelé le nombre d'or.
Les suites solution de cette relation sont donc les suites de la forme

$$u_n = \lambda \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Ici $u_0 = 0$, donc $\lambda + \mu = 0$ donc $\mu = -\lambda$
et $u_1 = 1$, donc $\lambda \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} - \lambda \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 \Rightarrow -\lambda\sqrt{5} = 1$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n \sqrt{5}} \left(\left(1 + \sqrt{5}\right)^n - \left(1 - \sqrt{5}\right)^n\right)$.

Théorème 5.3 *(Suite récurrente d'ordre 2 avec second membre)*

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ avec a et c différents de 0, et (d_n) une suite complexe.
Soit la suite $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence d'ordre 2

$$(E_d) \quad : \qquad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = d_n.$$

On appelle **relation homogène associée**, la relation de récurrence sans le second membre :

$$(E_0) \quad : \qquad a \widetilde{u}_{n+2} + b \widetilde{u}_{n+1} + c \widetilde{u}_n = 0.$$

On note $\mathscr{S}_d$ l'ensemble des solutions de la relation (E_d)
$\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de la relation homogène (E_0)
(obtenues grâce au théorème 5.2).

On suppose connue une **solution particulière** de (E_d) : $(u_n^d) \in \mathscr{S}_d$.

La suite (u_n) est solution de (E_d) si, et seulement si $(u_n - u_n^d)$ est solution de (E_0) :

$$(u_n) \in \mathscr{S} \iff (u_n - u_n^d) \in \mathscr{S}_0.$$

Que l'on peut aussi écrire (en comprenant bien le sens du signe « + ») :

$$\mathscr{S}_d = \mathscr{S}_0 + (u_n^d).$$

Remarque : C'est la même chose qu'à l'ordre 1.

Preuve

Ce théorème est en fait un exemple d'un résultat beaucoup plus général lié directement à la notion de linéarité.

$$\begin{aligned} (u_n) \in \mathscr{S}_d &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = d_n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = a u_{n+2}^d + b u_{n+1}^d + c u_n^d \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N},\ a \left(u_{n+2} - u_{n+2}^d\right) + b \left(u_{n+1} - u_{n+1}^d\right) + c \left(u_n - u_n^c\right) = 0 \\ &\iff \left(u_n - u_n^d\right) \in \mathscr{S}_0. \end{aligned}$$

■

Exercice

Trouver une solution particulière lorsque (d_n) est une suite constante égale à d.

Solution :

Quitte à tout diviser par a, on peut supposer $a = 1$.
Lorsque le second membre est constant, on s'inspire des suites arithmético-géométriques et on cherche une suite constante qui soit solution en résolvant $x + bx + cx = 0$.

⋆ Si $1 + b + c \neq 0$, on trouve ainsi une suite constante solution. Terminé.

⋆ Si $1 + b + c = 0$, alors on ne trouve pas de solution constante pour $d \neq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d &\iff u_{n+2} - (1+c)u_{n+1} + cu_n = d \\ &\iff u_{n+2} - u_{n+1} = c\,(u_{n+1} - u_n) + d \\ &\iff v_{n+1} = cv_n + d \qquad \text{avec } v_n = u_{n+1} - u_n. \end{aligned}$$

- Si $c \neq 1$, alors on peut trouver une solution particulière (v_n) constante $(\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \frac{d}{1-c} = \lambda \in \mathbf{C})$.
  Alors $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \lambda + u_n$.
  Il existe donc une suite arithmétique qui soit solution particulière.
- Si $c = 1$, alors (v_n) est une suite arithmétique de la forme $\lambda + nc$,

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = \lambda + nd \\ \Rightarrow &\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda + kd \\ \Rightarrow &\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = \lambda(n+1) + \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) d \\ \Rightarrow &\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_0 = \lambda(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} d \\ \Rightarrow &\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3,\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \alpha + \beta n + \gamma n^2. \end{aligned}$$

On peut se rappeler que lorsque le second membre est constant, on pourra toujours trouver une solution particulière de la forme $u_n^d = \alpha + \beta n + \gamma n^2$.