Logique et raisonnement

« Quand Gauss dit qu'il a démontré quelque chose, cela me paraît très probable, quand Cauchy le dit, il y a autant à parier pour que contre, quand Dirichlet le dit, cela est certain. »
Jacobi, 1846

Aperçu historique :
On situe l'origine de la logique à Aristote (IV$^{\text{ème}}$ av. J.C.) et à son ouvrage l'*Organon*[1]. Il y énonce le procédé de la démonstration rigoureuse basée sur le syllogisme.
La philosophie d'Aristote a une place prédominante pendant tout le Moyen-Âge. En particulier, la *scolastique* qui trouve son point d'orgue chez Saint Thomas d'Aquin vise à rapprocher la théologie chrétienne de la philosophie traditionnelle en s'appuyant sur les concepts et le langage formel introduits par Aristote.
À partir de la Renaissance, la logique est utilisée pour tenter de construire un fondement rigoureux à la connaissance avec une place prépondérante pour l'expérience.
En 1900, David Hilbert énonce 23 problèmes qui marqueront la suite des mathématiques. Le deuxième concerne la cohérence de l'arithmétique.
En substance, il pose la question suivante :

« Quelles sont les règles du jeu minimales pour faire des mathématiques, et telles, qu'elles nous assurent de l'absence de toute contradiction ? »

Ce problème ouvrit un vaste travail dans la formalisation des mathématiques et la définition d'un fondement axiomatique clair.
Répondre à cette question requit de dépasser les simples raisonnements intuitifs pour construire des raisonnements rigoureux et d'une logique inattaquable. C'est également l'objectif visé par ce cours.
Ceux qui le souhaitent peuvent visualiser avec profit (et plaisir) un cours d'introduction d'Herbert Gross au MIT :

`https://youtu.be/ws0oClvZmic`.

1. Le titre est donné postérieurement par Diogène Laërce. Il veut dire « outil » ou « instrument ».

1 Logique mathématique

A Fondements de la logique

Définition 1.1

Dans ce cours, une **assertion** désigne une phrase non paradoxale[2] à laquelle on peut associer deux valeurs, dites **valeurs de vérité** : soit **vrai**, soit **faux.**

Lorsque la valeur de vérité dépend d'une variable, on parle plutôt de **prédicat**.

Remarque : Dans ce cours, le terme d'assertion sera utilisé dans les deux situations.

Exemple

« $x > 3$ » est un prédicat.
Cela est vrai pour certaines valeurs de x et faux pour d'autres.

Le **principe du tiers-exclu** affirme qu'une assertion est soit vraie, soit fausse.
Ainsi lorsque l'on montre qu'une assertion ne peut pas être fausse, c'est qu'elle est vraie : c'est le raisonnement par l'absurde.

« Il est absolument ou il n'est pas du tout. » Parménide

Le **principe de non contradiction** affirme qu'une assertion ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

« Être en repos et en mouvement, simultanément, sous le même rapport, est-ce que c'est possible pour la même chose ? Nullement. » Platon

Ces deux principes de base ont fondé la logique mathématique telle que nous l'utilisons habituellement, cependant, ils ne sont pas universellement acceptés :

En 1931, Gödel donna une réponse négative à la question posée par Hilbert en 1900 avec *le théorème d'incomplétude*. Il démontra que dans tout système axiomatique (tel que nous les construisons aujourd'hui), il subsiste des énoncés *indécidables* : dont on ne peut prouver qu'ils sont vrais ou faux.

Pour des raisons plus philosophiques, les *intuitionnistes* s'opposent au principe du tiers-exclu. Selon eux, rien ne permet d'affirmer qu'une assertion possède nécessairement une valeur de vérité. Partisans d'une approche constructiviste, ils refusent d'affirmer qu'une propriété est vraie tant que l'on n'a pas *construit* une solution. Cette logique est importante en informatique, science dans laquelle la construction de l'objet est nécessaire. Ce problème de la constructibilité des objets est une question récurrente en mathématiques. Aujourd'hui, certains résultats mathématiques sont donnés comme vrais sans que nous sachions comment les obtenir concrètement : nous avons juste montré qu'il était impossible qu'ils soient faux.

Les critiques contre le principe de non contradiction sont anciennes, mais ont été ravivées avec la physique contemporaine. Le philosophe Lupasco qui a travaillé sur la question, a introduit la notion de « *potentialisation* ».

2. Pour ne pas mettre en défaut le principe du tiers-exclu qui est exposé juste après, on évitera les énoncés contradictoires du type « cette phrase est fausse ».

Méthode

Pour démontrer qu'une assertion est juste, il faut montrer qu'elle est juste **dans tous les cas**. En général cela représente une infinité de cas possibles.
Par contre, pour montrer qu'une assertion est fausse, il suffit de trouver **un seul contre-exemple**, c'est-à-dire une situation pour laquelle elle est fausse.

Exemple

Pour démontrer que la somme des angles d'un triangle fait 180 degrés, il ne suffit pas de le vérifier sur certains triangles, mais il faut le vérifier pour **tous** les triangles qui peuvent exister. Cela demande donc un raisonnement *qualitatif* qui soit valable pour tous les triangles à la fois. (Au fait, comment fait-on[3] ?)
En revanche, pour démontrer qu'un résultat est faux, il suffit de trouver **une** situation où il n'est pas vérifié. Par exemple, l'assertion : *« Tous les nombres impairs supérieurs ou égaux à trois sont premiers »* est fausse.
Pour le montrer, il suffit de dire que $9 = 3 \times 3$ est impair mais pas premier.
Si on s'était contenté de certains exemples, $3, 5, 7 \cdots$ alors on aurait très bien pu croire que la propriété était vraie. C'est une erreur malheureusement courante.

Définition 1.2

Une **conjecture**, est un énoncé mathématique non prouvé mais que l'on pense être vrai.

Il existe de nombreuses conjectures en mathématiques dont on est presque sûr de la véracité mais que l'on n'a toujours pas réussi à démontrer.

Exemple

La conjecture de Goldbach dit que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (ce n'est pas prouvé).
Au lycée, vous aviez l'habitude d'établir des conjectures d'après les figures obtenues à la calculatrice.

Définition 1.3

Lorsqu'une conjecture *importante* est démontrée, on parle de **théorème**.

Exemple

Le grand théorème de Fermat, énoncé par Fermat vers le milieu du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, est resté à l'état de conjecture pendant 3 siècles. Il a été démontré par A. Wiles en 1995 devenant dès lors un théorème.
Ce théorème stipule que pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe pas d'entiers x, y, z tous non nuls tels que

$$x^n + y^n = z^n.$$

À noter que dans le cas $n = 2$, il existe une infinité de solutions qui correspondent aux triangles rectangles (dont les côtés ont des longueurs entières). On trouve des traces de solution de ce problème dès l'époque babylonienne et la résolution complète sera faite au cours de cette année.

Définition 1.4 *(Une foule de synonymes)*

Dans ce cours, les termes **preuve** et **démonstration** sont synonymes.

Lemme, **propriété** et **théorème** désignent tous trois un énoncé prouvé.

- un lemme est un résultat intermédiaire en vue d'un énoncé plus général (qui sera le théorème),
- une propriété est un énoncé auquel on accorde *moins d'importance* qu'à un théorème.

Certains énoncés, en fonction des ouvrages, peuvent prendre indifféremment l'une ou l'autre dénomination.

B Quantificateurs

Les quantificateurs sont des symboles mathématiques qui permettent d'écrire des assertions mathématiques de façon très ramassée et compréhensible en un coup d'œil.

⚠ On évite d'utiliser les quantificateurs au sein d'une phrase en français.

Voici une liste des quantificateurs et opérateurs logiques qui seront utilisés.

Dans la suite, p et q désignent deux assertions logiques.

Appartenance : pour indiquer qu'un élément x appartient à un ensemble E, on note « $x \in E$ ». La négation est «$x \notin E$ » : « x n'appartient pas à E ».

Quantificateur universel : si p est une assertion et E un ensemble, pour indiquer que tous les éléments de E vérifient la propriété p, on note « $\forall x \in E$, p ».
« $\forall x \in E$ » se lit « pour tout x dans E » ou « quel que soit x dans E ».

Quantificateur existentiel : si p est une assertion et E un ensemble, pour indiquer qu'il existe *au moins* un élément de E qui vérifie la propriété p, on note « $\exists x \in E$, p ».
« $\exists x \in E$ » se lit « il existe x dans E ».

Remarque : Pour dire que le x est unique, on écrit « $\exists!\, x \in E$ » qui se lit : « il existe un *unique* x dans E ».

Exemple

Il faut bien comprendre la différence entre les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ » : il n'est pas du tout pareil de dire que « il existe une voiture jaune » ou « toutes les voitures sont jaunes ».
Formellement, pour E un ensemble non vide, et p une assertion logique,
Si « $\forall x \in E, p$ », alors en particulier « $\exists x \in E, p$ ».

[3] On trace une droite parallèle à un côté et passant par le sommet opposé et on utilise les propriétés des angles alternes internes... à condition de savoir démontrer cette propriété.

Mais la réciproque est fausse en général, ce n'est pas parce que « $\exists x \in E, p$ », que l'on a « $\forall x \in E, p$ ».

Exemple

Soit f une application définie sur $\mathbf{R}$. Les assertions suivantes disent-elles la même chose, ou ont-elles des significations différentes ? Quelle est leur signification ?

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$.
2. $\forall z \in \mathbf{R},\ f(z) = 0$.

Solution :
Les deux assertions sont équivalentes :
« quel que soit le nombre réel, son image par f est nulle. »
Le nom que l'on donne à ce nombre réel pour les besoins de l'écriture n'a aucune influence. C'est comme en informatique : appeler la variable `x` ou l'appeler `z` ne changera pas le fonctionnement du programme.
Dans cet exemple, les deux propriétés énoncent simplement que f est l'application identiquement nulle.

⚠ Avant d'utiliser un objet mathématique, il faut s'assurer qu'il est bien défini. Par exemple, écrire $f(x) \neq 0$ n'a aucun sens, si f et x n'ont pas été définis précédemment.

C Opérateurs logiques élémentaires

Équivalence : deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles ont la même valeur de vérité : soit elles sont vraies en même temps, soit elles sont fausses en même temps. En français $p \iff q$ se dit « p est vraie *si et seulement si* q est vraie ».

Exemple

« Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$. » est une équivalence qui est vraie.
C'est le théorème de Pythagore et sa réciproque mis ensemble.

⚠ Lorsque $p \iff q$ est vraie, cela ne veut pas dire que p et q soient vraies. Cela peut vouloir dire au contraire que p et q sont toutes les deux fausses.

Par exemple, le triangle ABC peut très bien ne pas être rectangle en A, mais alors l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée pour lui.

Méthode *(Utilisation des équivalences dans les raisonnements)*

Pour montrer que q est vraie, on peut lui chercher une proposition équivalente plus simple qui soit également vraie.

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{R}$: $5x - 7 \geqslant -1$.
Solution :
Cela revient à chercher les x pour lesquels cette proposition est vraie.
On va se ramener à une condition plus simple en raisonnant par équivalence (il faut faire attention à ce que les expressions soient bien équivalentes entre elles ; c'est sur ce point qu'il y a souvent des erreurs).

$$\begin{aligned} 5x - 7 \geqslant -1 &\iff 5x \geqslant 6 \\ &\iff x \geqslant \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Remarque : Contrairement à ce qui a été dit plus haut, ici, on n'a pas défini x avant de l'écrire dans l'expression. Cela vient du fait que c'est l'expression elle-même qui définit la valeur de x. En effet, lorsque l'on résout une équation ou une inéquation, on ne sait pas, a priori, pour quelles valeurs elle est valable. C'est la résolution elle-même qui nous indique quels sont les « x » pour lesquels la relation est vraie. Il serait donc prématuré de définir x préalablement.
Par contre, il faut préciser dans quel ensemble on cherche x. Ici, il est sous-entendu que l'on cherche $x \in \mathbf{R}$.

Exemple

Montrer que l'assertion $x^2 = y^2 \iff x = y$ est fausse sur $\mathbf{R}$.
Sur quel sous-ensemble (le plus grand possible) de $\mathbf{R}$ est-elle vraie ?
Solution :
Il suffit de trouver un contre-exemple pour montrer que la proposition est fausse. Par exemple pour $x = 1$ et $y = -1$, on a bien $x^2 = y^2$ et pourtant $x \neq y$.
L'assertion est vraie pour tous les nombres positifs : $\mathbf{R}_+$ (ou pour tous les nombres négatifs) car on n'a plus de problème de signe.

Conjonction « et » : l'assertion « $p \wedge q$ » se lit « p et q ».
Elle est vraie lorsque p et q sont simultanément vraies.
Par exemple, « $5 \leqslant x < 2$ » peut se décomposer en « $5 \leqslant x$ et $x < 2$ » : il faut que x vérifie les deux inégalités en même temps.

Disjonction « ou » : l'assertion « $p \vee q$ » se lit :« p ou q ».
Elle est vraie lorsque l'une au moins des assertions p ou q est vraie. Il n'est pas nécessaire qu'elles soient toutes les deux vraies. On voit que la disjonction est *moins exigeante* que la conjonction.

Remarque : On utilise peu les symboles $\wedge$, $\vee$ et on préfère souvent l'écriture en toutes lettres « et » , « ou » ; faisant ainsi la première entorse à la règle édictée plus haut...

Contraire : l'assertion contraire de p se note « $\neg p$ » ou « non(p) ». C'est la *négation*.

Implication : $p \Rightarrow q$ est vraie si et seulement si
$\begin{cases} p \text{ et } q \text{ son simultanément sont vraies,} \\ \text{ou } p \text{ est fausse.} \end{cases}$

L'implication $p \Rightarrow q$ traduit le lien logique « *Si p, alors q* ».
Si *la prémisse* p est vraie, alors q est aussi vraie, par contre, si p est fausse, on n'a aucune information sur q qui peut être soit vraie, soit fausse. En effet, à partir d'un postulat faux, on peut démontrer à la fois des énoncés faux, et des énoncés vrais. En d'autres termes, ce n'est pas parce que votre résultat est vrai que votre hypothèse ou le raisonnement est lui-même vrai[4].

4. Contrairement à la croyance commune, un résultat juste sur une copie de maths n'a aucune

Exemple

Commenter : « $1 + 1 = 3 \Rightarrow$ "je suis la reine d'Angleterre" ».

Solution :

Cette proposition logique est vraie. En effet, la prémisse est fausse, donc l'implication est vraie quelle que soit la conclusion.
Pour nous en convaincre, démontrons cette implication :
Si $1 + 1 = 3$, alors en soustrayant 1 à l'égalité, on obtient $1 = 2$.
La reine d'Angleterre et moi sommes *deux* personnes, or comme $2 = 1$, nous sommes *une seule* personne.

La **réciproque** de $p \Rightarrow q$ est $q \Rightarrow p$. Une implication peut être vraie sans que sa réciproque le soit.

⚠ L'implication ne traduit pas nécessairement un lien de cause à conséquence.

Exemple

« S'il pleut, alors il y a des nuages. »
Cette assertion est vraie (sauf si votre frère joue avec le tuyau d'arrosage à côté), et pourtant elle n'exprime pas un lien de cause à conséquence mais tout le contraire : elle exprime un lien de conséquence à cause nécessaire. La cause, n'est pas la pluie, mais ce sont les nuages.
L'implication réciproque est fausse : ce n'est pas parce qu'il y a des nuages qu'il pleut nécessairement.

D Tables de vérité et opérateurs logiques

Complément hors programme.
La valeur de vérité d'une assertion peut être désignée par V pour **vrai** et F pour **Faux**[5] (ou T, F comme *True* et *False*).
Lorsque la valeur de vérité d'une assertion dépend de valeurs d'autres assertions, on peut créer une table de vérité pour indiquer cette dépendance.
Les tables de vérité permettent ainsi de faire du *calcul*, en maniant, non des nombres, mais des booléen : vrai et faux. On peut alors définir les opérateurs logiques précédents à l'aide de tables de vérité.

Équivalence :

p	q	$p \iff q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ainsi, lorsque p et q ont même valeur de vérité, l'équivalence est vraie, et sinon, elle est fausse.

valeur en lui-même. Pour acquérir de la valeur, il faut expliciter les hypothèses émises et détailler un raisonnement sans fautes qui conduit à ce résultat.

5. Le principe du tiers-exclu nous indique que la proposition prend nécessairement l'une de ces deux valeurs.

Conjonction, disjonction :

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

La conjonction est vraie uniquement lorsque p et q sont toutes les deux vraies.
La disjonction est vraie lorsqu'au moins une des deux, entre p et q, est vraie. Ainsi la disjonction n'est fausse que lorsque les deux assertions sont fausses.

Négation

p	$\neg p$
V	F
F	V

p et $\neg p$ ont des tables de vérité contraires. Par exemple, lorsque p est vraie, c'est que sa négation est fausse.

Implication :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

E Propriétés élémentaires du « et » et du « ou »

Les propriétés suivantes se démontrent facilement à partir des tables de vérité. Cela peut être fait à titre d'exercice par l'étudiant consciencieux :

Propriété 1.5 *(Propriétés du « et » et du « ou »)*

1. **Associativité**

$$(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r) \quad \text{et} \quad (p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r).$$

Il n'est donc pas utile de mettre des parenthèses si on n'a que des conjonctions, ou que des disjonctions (par contre on en a besoin si on mélange les deux).

2. **Commutativité**

$$(p \wedge q) \iff (q \wedge p) \quad \text{et} \quad (p \vee q) \iff (q \vee p).$$

L'ordre des termes d'une conjonction ou d'une disjonction n'a pas d'importance.

3. **Distributivité** du *et* par rapport au *ou*

$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

4. **Distributivité** du *ou* par rapport au *et*

$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Rappelez-vous : Le « *et* » et le « *ou* » se comportent l'un par rapport à l'autre comme la multiplication par rapport à l'addition. On peut donc utiliser des formules de double distributivité.

Preuve

Preuve de l'associativité de la conjonction.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

On a réalisé les tables de vérités pour les deux assertions.
Pour cela on met toutes les situations possibles pour p, q et r dans les trois premières colonnes (comme il y a deux possibilité par assertion, cela fait $2^3 = 8$ lignes).
Ensuite, on remplit le gauche à droite. Ainsi, pour $(p \wedge q) \wedge r$, on commence par le calcul entre parenthèses : $p \wedge q$ puis on fait ensuite le conjonction de la colonne correspondante avec celle de r ce qui donne la troisième colonne.
On fait de même avec $p \wedge (q \wedge r)$ et on voit que les colonnes finales des deux tableaux sont strictement égales.
Cette égalité logique traduit l'équivalence.
On aurait aussi pu dire, sans tables de vérité que $(p \wedge q) \wedge r$ est vrai si, et seulement si $p \wedge q$ et r sont vraies, c'est-à-dire si, et seulement si les trois propriétés sont vraies. Puis remarquer qu'il en est de même pour $p \wedge (q \wedge r)$. ■

F Lois de De Morgan pour la négation

Propriété 1.6 *(Loi de De Morgan pour « et » et « ou »)*

1. La négation de « $p \wedge q$ » est « $(\neg p) \vee (\neg q)$ ».
2. La négation de « $p \vee q$ » est « $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ».

Explications

1. Si les deux assertions ne sont pas vraies en même temps, c'est que l'une ou l'autre n'est pas vraie.
2. De même, si aucune des assertions n'est vraie, c'est que ni la première, ni la deuxième n'est vraie.

Rappelez-vous : la négation échange le « **et** » et le « **ou** ».

Propriété 1.7 *(Loi de De Morgan des quantificateurs)*

1. La négation de « $\forall x \in E, \, p$ » est « $\exists x \in E, \, \neg p$ ».
2. La négation de « $\exists x \in E, \, p$ » est « $\forall x \in E, \, \neg p$ ».

Exemple

Le contraire de l'assertion « toutes les billes du sac sont rouges » est : « il existe une bille du sac qui n'est pas rouge ».
Le contraire de l'assertion « il y a au moins une bille du sac qui est rouge » est : « aucune des billes du sac n'est rouge ».

Rappelez-vous : la négation échange les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple

Soit E, un ensemble de nombres. Quelle est la différence entre le fait de dire

- « les éléments de E sont tous non nuls »,
- « les éléments de E sont non tous nuls ».

Solution :
La première assertion se traduit par « $\forall x \in E, \, x \neq 0$ ».
La deuxième assertion se traduit : « $\neg(\forall x \in E, \, x = 0)$ » ce qui est équivalent à

« $\exists x \in E,\ x \neq 0$ ».
Dans le premier cas, on demande à tous les éléments de ne pas être égaux à 0 : aucun ne doit être égal à 0. Dans le deuxième cas, on exige simplement qu'ils ne soient pas tous égaux à 0 : au moins un est non nul.

Exemple

1. Écrire avec les quantificateurs qu'une application f définie sur $\mathbf{R}$ est majorée. Avec les lois de De Morgan, donner l'assertion contraire.
2. Que signifie l'assertion q : $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists M \in \mathbf{R},\ f(x) \leqslant M$.
   Écrire avec les quantificateurs l'assertion $\neg q$.

Solution :

1. $\exists M \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \leqslant M$.
   M désigne un des majorants que f ne dépasse jamais (pour tous les $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ reste plus petit que M). L'assertion contraire est que la fonction n'est pas majorée :
   $\forall M \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x) > M$. Cela veut dire que la fonction dépasse n'importe quel réel M. En français, quel que soit le réel $M \in \mathbf{R}$ que je choisis (aussi grand que je veux), je trouverais toujours une valeur $x \in \mathbf{R}$ pour laquelle $f(x)$ sera plus grand que M.
   Le passage à l'assertion contraire échange les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
   ⚠ le « inférieur ou égal » est remplacé par un « supérieur *strict* ».
2. L'assertion se traduit en français par « Pour tout réel x, il existe un réel M qui est plus grand que $f(x)$ ».
   Cette assertion est toujours vraie, c'est une trivialité. En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, je peux toujours trouver un $M \in \mathbf{R}$ qui convient, par exemple $M = f(x) + 1$.
   Cette assertion ressemble beaucoup à la précédente, mais on a échangé l'ordre des deux quantificateurs et elle ne veut plus du tout dire la même chose.
   Dans le cas 1, on commence par fixer un $M \in \mathbf{R}$ qui doit être valable pour tous les $x \in \mathbf{R}$. Dans le cas 2, on peut choisir un M différent pour chaque x : le M est choisi après le x et peut donc dépendre de lui.
   Le contraire de l'assertion q est $\neg q$: $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall M \in \mathbf{R},\ f(x) > M$.
   Comme q est toujours vraie, $\neg q$ est toujours fausse.

⚠ Un quantificateur $\exists$ dépend des $\forall$ et $\exists$ qui le précèdent.
On ne peut donc **pas les échanger** sans vérification supplémentaire.

G Propriétés de l'implication et de l'équivalence

Propriété 1.8 *(Transitivité de l'implication)*

$$\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow \big(p \Rightarrow r\big).$$

Explications

L'implication se transmet de proche en proche...

Propriété 1.9 *(Double implication)*

$$\big(p \iff q\big) \iff \big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big).$$

Explications

Si deux assertions sont équivalentes, c'est que si l'une est vraie, alors l'autre aussi. Une double flèche, c'est simplement une flèche dans chaque sens.

Méthode *(Prouver une équivalence)*

Pour prouver que deux propositions p et q sont équivalentes, on peut

1. raisonner par équivalences successives,
2. raisonner par double implication $p \Rightarrow q$ puis $q \Rightarrow p$.

Exemple

Montrer que $(\forall n \in \mathbf{N},\ a\,2^n + b\,3^n = 0) \iff a = b = 0$.

Solution :

sens réciproque ($\Leftarrow$) si $a = b = 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a bien $a2^n + b3^n = 0$.
sens direct ($\Rightarrow$) si a et b vérifient la relation de gauche, alors pour $n = 0$, on trouve $a = -b$. Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ a(2^n - 3^n) = 0$, et pour $n = 1$, on trouve $a = 0$, donc $b = 0$.
Ainsi, on a montré l'équivalence par double implication.

De l'exemple précédent, on doit en particulier retenir la méthode suivante :

Méthode

Si on sait qu'une propriété est vraie pour tout n, alors on peut particulariser n.

Propriété 1.10 *(Implication)*

$$\big(p \Rightarrow q\big) \iff \big((\neg p) \vee q\big).$$

$$\big(\neg(p \Rightarrow q)\big) \iff \big(p \wedge \neg q\big).$$

Preuve

Montrons la première équivalence (la seconde s'en déduit par les règles de De Morgan sur la négation).
On utilise un raisonnement par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
\big(p \Rightarrow q\big) &\iff \big((p \wedge q) \vee (\neg p)\big) && \text{(par définition)}\\
&\iff \big((p \vee (\neg p)) \wedge (q \vee (\neg p))\big) && \text{(par distributivité)}\\
&\iff \big(V \wedge (q \vee (\neg p))\big) && \text{(principe de tiers-exclu)}\\
&\iff \big((\neg p) \vee q\big).
\end{aligned}$$

■

Explications

On voit que l'implication est vraie dans les seuls deux cas suivants : soit p est fausse, soit q est vraie.

Exemple

Soit f une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Définir avec les quantificateurs puis commenter.

1. que f est croissante,
2. que f n'est pas croissante,
3. que f est décroissante.

Solution :
f est croissante sur $\mathbf{R}$ si $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
f n'est pas croissante sur $\mathbf{R}$ si : $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \ x \leqslant y \text{ et } f(x) > f(y)$.
f est décroissante sur $\mathbf{R}$ si $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
Une fonction qui n'est pas croissante n'est donc pas nécessairement décroissante.
En effet, pour montrer qu'une fonction n'est pas croissante, il suffit de trouver un seul couple qui ne vérifie pas l'inégalité, alors que pour une fonction décroissante, il faudrait le montrer pour tous les couples (et l'inégalité est large).

Propriété 1.11 *(Contraposée)*

$$\Big(p \Rightarrow q\Big) \iff \Big(\neg\, q \Rightarrow \neg\, p\Big).$$

Exemple

La contraposée est un raisonnement subtil qui se comprend mieux sur des exemples. La contraposée de « s'il pleut, alors il y a des nuages » est « s'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas ».
Il est parfois plus simple de démontrer la contraposée que l'énoncé directement.

Preuve

La preuve est immédiate en utilisant la définition de l'implication et l'involutivité de la négation :
$(p \Rightarrow q) \iff (\neg\, p \vee q) \iff (q \vee \neg\, p) \iff (\neg(\neg\, q) \vee \neg\, p) \iff (\neg\, q \Rightarrow \neg\, p)$. ■

Exemple

Donner la contraposée de $\forall x \in \mathbf{R}, \ f(x) = 0 \Rightarrow \exists z \in \mathbf{R}, \ f(z) = 0$.
Traduire l'assertion et sa contraposée en français.
Solution :

$$\forall z \in \mathbf{R}, \ f(z) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbf{R}, \ f(x) \neq 0.$$

L'assertion initiale se traduit par
« si pour tout réel x, $f(x) = 0$, alors il existe un réel z tel que $f(z) = 0$ ».
La contraposée se traduit
« si pour tout réel z, $f(z) \neq 0$, alors il existe un réel x tel que $f(x) \neq 0$ ».

Nous reviendrons sur le raisonnement par contraposée en fin de chapitre.

H Conditions nécessaires et suffisantes

En mathématiques, on utilise souvent le vocabulaire de *condition nécessaire* et de *condition suffisante*. Cela traduit des implications.

On dit que p est une **condition suffisante** à la réalisation de q si la véracité de p implique celle de q : $p \Rightarrow q$.
Par exemple, il *suffit* qu'il pleuve pour que l'on sache qu'il y a des nuages : « pluie $\Rightarrow$ nuages ».

On dit que p est une **condition nécessaire** à la réalisation de q si q ne peut pas être vraie quand p ne l'est pas.
On remarque que c'est la réciproque de la condition suffisante : $p \Leftarrow q$ (quand q est vraie, alors p l'est aussi *nécessairement*).
Avec l'exemple précédent, il *faut* qu'il y ait des nuages pour qu'il puisse pleuvoir (ce qui ne veut pas dire qu'il pleuvra).

p est une **condition nécessaire et suffisante** à la réalisation de q si on a à la fois l'implication et sa réciproque : p et q sont équivalentes.

Exemple

Écrire avec une implication le proverbe « il n'y a pas de fumée sans feu ».
La fumée est-elle une condition nécessaire ou suffisante au feu ? La réciproque est-elle vraie ?
Solution :

$$\text{"fumée"} \Rightarrow \text{"feu"}.$$

La présence de fumée est une condition suffisante pour savoir qu'il y a du feu. Par contre, elle n'est pas nécessaire. D'après le proverbe, ce n'est pas parce qu'il y a du feu, que nous avons nécessairement de la fumée.

L'expression **il faut** indique une condition nécessaire, et **il suffit** indique une condition suffisante.

2 Synthèse : différents types de raisonnement

Nous récapitulons les différents types de raisonnement que nous venons de voir. Lorsqu'on a quelque chose à démontrer, on peut s'appuyer sur une des méthodes qui suit.

⚠ Avant d'écrire un raisonnement sur une copie, il faut **annoncer** le type de raisonnement qui sera utilisé (sauf si c'est un raisonnement déductif ou par équivalence).

Méthode *(La déduction)*

À partir d'hypothèses, arriver à la conclusion par une suite d'implications.

La déduction correspond à l'implication logique (que les anciens appelaient *syllogisme*).
Elle s'appuie sur le raisonnement « *Si... , alors...* ».

Exemple

Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Méthode *(le raisonnement par l'absurde)*

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on montre qu'il est absurde de la supposer fausse.

Pour rédiger un raisonnement par l'absurde, il faut toujours bien préciser quelle hypothèse doit donner l'absurdité.

Exemple *(Culture générale)*

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Solution :

(annonce du type de raisonnement) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe donc $(p,q)\in\mathbf{Z}^2$ premiers entre eux avec $q\neq 0$ tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

Remarque : Lorsque l'on travaille avec des fractions en arithmétique, on suppose généralement que p et q sont premiers entre eux : ils n'ont pas de diviseur commun (autre que 1 et -1).
Cette hypothèse supplémentaire n'est absolument pas restrictive car si n divise à la fois p et q, alors on pourrait simplifier la fraction par n.

On a donc $2=\frac{p^2}{q^2}$, c'est-à-dire $p^2=2q^2$.
Donc p^2 est un nombre pair, ce qui implique que p l'est aussi (en exercice).
Donc $p=2p'$ et $2q^2=(2p')^2=4p'^2$. Ainsi $q^2=2p'^2$.
q^2 est donc également pair, donc q l'est aussi.
Ainsi 2 divise à la fois p et q, ce qui est absurde par hypothèse.

Méthode *(la contraposée)*

$$(p\Rightarrow q)\iff(\neg\, q\Rightarrow\neg\, p)\,.$$

Si la conclusion est fausse, c'est que l'hypothèse ne peut pas être vraie.

Exemple

Montrer que, si $a+b$ est irrationnel alors ou a ou b est irrationnel.

Solution :

(annonce du type de raisonnement) Par contraposée, cela revient à montrer :
« si a et b sont tous les deux rationnels, alors $a+b$ est rationnel. »
On suppose donc a et b rationnels, ainsi il existe $(p,q,p',q')\in\mathbf{Z}^4$ avec $qq'\neq 0$ tels que $a=\frac{p}{q}$ et $b=\frac{p'}{q'}$. Ainsi $a+b=\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{pq'+p'q}{qq'}$ est un nombre rationnel.
On conclut donc par contraposée.

Méthode *(Disjonction des cas)*

Pour montrer qu'une propriété est vraie dans certains cas, on étudie chaque situation séparément.

Exemple

Pour $n\in\mathbf{Z}$, donner la parité de $n(n+1)$.

Solution :

Un entier est soit pair, soit impair. On va donc étudier chaque cas séparément.
1^{er} *cas : n est pair*, donc n s'écrit sous la forme $n=2k$ avec $k\in\mathbf{Z}$.
Donc $n(n+1)=2k(2k+1)$ est divisible par 2 (il s'écrit $2q$ avec $q=k(2k+1)\in\mathbf{Z}$).
Donc $n(n+1)$ est pair.
$2^{ème}$ *cas : n est impair*, donc n s'écrit sous la forme $n=2k+1$ avec $k\in\mathbf{Z}$.
Donc $n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2\,(k+1)(2k+1)$ est divisible par 2.
Donc $n(n+1)$ est pair.
Ainsi, $\forall n\in\mathbf{Z},\ n(n+1)$ est pair.

Lorsque l'expression fait intervenir des valeurs absolues, on utilise très souvent la disjonction des cas : il faut y penser.

Exemple

Montrer que $\forall x\in\mathbf{R},\ |x-1|\leqslant x^2-x+1$.

Solution :

Pour montrer ce genre de relation, on raisonne souvent par équivalence *en partant du résultat* : on montre que le résultat est équivalent à une expression qui est toujours vraie.
Par contre, lors de la rédaction sur votre copie, il faut éviter ce type d'écriture qui est maladroite. On retourne alors le raisonnement pour partir de ce que l'on sait et arriver en conclusion à ce que l'on cherche.
On rédige toujours en partant de ce que l'on sait, pour arriver à ce que l'on cherche, et non le contraire : on ne part pas de la conclusion.
Ainsi, nous allons dans un premier temps, faire le raisonnement au brouillon (en partant de la conclusion), et ensuite, on proposera une rédaction « *propre* ».
Au brouillon :

- si $x-1\geqslant 0$ (c'est-à-dire $x\geqslant 1$), alors $|x-1|=x-1$ et l'expression s'écrit :
$$x-1\leqslant x^2-x+1\iff x^2-2x+2\geqslant 0\iff (x^2-1)+1\geqslant 0.$$
Ce qui est toujours vrai.
- si $x-1\leqslant 0$ (c'est-à-dire $x\leqslant 1$), alors $|x-1|=1-x$ et l'expression s'écrit :
$$1-x\leqslant x^2-x+1\iff x^2\geqslant 0.$$

Ce qui est toujours vrai.

Rédaction au propre :

- si $x \geqslant 1$, alors $x-1 \geqslant 0$ et $|x-1| = x-1$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant (x^2-1)+1, &\text{ donc } 0 \leqslant x^2-2x+2 \\ &\text{ donc } x-1 \leqslant x^2-x+1 \\ &\text{ donc } |x-1| \leqslant x^2-x+1. \end{aligned}$$

- si $x \leqslant 1$ alors $x-1 \leqslant 0$ et $|x-1| = 1-x$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \forall x \leqslant 1,\ 0 \leqslant x^2, &\text{ donc } -x+1 \leqslant x^2-x+1 \\ &\text{ donc } |x-1| \leqslant x^2-x+1. \end{aligned}$$

Ainsi, par disjonction des cas, $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x-1| \leqslant x^2-x+1$.

Méthode *(Par analyse-synthèse)*

Pour trouver des solutions :

- **Analyse (condition nécessaire) :** on commence par supposer que l'on connait ces solutions et on en déduit des conditions qu'elles doivent vérifier.
- **Synthèse (condition suffisante) :** on montre que si un objet vérifie ces conditions, alors il est bien solution.

Ce type de raisonnement répond souvent à la question

« montrer qu'il existe un unique ... tel que ... »

ou

« trouver tous les ... tels que ... ».

Analyse (unicité) : On suppose que le x existe et on en déduit des conditions *nécessaires* sur lui. Ces conditions vont montrer qu'alors, ce x (s'il existe) est unique.

Synthèse (existence) : on va construire un objet qui vérifie les hypothèses trouvées dans l'analyse et on montera qu'il est solution (condition *suffisante*). Ceci prouvera qu'un tel objet existe.

Dans ce genre de raisonnement, on voit bien que pendant l'analyse (pour montrer l'unicité), on suppose qu'un tel objet existe, mais on n'en est pas sûr. La synthèse doit donc être rédigée pour montrer que cet objet existe bien. Si on oublie la synthèse (qui tient souvent en un mot : *trivial*), alors le raisonnement est incomplet.

Exemple *(classique à savoir refaire)*

Prouver que toute fonction $f\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Solution :

Analyse : On suppose que f s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire et on cherche des conditions nécessaires sur ces deux fonctions.

On écrit donc $f = g+h$ en supposant g paire et h impaire.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} f(x) = g(x)+h(x) \\ f(-x) = g(-x)+h(-x) = g(x)-h(x) \end{cases}.$$

Si on fait la demi-somme et la demi-différence on trouve donc

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}.$$

Donc g et h sont nécessairement de la forme ci-dessus : si elles existent, alors elles sont uniques.

Synthèse : On pose pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

g et h sont bien définies et il est trivial que $f = g+h$.

Il reste à montrer que g est paire et que h est impaire (ce qui est aussi trivial).

Donc g et h ainsi définies conviennent.

Conclusion : Toute fonction f s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

La fonction paire est $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, et la fonction impaire est $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Méthode *(Récurrence)*

Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$,

1. on montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
2. on suppose que pour un $n \in \mathbf{N}$ quelconque, $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.

On peut aussi utiliser les récurrences double, triple... ou forte.