# Trigonométrie

« Dieu donna au monde la forme la plus convenable et la plus appropriée à sa nature. [...] C'est pourquoi, jugeant le semblable infiniment plus beau que le dissemblable, il donna au monde la forme sphérique, ayant partout les extrémités également distantes du centre, ce qui est la forme la plus parfaite et la plus semblable à elle-même. »
Platon dans Timée

Ce chapitre introduit les fonctions trigonométriques en lien avec le cercle du même nom.
Avant d'être des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues... , le cosinus, le sinus et la tangente sont des objets géométriques. C'est ainsi qu'ils avaient été introduits au collège, et nous reprenons ici la même démarche : on construit ces fonctions à travers des relations dans le triangle rectangle (que l'on choisira d'hypoténuse égale à 1).
Tous les aspects analytiques (continuité, dérivabilité, monotonie... ) sont relégués à un chapitre ultérieur sur les fonctions usuelles.

## 1 Angles en radians

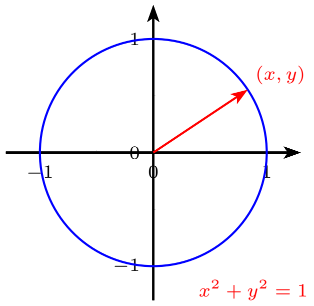
**Définition 1.1** *(Cercle trigonométrique)*

Le **cercle trigonométrique** est un cercle du plan de rayon 1 et de centre O.

**Propriété 1.2** *(Paramétrage cartésien du cercle trigonométrique)*

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, le cercle trigonométrique est décrit par l'ensemble des points :

$$\mathscr{C}(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x^2+y^2=1\right\}.$$



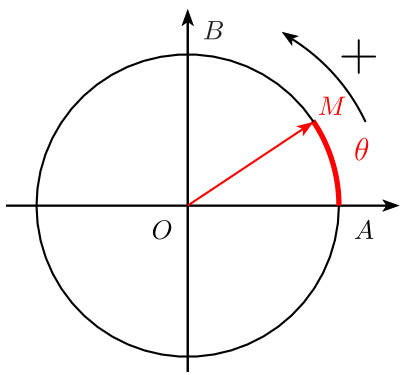

**Explications**
Ce cercle correspond aux points du plan qui sont situés à la distance 1 de l'origine : $\sqrt{x^2+y^2}=1$, ce qui est équivalent à $x^2+y^2=1$.

**Définition 1.3** *(Angle orienté)*

On considère un repère orthonormé $(O,A,B)$.

Pour un point $M(x,y)$ sur le cercle trigonométrique,
on définit l'**angle** $\theta = \widehat{AOM}$ par la longueur algébrique de l'arc de cercle entre le point $A$ et le point $M$.

Le sens positif est tel que $\widehat{AOB} = +\dfrac{\pi}{2}$.
L'angle est exprimé en **radians**.




*Remarque :* L'angle d'un point ainsi défini n'est pas unique, mais il est exprimé à $2\pi$ près.

**Explications**
C'est une façon astucieuse de mesurer un angle : sur votre disque de rayon 1, vous enroulez un fil et vous mesurez la longueur utilisée pour parcourir l'angle (en positif si vous enroulez dans le bon sens, en négatif sinon).
Ainsi, une charrette dont les roues sont de rayon 1 (et qui se déplace avec un roulement sans glissement), parcourt une longueur égale à l'angle de rotation de ses

roues.
C'est beaucoup plus simple que l'histoire des $360^o$ qui tombent du ciel sans qu'on sache trop pourquoi. La difficulté vient néanmoins de la longueur de fil nécessaire pour faire un tour exact : $2\pi$ qui est un nombre irrationnel. Et cela, avouons que ce n'est pas très pratique.
La non unicité de l'argument provient du fait que pour aller de 0 à $z$, je peux rajouter autant de tours complets que je le souhaite dans un sens ou dans l'autre. Cela revient à ajouter ou enlever autant de fois le nombre $2\pi$.

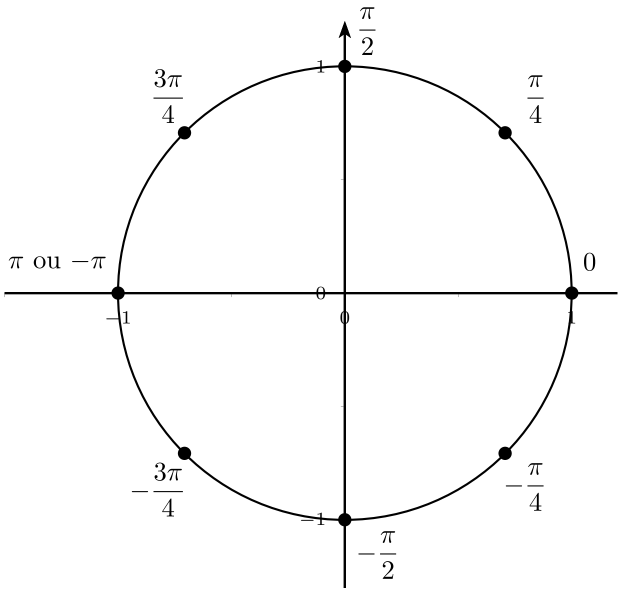
Le sens positif appelé aussi **sens trigonométrique** est opposé au sens des aiguilles d'une montre.

**Propriété 1.4** *(Correspondance avec les degrés)*

Pour passer d'une mesure en degrés à une mesure en radians, on multiplie l'angle en degrés par $\dfrac{2\pi}{360}$.

*Remarque :* Les unités sont proportionnelles.

**Quelques angles remarquables :**




On complètera cette liste d'angles remarquables un peu plus tard.

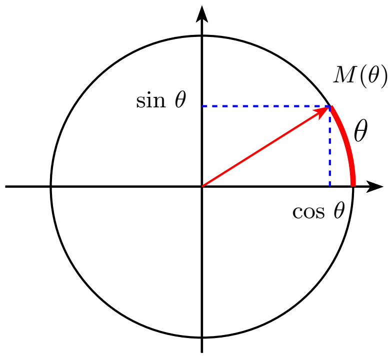
## 2 Fonctions trigonométriques

Nous présentons ici les bases de la trigonométrie. Ces notions seront complétées dans le chapitre sur les nombres complexes.

**Définition 2.1** *(cosinus et sinus)*

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on définit

- le **cosinus** de $\theta$ par l'abscisse du point du cercle trigonométrique d'angle $\theta$,
- le **sinus** de $\theta$ par l'ordonnée du point du cercle trigonométrique d'angle $\theta$.




### Explications

Ces définitions sont tout à fait cohérentes avec celles qui ont été vues au collège et au lycée. On y apprend par exemple que

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

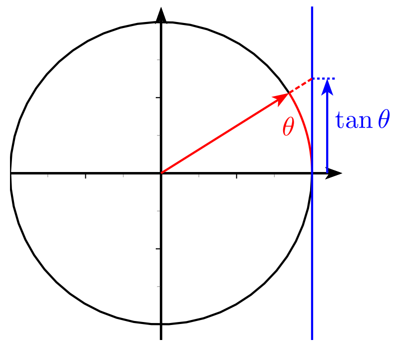
C'est vrai, mais c'est trop compliqué pour nous, alors on se contente de n'apprendre la formule que lorsque la longueur de l'hypoténuse vaut 1. C'est-à-dire, lorsque l'hypoténuse est le rayon du cercle trigonométrique. Le côté adjacent correspond alors à la partie réelle sur l'axe des abscisses.
Pour retrouver la formule du collège avec une longueur d'hypoténuse quelconque, on applique le théorème de Thalès. Il en est de même pour le sinus.

**Définition 2.2** *(Tangente)*

Pour[1] $\theta \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$,

on considère la droite d'angle $\theta$ par rapport à l'axe des abscisses,

et on définit la **tangente** de $\theta$ par l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe vertical $x = 1$.




1. La droite d'angle $\theta$ ne doit pas être verticale pour pouvoir couper l'axe $x = 1$.

## 3 Propriétés élémentaires

Voici à présent quelques propriétés géométriques élémentaires que l'on retrouve très simplement en dessinant le cercle trigonométrique. En particulier, les dernières ne sont pas forcément à connaître par cœur, mais à savoir retrouver très rapidement avec un petit croquis au brouillon.

**Propriété 3.1** *(Cosinus : propriétés trigonométriques élémentaires)*

1. Le cosinus est défini sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$ : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ -1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.
2. Le cosinus est $2\pi$-périodique : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$.

   Par conséquent : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z},\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$.
3. Le cosinus est *pair* : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \cos(-\theta) = \cos\theta$.
4. $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$,
   $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$.

**Propriété 3.2** *(Sinus : propriétés trigonométriques élémentaires)*

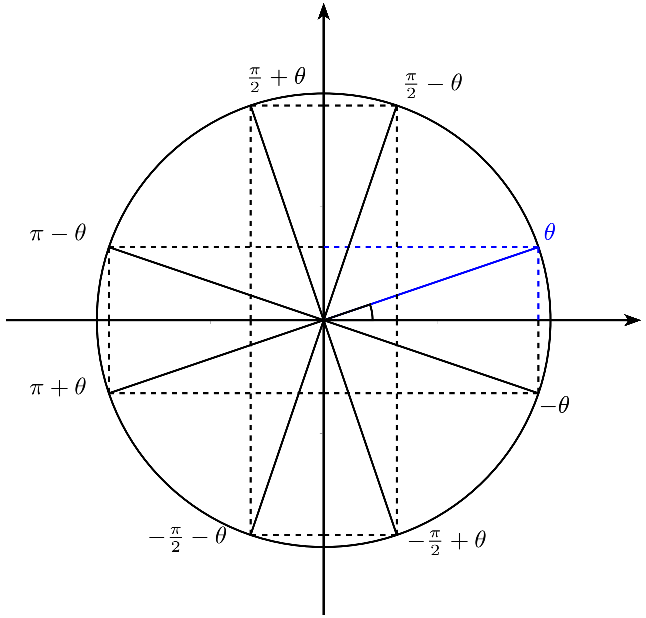
1. Le sinus est défini sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$ : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ -1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1$.
2. Le sinus est $2\pi$-périodique : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$.

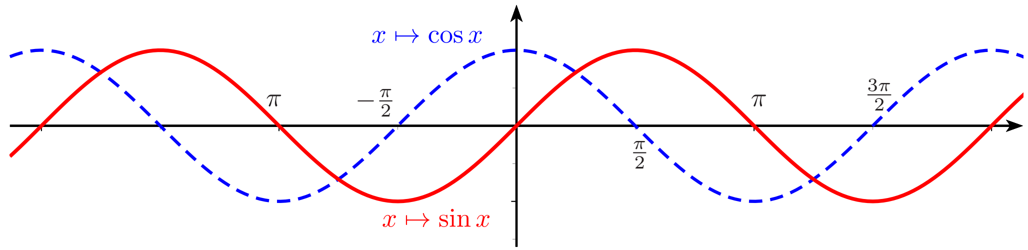
   Par conséquent : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z},\ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$.
3. Le sinus est *impair* : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \sin(-\theta) = -\sin\theta$.
4. $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$,
   $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$.

**Propriété 3.3** *(Relations entre sinus et cosinus)*

$\forall \theta \in \mathbf{R}$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta.$$



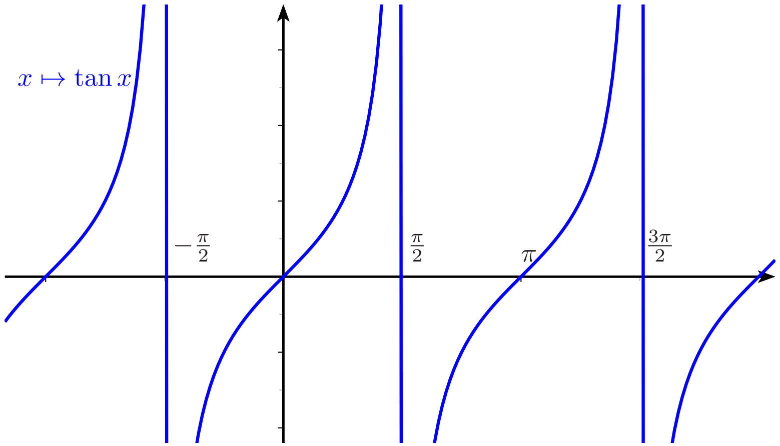

**Explications**

La translation de $\pi/2$ entre les deux courbes s'interprète en voyant que si on ajoute $\pi/2$, cela revient à faire un quart de tour, et l'axe des abscisses devient celui des ordonnées.

En terme de changement de coordonnées, la courbe de cosinus s'obtient par celle du sinus avec une translation suivant $(Ox)$ de $-\frac{\pi}{2}$. Cela traduit la relation $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (pour calculer $\cos(x)$, on calcule le sinus $\frac{\pi}{2}$ plus loin).

**Propriété 3.4** *(Tangente : propriétés trigonométriques élémentaires)*

1. La tangente est définie sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.
2. La tangente est $\pi$-périodique :
$$\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}, \quad \tan(\theta + \pi) = \tan\theta\,.$$
Par conséquent : $\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},\ \forall k \in \mathbf{Z},\ \tan(\theta + k\pi) = \tan\theta\,.$
3. La tangente est *impaire* : $\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},\ \tan(-\theta) = -\tan\theta\,.$
4. $\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta,$
$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta.$
5. $\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}\,.$
6. $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \tan\theta = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan\theta = -\infty.$




*Nota :* Les lignes verticales ne correspondent pas au tracé de la fonction, mais à ses asymptotes verticales.

**Preuve**

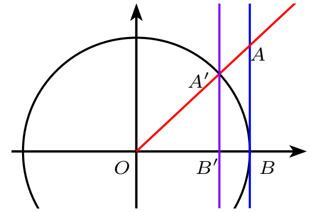
Toutes les preuves sont élémentaires, à l'exception de la formule $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ que l'on justifiera aisément avec la propriété qui suit. ∎

**Propriété 3.5** *(lien entre tangente et sinus,cosinus)*

$\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\},$
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

**Preuve**

On applique le théorème de Thalès dans le triangle $OAB$.
Pour $A'B' \neq 0$ (angle non nul à $\pi$ près).
$(AB) \parallel (A'B')$, donc




$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Donc, $\tan(\theta) = AB = \dfrac{OB}{OB'} A'B'$
$$= \frac{1}{\cos(\theta)} \sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$
∎

## 4 Formules trigonométriques

**Théorème 4.1** *(Théorème de Pythagore)*

$\forall \theta \in \mathbf{R},$ $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\,.$$

**Utilisation de cette formule :**
Cette formule est particulièrement utile sous la forme
$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta} \qquad \text{ou} \qquad \sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}\,.$$

⚠ Attention, le signe devant la racine dépend de $\theta$. Il ne faut pas l'oublier. On peut s'aider du cercle trigonométrique pour le déterminer.

**Exemple**

Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.
Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, alors $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$.

**Propriété 4.2** *(Formules trigonométriques d'addition)*

$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2,$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

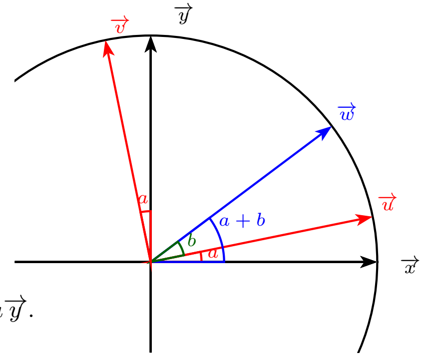
### Preuve

On raisonne géométriquement dans le plan $\mathbf{R}^2$.
On note $\overrightarrow{x}$ le vecteur unitaire $(1,0)$ qui oriente l'axe des abscisses et $\overrightarrow{y}$ le vecteur $(0,1)$ qui oriente l'axe des ordonnées.
On définit

$$\overrightarrow{u} = \cos a\,\overrightarrow{x} + \sin a\,\overrightarrow{y}$$

qui correspond au point d'affixe complexe $\cos a + i \sin a$.
On définit le vecteur orthogonal

$$\overrightarrow{v} = \cos(a+\frac{\pi}{2})\overrightarrow{x}+\sin(a+\frac{\pi}{2})\overrightarrow{y} = -\sin a\,\overrightarrow{x}+\cos a\,\overrightarrow{y}.$$




$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme un nouveau repère orthonormé tourné d'un angle $a$ par rapport au repère initial $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.
On pose $\overrightarrow{w}$ le vecteur unitaire d'angle $a+b$ : $\overrightarrow{w} = \cos(a+b)\overrightarrow{x} + \sin(a+b)\overrightarrow{y}$.
Le vecteur $\overrightarrow{w}$ fait un angle $b$ par rapport au repère $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Dans ce nouveau repère, il s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= \cos b\,\overrightarrow{u} + \sin b\,\overrightarrow{v} = \cos b\,(\cos a\,\overrightarrow{x} + \sin a\,\overrightarrow{y}) + \sin b\,(-\sin a\,\overrightarrow{x} + \cos a\,\overrightarrow{y})\\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)\,\overrightarrow{x} + (\sin a \cos b + \cos b \sin a)\,\overrightarrow{y}.\end{aligned}$$

Donc par identification avec la première expression de $\overrightarrow{w}$, on trouve bien

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

■

*Remarque :* Il est beaucoup plus facile de trouver la formule formule précédente à partir des exponentielles complexes : $e^{i(a+b)} = e^{ia}\,e^{ib}$.
Le problème vient de ce que, dans ce cours, nous allons justement utiliser la formule de duplication pour démontrer cette propriété des exponentielles complexes.
Il faut donc trouver une porte de sortie pour ne pas tourner en rond. C'est la raison pour laquelle nous adoptons ici cette preuve.

**Corollaire 4.3** *(Formules de l'angle double)*

$\forall \theta \in \mathbf{R}$,

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta.$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\,\theta\cos\,\theta.$$

### Preuve

On applique simplement les formules d'addition et pour la première relation, on utilise Pythagore : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ en gardant soit le cosinus, soit le sinus. ■

Les formules des deux corollaires qui suivent se retrouvent très rapidement en refaisant la preuve si nécessaire.

**Corollaire 4.4** *(Formules trigonométriques de soustraction)*

$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

### Preuve

On remplace $b$ par $-b$ dans la formule d'addition et on utilise les propriétés de parité des fonctions cosinus et sinus. ■

**Corollaire 4.5** *(Formules de linéarisation)*

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \qquad \sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right).$$

### Preuve

Immédiat avec les formules précédentes. Par exemple pour la première formule, on repère que $\cos(a)\cos(b)$ apparaît dans les formules $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. On obtient alors

$$\begin{array}{rll} & \cos(a+b) & = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ + & \cos(a-b) & = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\ \hline = & \cos(a+b) + \cos(a-b) & = 2\cos(a)\cos(b).\end{array}$$

On fait de même pour les autres. ■

Les formules qui suivent ne sont pas à connaître par coeur, mais à savoir retrouver (et sont indiquées comme telles dans le programme officiel).

**Corollaire 4.6** *(Formules de factorisation)*

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

### Preuve

*Ces formules se retrouvent aussi facilement avec l'exponentielle complexe.*
Pour les trois premières, ce sont les formules de linéarisation appliquées à $a = \frac{p+q}{2}$ et

$b = \frac{p-q}{2}$.
On remarque que $\sin(p) - \sin(q)$ s'obtient en remplaçant $q$ par $-q$, donc en échangeant le cosinus et le sinus dans le résultat. ■

**Propriété 4.7** *(Formules de duplication pour la tangente)*

$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$ (sous reserve d'existence des quantités ci-dessous)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

**Preuve**
L'idée est d'utiliser les formules de duplication pour le cosinus et le sinus puis de faire apparaître à nouveau la tangente par des factorisations.

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}.$$

Puis en factorisant par $\cos(a)\cos(b)$ on obtient le résultat.
La deuxième égalité s'obtient directement en remplaçant $b$ par $-b$. ■

**Propriété 4.8**

$\forall \theta \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$,

$$1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

**Preuve**
Immédiat avec $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ et Pythagore. ■

Les formules qui suivent (avec l'angle moitié) ne sont pas explicitement au programme. Il est cependant conseillé de se souvenir de leur existence et d'être capable de les retrouver rapidement.
Les connaître par cœur est un avantage, mais n'est pas exigé, et cela ne dispense pas de savoir les prouver à la demande de l'examinateur.

**Propriété 4.9** *(Formule avec la tangente de l'angle moitié)*

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, sous réserve d'existence, on note $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Lorsque les quantités existent :

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

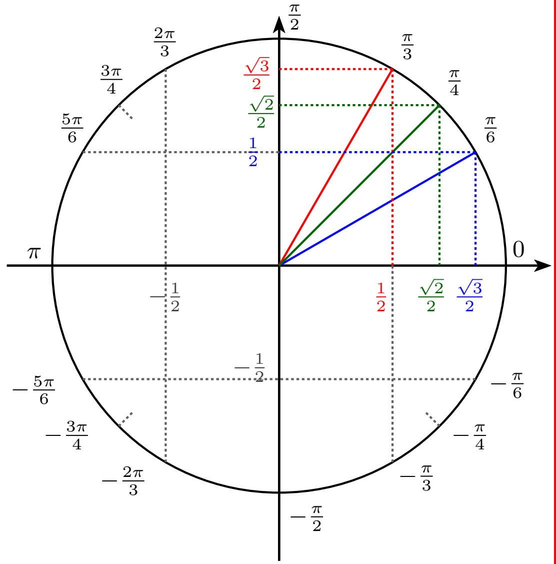
**Preuve**
Comme pour la preuve précédente, on utilise la formule de duplication des angles pour la fonction trigonométrique considérée et on factorise pour faire apparaître la tangente on utilise la formule $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$.
Pour le cosinus : $\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
Pour le sinus : $\sin(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$. ■

## 5 Angles remarquables

**Propriété 5.1** *(Angles remarquables)*

Quelques mesures à connaître (en s'aidant du cercle)

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |




**Preuve**
Pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ les résultats sont triviaux.
Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, on est sur la bissectrice et on a donc $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$.
Or $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,
on trouve alors (comme les deux sont positifs) : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, on sait que le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $A(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$ est isocèle en $(0,0)$, or l'angle au sommet vaut $\frac{\pi}{3}$, il est donc équilatéral.
La hauteur issue de $A$ coupe donc le côté opposé en son milieu : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
On en déduit la valeur du sinus par Pythagore.
Enfin, $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$. On trouve donc les valeurs cherchées par les relations élémentaires de trigonométrie. ■

Dans les formules pour le sinus, on remarque l'incrémentation sous la racine $1 = \sqrt{1}$ puis $\sqrt{2}$ puis $\sqrt{3}$. On a la même chose dans l'autre sens pour le cosinus.

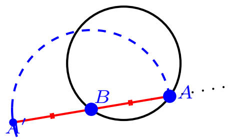
**Exemple** *(Pour se faire plaisir...)*
*Et maintenant, vous ne devriez plus avoir la moindre difficulté à couper une pizza en trois parts égales ! Comment faites-vous ?*
**Solution :**
Le premier problème est de trouver le centre de la pizza.
Pour cela on peut utiliser la notion de cercle circonscrit au triangle.

En effet, si on arrive à inscrire un triangle rectangle dans la pizza, le centre correspondra au milieu de l'hypoténuse.
On procède donc ainsi :

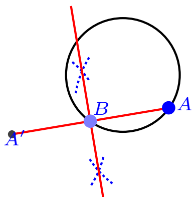
1. Obtenir un angle droit sur un bord de la pizza.
2. Obtenir le milieu de l'hypoténuse correspondant au triangle rectangle obtenu.
3. Obtenir la moitié du rayon.
4. En déduire les angles $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.
5. Nettoyer la table de la sauce tomate qu'on a mis de partout et se faire livrer trois petites pizza individuelles.

Réalisons donc virtuellement les premiers points :

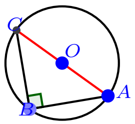
1. On trace une droite qui coupe le cercle extérieur de la pizza en deux points. On prolonge cette droite à l'extérieur du cercle de la même distance qu'entre les deux bords de la pizza (facile avec un fil par exemple pour reporter la longueur).



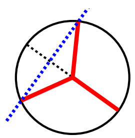

Ensuite, on trace la médiatrice comme on l'a appris au collège, ce qui donne l'angle droit.




2. On trace ensuite le triangle rectangle et on obtient le milieu de l'hypoténuse (avec la médiatrice). C'est le centre du cercle.




3. On trace à présent la médiatrice de $[OC]$ qui coupe le cercle en deux points.
La pizza est partagée.



## 6 Fonctions circulaires réciproques

**Théorème 6.1**

Pour tout $c \in [-1,1]$, l'équation $\cos x = c$ admet une unique solution dans $[0,\pi]$.
On note cette solution : $x = \operatorname{Arccos}(c)$

Pour $c \notin [-1,1]$, l'équation $\cos x = c$ n'admet pas de solution.

Pour tout $s \in [-1,1]$, l'équation $\sin x = s$ admet une unique solution dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On note cette solution : $x = \operatorname{Arcsin}(s)$

Pour $c \notin [-1,1]$, l'équation $\sin x = c$ n'admet pas de solution.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'équation $\tan x = t$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On note cette solution : $x = \operatorname{Arctan}(t)$

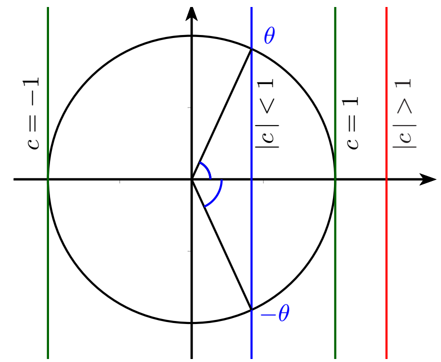
*Remarque :* Sur certaines calculatrices, la fonction Arccos est notée $\cos^{-1}$.
De même pour Arcsin et Arctan.

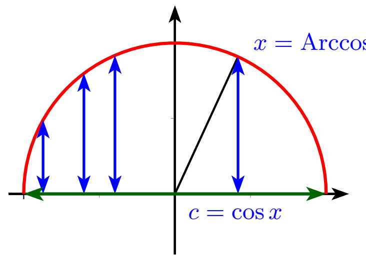
⚠ Il faut apprendre les intervalles correspondant à chacune des équations. À la fois pour l'inconnue et pour la solution. La propriété 6.2 précisera mieux leur importance.

### Explications

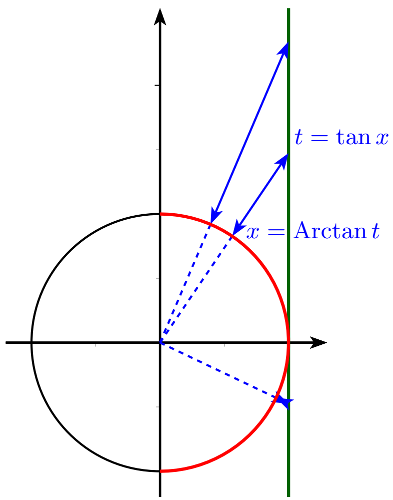
Géométriquement, résoudre $\cos x = c$ dans $[0,\pi]$, c'est chercher l'ensemble des points du cercle dont l'abscisse est égale à $c$ et donner leur argument.
Cela revient à tracer une droite verticale d'abscisse $c$ dans le plan et étudier l'intersection avec le cercle trigonométrique. On observe que :

- Pour $|c| > 1$, la droite ne coupe pas le cercle, il n'y a pas de solution.
- Pour $c = 1$, la droite coupe le cercle en un seul point $\theta = 0[2\pi]$. Si on ne prend que l'argument principal, il n'y a qu'une seule solution : $\theta = 0$.
- Pour $c = -1$, la droite coupe le cercle en un seul point $\theta = \pi[2\pi]$. Si on ne prend que l'argument principal, il n'y a qu'une seule solution : $\theta = \pi$.
- Pour $|c| < 1$, la droite coupe le cercle en deux points $\theta$ et $-\theta$.
  Pour avoir l'unicité, on ne prend que la solution correspondant à l'argument principal dans la partie supérieure du cercle.




$x \mapsto \cos x$ réalise une *bijection* de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, c'est-à-dire qu'il envoie chaque point de $[0, \pi]$ à un unique point de $[-1, 1]$ de sorte à créer des paires. On peut ainsi identifier le $x \in [0,\ \pi]$ (sur le demi-cercle supérieur) à son abscisse $\cos(x)$. La fonction cosinus « écrase » donc le demi-cercle sur l'axe des abscisses en faisant correspondre chaque point du demi-cercle à celui qui lui est verticalement aligné. Réciproquement, la fonction Arccos va « gonfler » l'axe des abscisses pour le mettre sur le demi-cercle. On peut considérer que la portion $[-1,\ 1]$ de l'axe des abscisses et le demi-cercle supérieur sont un seul objet que l'on déforme comme un élastique avec les fonctions cosinus et arccosinus.
On fait de même horizontalement avec le sinus, et pour la tangente, on utilise les droites qui passent par l'origine.




⚠ Pour la tangente, l'intervalle est ouvert en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. L'application tangente n'est pas définie aux deux extrémités.

**Propriété 6.2** *(Composition des fonctions circulaires et réciproques)*

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in [-1,1], & \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x \\
\forall x \in [-1,1], & \cos(\operatorname{Arccos} x) = x \\
\forall x \in \mathbf{R}, & \tan(\operatorname{Arctan} x) = x \\
\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x \\
\forall x \in [0, \pi], & \operatorname{Arccos}(\cos x) = x \\
\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, & \operatorname{Arctan}(\tan x) = x
\end{array}$$

Par contre, en général pour $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Arccos}(\cos x) \neq x$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin x) \neq x$

### Explications

En général, $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) \neq x$. En effet, lorsqu'on passe au cosinus, on enroule $\mathbf{R}$ tout entier sur le cercle trigonométrique en faisant une infinité de tours pour ne garder ensuite que l'abscisse. Ainsi, plusieurs points se trouvent superposés (c'est le principe de « modulo $2\pi$ »). Ils ont le même cosinus et on perd irrémédiablement de l'information puisque des éléments différents donnent la même valeur.
L'arccosinus ne permet par de retrouver cette information perdue et il se contente donc de ne donner que l'argument principal, sans dire à quel numéro de tour correspondait le $x$.
Ainsi, il faut bien penser que le cosinus (ou le sinus) fait perdre de l'information et que lorsque l'on compose une égalité par cette fonction, alors on n'a qu'une implication, mais pas l'équivalence (sauf justification particulière).
**Rappelez-vous :**

- on a toujours : $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$
  (car la définition de Arccos impose à $x$ d'être déjà dans un intervalle bien limité).
- par contre, en général : $\operatorname{Arccos}(\cos x) \neq x$
  (car la définition de cos ne donne pas de limitation sur les valeurs de $x$).

### Exemple

$\operatorname{Arccos}(\cos x) = 0 \iff x = 0\ [2\pi]$.
$\cos(\operatorname{Arccos} x) = 0 \iff x = 0$.

*Remarque :* La notation $[2\pi]$ signifie que l'égalité est vraie *modulo* $2\pi$, c'est-à-dire à $2\pi$ près : on peut ajouter ou soustraire d'un côté ou de l'autre de l'égalité autant de fois que l'on veut le terme $2\pi$ sans modifier cette égalité.

### Exemple

Résoudre dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puis sur $\mathbf{R}$, $\tan x = 1$.
**Solution :**
L'unique solution dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $x = \frac{\pi}{4}$.
L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ tout entier est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

**Exemple** *(Utiliser les formules trigonométriques)*

Simplifier l'expression suivante pour tout $x \in \mathbf{R}$.

$$\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

**Solution :**

On remarque déjà que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| \leqslant \sqrt{1+x^2}$, donc $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in [-1, 1]$ et l'expression est bien définie pour tout $x \in \mathbf{R}$.
Or, tout $x \in \mathbf{R}$ peut s'écrire sous la forme $\tan(t)$ avec $t = \text{Arctan}\,(x)$.
Ainsi, on obtient

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\tan(t)}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} = \tan(t)\,|\cos(t)| = \sin(t)\,\frac{|\cos(t)|}{\cos(t)}.$$

Or, $t = \text{Arctan}\,(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(t) > 0$.
On trouve ainsi : $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin(t)$.
Comme $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a donc bien $\text{Arcsin}\,(\sin(t)) = t$.
On a donc montré que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \text{Arctan}\,(x).$$

**Méthode** *(Quelques idées...)*

- $1+x^2$ doit faire penser à la formule $1+\tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$.
- $1-x^2$ doit faire penser à la formule $\sin^2(t) = 1-\cos^2(t)$ ou à $\cos^2(t) = 1-\sin^2(t)$.
- $\dfrac{2t}{1-t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ doivent faire penser aux formules avec $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
- ...

**Théorème 6.3**

Pour $(c, s) \in \mathbf{R}^2$, on définit le système :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} \cos x = c \\ \sin x = s. \end{cases}$$

Si $c^2 + s^2 \neq 1$, alors $(S)$ n'a pas de solutions.
Si $c^2 + s^2 = 1$, alors $(S)$ a une unique solution $x_0$ dans $]-\pi, \pi]$, et l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ est :

$$\mathscr{S} = \{x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

**Explications**

La droite horizontale $y = s$ doit couper la droite verticale $x = c$ sur le cercle trigonométrique pour qu'il y ait une solution. On obtient alors l'angle modulo $2\pi$.

**Méthode** *(Calcul de la phase)*

En physique, on obtient souvent des expressions du type $G = A\cos\theta + B\sin\theta$ que l'on veut exprimer sous la forme $r\cos(\theta - \varphi)$.
$\varphi$ correspond au décalage de phase (entre l'élément étudié et la source en $\cos\theta$).
Pour cela

- On cherche l'amplitude du signal $r = \sqrt{A^2+B^2}$.
- On factorise par $r$ : $G = r\,(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta))$,
- Or $\alpha^2+\beta^2 = 1$, donc il existe $\varphi \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = \cos\varphi$ et $\beta = \sin\varphi$, donc

$$G = r\,(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta - \varphi).$$

On peut trouver $\varphi$ avec $\varphi = \text{Arctan}\,\left(\frac{B}{A}\right)$ si $A > 0$, et $\varphi = \pi + \text{Arctan}\,\left(\frac{B}{A}\right)$ si $A < 0$.

**Preuve**

On suppose $r > 0$.

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{A}.$$

Si $A > 0$, alors $\cos(\varphi) = \alpha > 0$ et on peut choisir $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\text{Arctan}\,(\tan\varphi) = \varphi$ d'où l'expression donnée dans la méthode.
Si $A < 0$, alors $\cos(\varphi) = \alpha < 0$ et on peut choisir $\varphi \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, donc $\text{Arctan}\,(\tan\varphi) = \text{Arctan}\,(\tan(\varphi - \pi)) = \varphi - \pi$. D'où l'expression.
Pour $A = 0$, transformer l'expression est trivial. ∎

*Remarque :* Si on cherche $\varphi$ tel que $\alpha = \sin\varphi$ et $\beta = \cos\varphi$, alors on obtiendra une expression en sinus.

**Exemple**

Montrer que l'application $f\ : x \mapsto 3\cos x + 4\sin x$ admet un maximum sur $\mathbf{R}$ et donner sa valeur.

**Solution :**

On pose $r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, et $\phi = \text{Arctan}\,\left(\frac{4}{3}\right)$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 5\cos(x - \varphi)$.
Donc, $f$ admet 5 comme maximum sur $\mathbf{R}$ (ce maximum étant atteinte en $\varphi + 2k\pi$, pour $k \in \mathbf{Z}$).

**Exemple**

Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$.

**Solution :**

On met l'expression sous la forme d'un cosinus avec phase : On pose $r = \sqrt{3+1} = 2$.
Le système est donc équivalent à $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit : $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ici $\varphi = -\text{Arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\sin\varphi < 0$)
Les solutions de l'équation sont donc
$\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$

Ces formules ne sont pas au programme, mais il est bon de les connaître.
La preuve proposée ici illustre les techniques déjà vues. Cependant, les études de fonctions nous donneront une autre méthode plus efficace pour retrouver ce résultat.

**Exemple** *(Formules remarquables)*

$$\forall x \in [-1,\, 1]\,,\ \text{Arccos}\ (x) + \text{Arcsin}\ (x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ \text{Arctan}\ (x) + \text{Arctan}\ \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\text{sgn}(x),$$

où $\text{sgn}(x)$ désigne le signe de $x$, c'est-à-dire $\text{sgn}(x)$=1 si $x > 0$ et $\text{sgn}(x) = -1$ sinon.

**Solution :**

Pour $x \in [-1,\, 1]$,
$\cos(\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x) = \cos(\text{Arccos}\, x)\cos(\text{Arcsin}\, x) - \sin(\text{Arccos}\, x)\sin(\text{Arcsin}\, x)\,.$
Or, $\text{Arcsin}\ (x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\text{Arcsin}\ (x)) \geqslant 0$,
ainsi $\cos(\text{Arcsin}\ (x)) = +\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}\ (x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
De même, $\text{Arccos}\ (x) \in [0,\, \pi]$, donc $\sin(\text{Arccos}\ (x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos}\ (x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
Ainsi on obtient $\cos(\text{Arccos}\ (x) + \text{Arcsin}\ (x)) = x\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} = 0$.
Il existe donc $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{Arccos}\ (x) + \text{Arcsin}\ (x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Or, $\text{Arccos}\ (x) \in [0,\, \pi]$ et $\text{Arcsin}\ (x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\text{Arccos}\ (x) + \text{Arcsin}\ (x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Mais, on ne peut pas avoir simultanément, $\text{Arccos}\ (x) = 0$ et $\text{Arcsin}\ (x) = -\frac{\pi}{2}$, donc la seule solution possible est $\text{Arccos}\ (x) + \text{Arcsin}\ (x) = \frac{\pi}{2}$.

Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on peut écrire $x = \tan(u)$, avec $u \in \left]0,\, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan(u)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$. En composant avec la fonction arctan définie sur $\mathbf{R}$,
on trouve $\text{Arctan}\ \left(\frac{1}{x}\right) = \text{Arctan}\ \left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\ (x)\right)\right).$
Donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\text{Arctan}\ \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\ (x) + k\pi.$$

Donc

$$\text{Arctan}\ \left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\ (x) = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Si $x > 0$, alors $\text{Arctan}\ \left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\ (x) \in [0,\, \pi[$, donc $k = 0$.
On trouve de même pour $x < 0$, avec la solution dans $]-\pi,\, 0[$ et on obtient donc $k = -1$, c'est-à-dire $\text{Arctan}\ (x) + \text{Arctan}\ \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

## 7 Fonctions circulaires

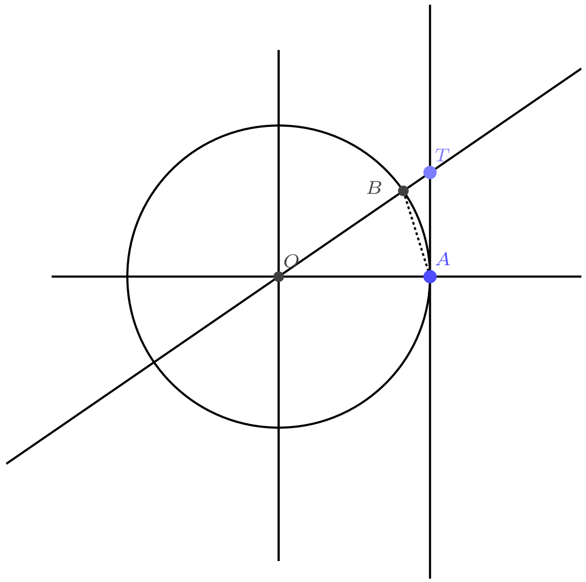
**Lemme 7.1**

$$\forall x \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right[\,,\ x \leqslant \tan(x)\,.$$

$$\forall x \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right[\,,\ x\cos(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

**Preuve**

On note $x$ l'angle $\widehat{AOX}$ et on compare les surfaces :
L'aire du secteur de disque $0AB$ est comprise entre les aires des deux triangles $OAB$ et $OAT$.




$$\frac{1}{2}OA \cdot \sin(x)\ \frac{x}{2}OA \leqslant \frac{1}{2}OA \cdot OT.$$

Ce qui donne, après multiplication par 2 :

$$\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)\,.$$

La deuxième partie de l'expression donne la première inégalité cherchée.
Or $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, donc en multipliant par $\cos(x) \geqslant 0$ et en divisant par $x > 0$, ce qui ne modifie par l'ordre, on trouve

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x}.$$

On trouve donc

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

∎

**Propriété 7.2** *(Inégalité remarquable)*

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|\,.$$

### Preuve

On a vu que pour $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x$, ce qui prouve l'inégalité.
Pour $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, on a $-x \leqslant -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \leqslant x$.
Et par imparité, on obtient l'inégalité sur $\mathbf{R}$. ∎

**Lemme 7.3**

sin est dérivable en 0 de dérivée : 1.
cos est dérivable en 0 de dérivée : 0.

### Preuve

⋆ $\forall h > 0$,

$$\frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h}.$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, donc par encadrement d'après le lemme précédent, on trouve

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Par imparité de la fonction sin, on trouve également :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Ce qui prouve la dérivabilité et la valeur du nombre dérivé pour sinus.
⋆ Pour $h \in ]-\pi,\ \pi[$, on remarque que $\cos(h) + 1 > 0$, donc

$$\frac{\cos(h) - \cos(0)}{h} = \frac{\cos(h) - 1}{h} = -2\frac{\sin^2(h/2) - 1}{h} = -\frac{\sin(h/2) - 1}{h/2} \times \sin(h/2)$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \sin(h/2) = 0$. donc par produit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0.$$

∎

**Théorème 7.4**

sin est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée cos.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \sin'(x) = \cos(x)\,.$$

cos est dérivable sur $\mathbf{R}$ de dérivée $-\sin$.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)\,.$$

tan est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

$$\forall x \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

### Preuve

⋆ Soit $x \in \mathbf{R}$, $h \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x)\left(\frac{\cos(h) - 1}{h}\right) - \frac{\sin(h)}{h}\cos(x)\,.$$

D'après les calculs de dérivées précédents, on trouve donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)\,.$$

⋆ Soit $x \in \mathbf{R}$, $h \in \left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h}.$$

D'après les limites données dans le lemme, on trouve à nouveau :

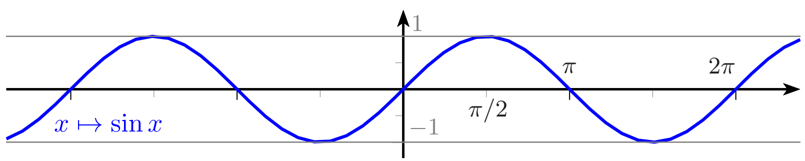
$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \sin(x)\,.$$

⋆ On utilise la règle de dérivation d'un quotient (valable tant que le numérateur et le dénominateur sont dérivables et que ce dernier ne s'annule pas) :

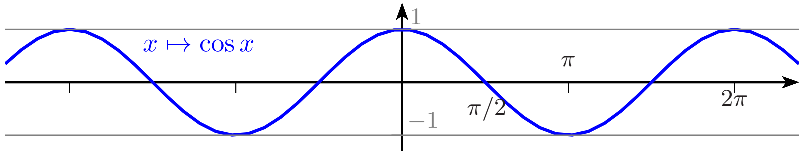
$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,.$$

∎

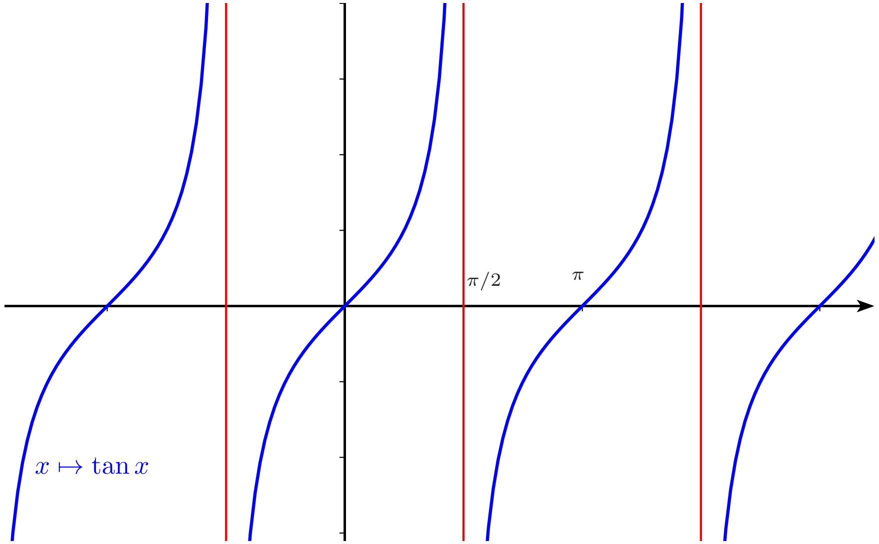
### Représentations graphiques.




Fonction sinus




Fonction cosinus




Fonction tangente