Les nombres réels

« Il se peut qu'il n'y ait aucune utilité à savoir que π est irrationnel, mais si nous pouvons le savoir, il serait certainement intolérable de ne pas le savoir. »
E. C. Titchmarsh (1899-1963)

1 En guise d'introduction

La construction des nombres réels n'est pas au programme. Nous en donnons cependant l'idée (sans détails théoriques) qui est riche d'enseignements. Cette construction illustre une méthode mathématique que l'on pourrait résumer ainsi :

« Ça ne marche pas ? Construisons donc un nouveau cadre dans lequel ça marche. »

- On commence par construire l'ensemble le plus *naturel* qui soit : $\mathbf{N}$.
  Il apparaît dès que l'on commence à compter. Cet ensemble est infini, et pour deux entiers quelconques, leur somme sera toujours un entier naturel.

- Vient ensuite le problème des dettes. Il faut introduire les entiers relatifs : $\mathbf{Z}$.
  Cela revient à *symétriser* l'ensemble des entiers par rapport à 0. Cette *« symétrisation »* de $\mathbf{N}$ permet de construire la soustraction, opération opposée à l'addition, sans sortir de ce nouvel ensemble de nombres.

- Puis, c'est l'héritage. À moins de tout transmettre à l'aîné, on partage la somme entre tous les enfants : c'est un quotient d'entiers, $\mathbf{Q}$. De même que nous avons construit $\mathbf{Z}$ pour avoir une soustraction qui fonctionne, on a construit $\mathbf{Q}$ pour avoir une division qui ne fasse pas sortir de cet ensemble.
  En effet, on avait déjà une multiplication entre les entiers relatifs, mais en général, le quotient de deux entiers relatifs n'est plus un nombre relatif. Grossir l'ensemble des nombres pour y placer toutes les fractions résout ce problème (c'est le plus petit ensemble pour lequel ça marche).

- Le passage à la réalité $\mathbf{R}$ commence par un meurtre.
  Intuitivement, lorsqu'on a construit $\mathbf{Q}$, on a du mal à voir ce que l'on pourrait faire de plus. On arrive déjà à avoir des nombres aussi précis que l'on veut (infiniment proches les uns des autres). On peut les additionner, soustraire, multiplier, diviser... C'est une structure algébrique très riche : on parle de *corps des fractions*.
  Mais Pythagore passe par là et met tout par terre. Le pythagoricien Hippase de Métaponte trace un triangle rectangle dont les deux cathètes[1] valent 1 et il démontre que l'hypoténuse ne peut pas s'écrire comme fraction de deux entiers : ce n'est pas un nombre rationnel, $\sqrt{2}$ est incommensurable.
  D'après la légende, le scandale fut énorme car ce résultat entrait en contradiction avec la philosophie pythagoricienne. Hippase de Métaponte fut donc jeté à la mer par ses condisciples et se noya.

  Le XIX$^{\text{ème}}$ siècle fut marqué par la redéfinition des mathématiques sur des bases formelles. On s'intéressa alors à la définition de $\mathbf{R}$.
  On raisonna comme si $\mathbf{Q}$ représentait un espace poreux, dont il fallait combler les interstices. Il existe plusieurs méthodes pour cela. Les deux plus connues sont

  – les coupures de Dedekind. Cette méthode revient à couper $\mathbf{Q}$ en deux et à placer un nombre à l'emplacement de la coupure. De cette façon, on arrive à placer un nombre *irrationnel* entre deux nombres rationnels.

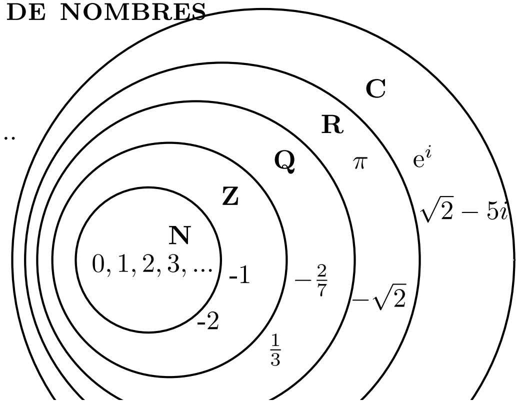
  – les suites de Cauchy. Cela revient à faire converger des suites de nombres rationnels vers ces nombres manquants.

- Pour finir, on peut évoquer les nombres complexes : $\mathbf{C}$ qui viennent simplement de l'agacement des mathématiciens à ne pas avoir de solutions à l'équation $x^2 = -1$. Cela les contrariait pour résoudre les équations de degré 3 et il était désagréable de mettre à part le cas $\Delta < 0$ pour la résolution des équations du second degré. Initialement, comme ce nombre n'était qu'une vue de l'esprit pour permettre certains calculs, on qualifia donc i de nombre « *imaginaire* ». Mais dans peu de chapitres, il n'aura plus rien d'imaginaire pour vous !

1. côtés adjacents à l'angle droit

2 Rappel : Les ensembles de nombres

- $\mathbf{N}$, les entier naturels : 0, 1, 2, 3, 4,...
- $\mathbf{Z}$, les entier relatifs ... ,-2, -1, 0, 1, 2,...
- $\mathbf{Q}$, les rationnels :
  (quotients de deux entiers)
  $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{825}$, $-\frac{5}{3}$, $3{,}5 = \frac{35}{10}$, ...
- $\mathbf{R}$, les réels :
  $0,\ 5,\ -4,\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{7},\ \pi,\ \ldots$
- $\mathbf{C}$, les complexes :
  $3+2i,\ 5i,\ -2\sqrt{3}(1+i),\ 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}},\cdots$



- On note avec une **étoile** en exposant, l'ensemble privé de l'élément 0 :
  $\mathbf{N}^* = \{n \geqslant 1\}$.
- On note avec un **plus**[2], l'ensemble des nombres positifs (n'a aucun sens sur $\mathbf{C}$) :
  $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$, $\quad \mathbf{R}_+^* = \{x > 0\}$.
- On note avec un **moins**, l'ensemble des nombres négatifs[3] : $\mathbf{Z}^-$.

Remarque : Les notations des ensembles de nombres avec des « plus » ou « étoile » sont typiquement françaises.

3 Les intervalles

Définition 3.1 *(Intervalle)*

Un intervalle I est une partie de $\mathbf{R}$ qui vérifie :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I$$

En français : « I est un intervalle, si pour tout couple de nombres (a,b) appartenant à I, I contient tout le segment $[a,b]$. »

Remarque :

- Dans la définition, a et b sont des points quelconques de l'intervalle : pas forcément ses bornes (en particulier si l'intervalle est ouvert).
- Par définition, les intervalles représentent exactement les parties **convexes** de $\mathbf{R}$.

Notation : Lorsqu'on parle d'intervalle d'entiers, on met habituellement une double barre aux crochets (« $[\![$ » et « $]\!]$ »).

2. Le plus est mis indifféremment en exposant ou en indice : $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}^+$
3. 0 est un nombre à la fois positif et négatif.

Propriété 3.2

Les intervalles de $\mathbf{R}$ sont tous d'une des formes suivantes :

- $[a,b] = \{x \in \mathbf{R}, a \leqslant x \leqslant b\}$, on parle alors de **segment** ou d'intervalle **fermé**.
- $]a,b] = \{x \in \mathbf{R}, a < x \leqslant b\}$, on dit que l'intervalle est **ouvert** à gauche (ou en a) et **fermé** à droite (ou en b).
  Nota : $a \notin]a,b]$.
- $[a,b[= \{x \in \mathbf{R}, a \leqslant x < b\}$, on dit que l'intervalle est **fermé** à gauche (ou en a) et **ouvert** à droite (ou en b).
- $]a,b[= \{x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$, on dit que l'intervalle est **ouvert**.
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R}, x \leqslant b\}$
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbf{R}, x < b\}$
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbf{R}, x \geqslant a\}$
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbf{R}, x > a\}$
- $]-\infty,+\infty[= \mathbf{R}$

a et b désignent des réels.

Remarque : $\pm\infty$ n'appartiennent jamais à l'intervalle car ce ne sont pas des nombres. Ils sont plutôt à considérer comme des notations pour dire que l'on peut « *aller aussi loin que l'on veut* ». On n'atteint pas l'infini (du moins, pas dans notre cadre).

Exemple

Écrire les relations suivantes sous forme d'appartenance à un intervalle :

$$x \geqslant 3, \quad x < 17, \quad x > -2, \quad 2 < x \leqslant 8.$$

Solution :
$x \geqslant 3 \iff x \in [3,+\infty[$, $\quad x < 17 \iff x \in]-\infty;17[$,
$x > -2 \iff x \in]-2,+\infty[$, $\quad 2 < x \leqslant 8 \iff x \in]2;8]$.

Définition 3.3

Avec les notations de la propriété 3.2, a et b s'appellent les **bornes** de l'intervalle. Lorsque l'intervalle est infini, on parle de borne *infinie* à gauche ou à droite.

Remarque : Avec cette définition, on voit que les bornes

- ne sont pas toujours des nombres réels. Elles peuvent valoir $\pm\infty$,
- n'appartiennent pas toujours à l'intervalle (s'il est ouvert comme c'est le cas avec les bornes infinies).

Définition 3.4 *(Droite réelle achevée)*

On note $\overline{\mathbf{R}}$, la **droite réelle achevée :** $\mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.
$\pm\infty$ vérifient alors : $\forall x \in \mathbf{R}$, $-\infty < x < +\infty$.
On peut prolonger les opérations élémentaires par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x + (+\infty) = +\infty, \qquad x + (-\infty) = -\infty,$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Et l'addition reste commutative.

$$x \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad x \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

$$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty, \qquad \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Et la multiplication reste commutative.

⚠ Certaines sommes ou produits n'existent pas. Par exemple, on ne peut additionner $+\infty$ avec $-\infty$.

4 Relations binaires

A Définitions

Cette partie permet de compléter un peu nos connaissances sur les ensembles en général.
Elle est traitée ici pour bénéficier d'illustrations immédiates propres à $\mathbf{R}$.
Les relations binaires permettent, comme leur nom l'indique, de créer des relations entre les objets ; deux à deux.
Avant de donner les définitions, donnons quelques exemples intuitifs pour voir que ces notions sont très simples.

Exemple

- L'égalité est une relation binaire sur l'ensemble des réels : on considère que deux éléments sont en relation s'ils sont égaux.
- La relation « aimer » est une relation entre les personnes.
  Contrairement à la relation d'égalité, il n'y a pas de symétrie, ainsi, Paul peut aimer Mathématique sans que Mathématique aime Paul.
- La relation d'inclusion est une relation entre ensembles.
  À nouveau cette relation n'est pas symétrique en général.
- La relation de divisibilité est une relation entre entiers.
- La relation d'équivalence est une relation entre propriétés logiques...

Définition 4.1 *(Relation binaire)*

Soit E un ensemble non vide, une **relation binaire** sur E est une partie de $E \times E$.
Ainsi, en notant $\mathscr{R}$ la relation définie par $G \in \mathcal{P}\left(E^2\right)$,

$$\forall (x,\, y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y \iff (x,\, y) \in G.$$

Explications

La définition avec le produit cartésien est une vision très terre à terre d'envisager la relation.
Cela consiste simplement à lister tous les éléments qui sont en relation.
Ainsi, lorsque $x\mathscr{R}y$, on met le couple $(x,\, y)$ dans G de telle sorte que G contienne tous les couples en relation : G représente le registre des mariages (mais ces mariages ne sont pas nécessairement symétriques).
C'est une partie de tous les couples que l'on pourrait potentiellement réaliser.
Comme la relation n'est pas symétrique : on peut avoir Paul qui aime Mathématique sans que Mathématique aime Paul, on donne donc un sens à la relation. Dans ce cas, (Paul,Mathématique)$\in G$, mais (Mathématique,Paul)$\notin G$.

Remarque : On peut également définir une relation binaire entre deux ensembles E et F non vides.

Exemple

On définit la relation « tuer ou essayer de tuer » avec des personnages de la pièce « Le roi Lear » de Shakespeare.
Voici l'intrigue en résumé :

- Le domestique tue Cornwall,
- Regan tue le domestique,
- Oswald essaie de tuer Gloucester,
- Edgar tue Oswald,
- Goneril tue Regan,
- Edgar tue Gloucester (une crise cardiaque, il n'avait pas fait exprès le pauvre),
- Goneril essaie de tuer Albany,
- Goneril se tue (jamais deux sans trois),
- Edgar tue Edmund,
- Edmund et Goneril et le bourreau tuent Cordelia (au bout d'une corde...),
- Lear tue le bourreau,
- Lear se tue de chagrin.

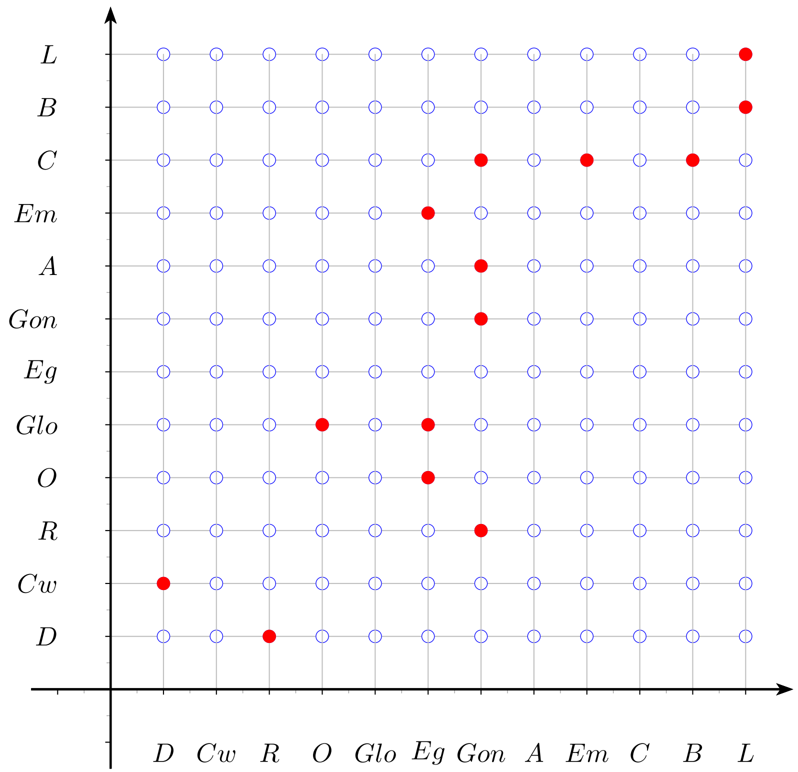
N'est pas Shakespeare qui veut !
On veut présenter la relation sous la forme d'une partie du produit cartésien des personnages.
Pour cela on numérote les personnages et on note de façon abrégée :

1. Le domestique : D,
2. Cornwall : Cw,
3. Regan : R,
4. Oswald : O,
5. Gloucester : Glo,
6. Edgar : Eg,
7. Goneril : Gon,
8. Albany : A,
9. Edmund : Em,
10. Cordelia : C,
11. Le bourreau : B,
12. Lear : L.

L'ensemble E des personnages est alors

$$E = \{\mathrm{D},\, \mathrm{Cw},\, \mathrm{R},\, \mathrm{O},\, \mathrm{Glo},\, \mathrm{Eg},\, \mathrm{Gon},\, \mathrm{A},\, \mathrm{Em},\, \mathrm{C},\, \mathrm{B},\, \mathrm{L}\}\,.$$

Le produit cartésien peut être représenté par une grille :



On indique la relation en lisant de l'abscisse vers les ordonnées (pas un choix officiel) et en plaçant un rond plein.

Par exemple, « le domestique tue Cornwall » se traduit par la relation « D$\mathscr{R}$Cw ».
On l'indique dans la grille par le point de coordonnées $(1,\, 2)$.
L'ensemble des ronds plein désigne G, c'est bien une partie de l'ensemble des points qui forment le produit cartésien.
On peut lire par exemple que Cornwall, Gloucester, Albany et Cordelia sont les seuls personnages qui n'en tuent (ou n'essaient d'en tuer) d'autres : leur colonne est vide.
Pour voir les vivants à la fin (en supposant que toutes les tentatives d'assassinat réussissent), il suffit de lire les lignes vides : Edgar est l'heureux survivant[4] !

On voit que certaines relations binaires ont des propriétés particulières : par exemple, l'égalité est symétrique.
La définition suivante donne les principales propriétés que nous rencontrerons pour certaines relations.

Définition 4.2 *(Propriétés éventuelles d'une relation binaire)*

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E.

- $\mathscr{R}$ est **réflexive** si $\forall x \in E,\, x\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est **symétrique** si $\forall (x,\, y) \in E^2,\, x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
- $\mathscr{R}$ est **antisymétrique** si $\forall (x,\, y) \in E^2,\, (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathscr{R}$ est **transitive** si $\forall (x,\, y,\, z) \in E^3,\, (x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Explications

- Dans une relation **réflexive**, tout élément est en relation avec lui-même.
  Par exemple, la relation d'égalité est réflexive : on a toujours $x = x$.
  La relation d'inclusion est aussi reflexive car un ensemble est toujours inclus dans lui-même.
  En revanche, on espère que la relation « tuer » n'est pas reflexive.
  Dans la représentation du produit cartésien sous forme de grille, comme dans l'exemple du roi Lear, la reflexivité se traduit par l'appartenance de tous les points de la diagonale à G. Pour cet exemple, on voit que la relation « tuer ou essayer de tuer » n'est pas réflexive.

- L'égalité est une relation **symétrique**, cela veut dire qu'on peut la lire dans les deux sens.
  Par contre, la relation d'inclusion ne l'est évidemment pas : $A \subset B \not\Rightarrow B \subset A$.
  Dans une relation symétrique, la grille repésentant G est symétrique par rapport à la diagonale : $y = x$.

- La relation d'inclusion est **antisymétrique** : si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
  Au contraire de la symétrie, l'antisymétrie indique que la relation possède un *sens de lecture* fort.

4. En fait, Albany survit aussi car la tentative d'assassinat a échoué.

- La **transitivité** indique que la relation se transmet de proche en proche. L'illustration type est la « descendance généalogique ».
  Si je descends de Charlemagne qui lui-même descend de Pépin-le-Bref, alors je descends aussi de Pépin-le-Bref. Et si lui-même descend du singe, qui descend de l'arbre... alors, je descends de l'arbre.
  L'égalité est transitive, l'inclusion est transitive, la divisibilité aussi...

Exemple

Donner les propriétés de la relation $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$, puis comparer avec les propriétés de la relation $<$.

Solution :

La relation $\leqslant$ est clairement une relation binaire sur $\mathbf{R}$.

- Elle est reflexive, car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a bien $x \leqslant x$.
- Elle n'est pas symétrique, car par exemple, $3 \leqslant 5$, mais $5 \nleqslant 3$.
- Elle est antisymétrique, car si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.
- Elle est transitive, car si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

La relation binaire $<$, n'est pas réflexive, car un nombre n'est pas strictement inférieur à lui-même.
Elle n'est pas symétrique pour la même raison que $\leqslant$.
Elle est antisymétrique, même si cela est sans objet : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$, $[(x < y) \wedge (y < x)] \Rightarrow x = y$.
En effet, comme la prémisse est toujours fausse, alors l'implication est vraie !
Elle est aussi transitive comme $<$.

Définition 4.3 *(Éléments comparables)*

Deux éléments x et y de E sont dits **comparables** suivant[5] $\mathscr{R}$ si $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$.
La relation est **totale** si tous les éléments de E sont comparables, sinon elle est **partielle.**

Exemple

Dans la population française, La relation « être amoureux » est partielle. Du moins, je l'espère...
Chez Racine, elle n'est pas loin d'être totale, et ça pose pas mal de problèmes.

Exemple

La relation d'inclusion est-elle totale sur l'ensemble des parties de $\mathbf{R}$.

Solution :

Non, tous les éléments ne sont pas comparables pour la relation d'inclusion.
Par exemple, on a $[1, 2] \not\subset [7, 9]$ et $[7, 9] \not\subset [1, 2]$.

Exemple

La relation $\leqslant$ est totale sur $\mathbf{R}$.

5. On dit comparables *suivant* $\mathscr{R}$ ou comparables *modulo* $\mathscr{R}$.

B Relation d'équivalence et partitions

Définition 4.4 *(Relation d'équivalence)*

Une **relation d'équivalence** sur un ensemble E non vide est une relation binaire :

- réflexive,
- symétrique,
- transitive.

Exemple

- La relation *logique* d'équivalence : $\iff$ est bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des propositions logiques.
- La relation d'égalité sur $\mathbf{R}$ (ou sur tout autre ensemble) est une relation d'équivalence.
- Par contre, la relation de divisibilité sur $\mathbf{Z}$ n'est pas une relation d'équivalence. Par exemple $5|10$ mais $10 \nmid 5$.

Définition 4.5 *(Classes d'équivalences)*

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'équivalence $\sim$.
Pour tout $x \in E$, la **classe** de x est l'ensemble des éléments en relation avec x.

$$\mathrm{cl}(x) = \dot{x} = \{y \in E,\ x \sim y\} .$$

Théorème 4.6

L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E.

Preuve

On doit vérifier les trois axiomes d'une partition :

- (*non vide*) Toute classe d'équivalence $\dot{x}$ est non vide car elle contient x (par réflexivité d'une relation d'équivalence).
- (*union*) Soit $x \in E$, $x \in \dot{x}$ par réflexivité de la relation,
  donc x est au moins dans une classe d'équivalence.
- (*intersection*) Soient deux classes d'équivalence, $\dot{x}$ et $\dot{y}$ d'intersection non vide.
  On note a un élément commun.
  Donc $x \sim a$ et $y \sim a$.
  Par symétrie, on a donc $a \sim y$ et par transitivité, on trouve donc $x \sim y$.
  Donc $y \in \dot{x}$.
  À nouveau par symétrie et transitivité, on montre donc que $\forall a \in \dot{y}$, $a \sim y \sim x$, donc $a \sim x$.
  Ainsi, $\dot{y} \subset \dot{x}$, et par symétrie, on a aussi l'autre inclusion.
  Donc $\dot{x} = \dot{y}$.

■

Exemple

Montrer que la relation « avoir le même signe » est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^*$ et donner ses classes d'équivalence.

Solution :

On remarque que cette relation s'écrit $x \sim y \iff xy > 0$.

- $\forall x \in \mathbf{R}^*$, x a le même signe que lui-même : $x^2 > 0$, donc la relation est réflexive.
- Si $xy > 0$, alors $yx > 0$, donc la relation est symétrique.
- Si $xy > 0$ et $yz > 0$, alors $xy^2z > 0$ et en divisant par $y^2 > 0$, on trouve $xz > 0$.
  Donc la relation est transitive.

La relation « avoir le même signe » est donc bien une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^*$.
Elle possède exactement deux classes d'équivalence : $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$.

Exemple *(Modulo un nombre réel)*

Pour $a \in \mathbf{R}_+^*$, on dit que x et y sont égaux modulo a si, et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + ka$.
Par exemple, deux angles égaux modulo 2π ont même sinus et même cosinus.
Montrer que la relation « modulo a » définit une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.
Décrire ses classes d'équivalences.

Solution :

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, avec $k = 0$, on trouve toujours $x = x + ka$ donc $x \equiv x\ [a]$: la relation est reflexive.
- Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, si $x \equiv y\ [a]$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = y + ka$, donc $y = x - ka$ avec $-k \in \mathbf{Z}$.
  Ainsi $y \equiv x\ [a]$: la relation est symétrique.
- Pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, si $x \equiv y\ [a]$ et $y \equiv z\ [a]$, alors il existe $(k, k') \in \mathbf{Z}^2$ tel que $x = y + ka$ et $y = z + k'a$, alors $x = z + (k + k')a$ avec $k + k' \in \mathbf{Z}$.
  Donc $x \equiv z\ [a]$: la relation est transitive.

La relation « modulo a » est donc bien une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.
Pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, la classe de x est

$$\dot{x} = \{x + ka,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Or, on peut remarquer que chaque classe admet alors exactement un représentant dans l'intervalle $[0, a[$.
En effet,

$$x + ka \in [0, a[\iff -\frac{x}{a} \leqslant k < -\frac{x}{a} + 1.$$

Or, comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre avec la partie entière, on peut toujours trouver un entier relatif entre deux réels séparés d'une distance de 1 (et une seule inégalité stricte sur les deux).
On obtient donc un représentant de la classe dans $[0, a[$.
Ce représentant est évidemment unique (par l'absurde, sinon l'autre ne serait pas dans le bon intervalle).
Ainsi, à chaque classe d'équivalence correspond un unique réel $x \in [0, a[$ et on peut donc associer l'ensemble des classes d'équivalences à l'intervalle $[0, a[$ (ou à tout autre intervalle semi-ouvert de longueur a).
On remarque que c'est l'opération naturelle avec les angles où on se ramène toujours à un angle sur $[0, 2\pi[$ ou sur $]-\pi, \pi]$.

Exemple *(Modulo un entier)*

On considère la relation d'équivalence de l'exemple précédent, mais pour $a \in \mathbf{N}$ et on la restraint à $\mathbf{Z}$.
Il est évident que la relation reste alors une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$ par héritage, et que les classes d'équivalence ont chacune un unique représentant dans l'intervalle $[0, n[\cap \mathbf{Z} = [\![0, n-1]\!]$.
Ces classes seront davantage étudiées en arithmétique.

C Relations d'ordre

Définition 4.7 *(Relation d'ordre)*

Une **relation d'ordre** sur un ensemble E non vide est une relation binaire :

- réflexive,
- **anti**symétrique,
- transitive.

Explications

Dans une relation d'ordre, un élément peut toujours être comparé à lui-même (*reflexivité*),
mais pour que ordre existe, les deux éléments ne peuvent avoir des rôles symétriques, au contraire (*antisymétrie*)
par contre, l'ordre se propage de proche en proche (*transitivité*) : si je suis avant mon voisin qui est lui-même avant Gaston, alors, je suis avant Gaston.

Exemple

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$.

- *réflexivité :* $\forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant x$.
- *antisymétrie :* $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y$.
- *transitivité :* $\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$.

Cette relation d'ordre est *totale* car deux réels peuvent toujours être comparées par la relation $\leqslant$.
⚠ La relation binaire $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$ car elle n'est pas réflexive.

Exemple

Pour un ensemble E, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

- *reflexivité :* $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset A$.
- *antisymétrie :* $\forall (A,\, B) \in (\mathcal{P}(E))^2\,,\ A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$.
- *transitivité :* $\forall (A,\, B,\, C) \in (\mathcal{P}(E))^3\,,\ A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

C'est une relation d'ordre *partielle* en général.

Exemple

On définit la relation de divisibilité sur $\mathbf{Z}$, par

$$\forall (n,\, n') \in \mathbf{Z}^2,\ n|n' \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ n' = kn.$$

Montrer que la relation de divisibilité n'est **pas** une relation d'ordre sur $\mathbf{Z}$, mais que c'en est une sur $\mathbf{N}$. Cette relation est-elle totale sur $\mathbf{N}$?
Solution :

- *reflexivité :* $\forall n \in \mathbf{Z},\ n|n$ ($n = 1 \times n$, même pour 0). (donc elle est aussi réflexive sur $\mathbf{N}$).
- *antisymétrie :* Tout d'abord la relation n'est pas antisymétrique sur $\mathbf{Z}$: Par exemple 1 et -1 se divisent mutuellement sans pour autant être égaux.
  Montrons que la relation est antisymétrique sur $\mathbf{N}$.
  Soit $(n,\, n') \in \mathbf{N}$, tel que $n|n'$ et $n'|n$. Ainsi, $\exists (k,\, k') \in \mathbf{N}^2,\ n' = kn$ et $n = k'n'$.
  - Si $n = 0$, alors $n' = k \times 0 = 0$, donc $n = n'$.
  - Si $n \neq 0$, alors, $n' \neq 0$ (car $n = k'n' \neq 0$).
    On a alors, $k \geqslant 1$ et $k' \geqslant 1$, donc $n' \geqslant n$ et $n \geqslant n'$. Donc $n = n'$.

  Ce qui prouve bien l'antisymétrie sur $\mathbf{N}$.
- *transitivité :* Si $n|n'$ et $n'|n''$, alors il existe $(k,\, k') \in \mathbf{Z}^2$ tel que $n = kn'$ et $n' = k'n''$.
  On a donc $n = kk'n''$ avec $kk' \in \mathbf{Z}$.
  Donc $n|n''$, ce qui prouve la transitivité sur $\mathbf{Z}$ et donc aussi sur $\mathbf{N}$.

Explications *(Différence entre une relation d'ordre totale et partielle)*

- L'exemple naturel de la relation d'ordre totale est la relation d'ordre $\leqslant$ sur les nombres.
  Sur $\mathbf{N}$, on voit que cette relation permet de créer une chaîne qui relie tous les nombres entre eux et que l'on dispose les uns à la suite des autres le long de cette chaîne.
  Ce que l'on appelle ici « chaîne » n'est autre, pour $\mathbf{R}$, que la droite des réels sur laquelle on place de façon ordonnée tous les réels.
  Sur $\mathbf{R}$, les points se touchent alors que sur $\mathbf{Z}$, on peut les séparer les uns des autres, mais l'idée est identique.
- A contrario, une relation d'ordre partielle suit l'exemple de la filiation dans une population.
  En général, toutes les personnes n'appartiennent pas à la même *lignée* et deux personnes prises au hasard ne peuvent être comparées (il n'y a pas de rapport de descendance entre elles). L'ensemble contient alors une multitude de lignées qui peuvent éventuellement se recouper, mais pas nécessairement.
  Les relations d'inclusion sur des ensembles, de divisibilité sur $\mathbf{N}$... sont des relations d'ordre partielles[6] et doivent donc être visualisées sous cette forme.

Définition 4.8

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$.
On peut définir une relation d'ordre **stricte** $\prec$ par

$$\forall (x,\, y) \in E^2,\ x \prec y \iff (x \preccurlyeq y \wedge x \neq y)\,.$$

Cette relation est alors antisymétrique et transitive.

Exemple

La relation $<$ est la relation d'ordre stricte associée à $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$.

Exemple *(culture : entiers de Von Neumann)*

On peut définir les entiers naturels par récurrence en posant : $0 = \emptyset$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ n + 1 = n \cup \{n\}$. La suite des éléments ainsi définie, munie de la relation d'ordre $\subset$ constitue l'ensemble des entiers naturels tels que définis par Peano.
Cela donne une méthode pour construire explicitement l'ensemble $\mathbf{N}$.

Un relation d'ordre permet de définir ce qu'est un majorant, un maximum... C'est ce que nous allons reprendre ici en illustrant par la relation d'ordre usuelle $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$, puis en généralisant à une relation d'ordre quelconque.

5 Majorants-minorants

A Définitions pour l'ensemble des réels

Nous commençons par le cas particulier de $\mathbf{R}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$, puisque c'est celui auquel nous sommes habitués et que nous utilisons le plus souvent.
Nous généraliserons ensuite à un ensemble quelconque muni d'une relation d'ordre.

6. Sauf choix très particulier des ensembles pour l'inclusion.

Définition 5.1 *(Relation d'ordre usuelle sur les réels)*

Soit $A \subset \mathbf{R}$ un ensemble **non vide**.

- On appelle **majorant** de A tout nombre $M \in \mathbf{R}$ tel que $\quad \forall x \in A,\ x \leqslant M$. A est **majorée** si elle admet au moins un majorant.
- On appelle **minorant** de A tout nombre réel $m \in \mathbf{R}$ tel que $\quad \forall x \in A,\ m \leqslant x$. A est **minorée** si elle admet au moins un minorant.

Une partie à la fois majorée et minorée est dite **bornée.**

- M est le **plus grand élément** de A si $\quad M \in A$, et $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  Sur $\mathbf{R}$, on parle aussi de **maximum** et on note : $\max A$.
- M est le **plus petit élément** de A si $\quad m \in A$, et $\forall x \in A,\ m \leqslant x$.
  Sur $\mathbf{R}$, on parle aussi de **minimum** et on note : $\min A$.
- Lorsque l'ensemble des majorants est non vide, et qu'il admet un plus petit majorant, on l'appelle **borne supérieure**.
  On note : $\sup A$.
- Lorsque l'ensemble des minorants est non vide, et qu'il admet un plus grand minorant, on l'appelle **borne inférieure**.
  On note : $\inf A$.

Explications

Un *majorant* est un nombre qui est plus grand que tous les nombres de A, ce nombre n'appartient pas nécessairement à A contrairement au *plus grand élément.*
Sur $\mathbf{R}$, s'il y a un majorant, alors il y en a une infinité, alors qu'il ne peut y avoir qu'un seul plus grand élément (ou maximum).

Remarque :

- L'existence d'un plus petit majorant ou d'un plus grand minorant sur $\mathbf{R}$ est loin d'être une évidence. Cela fait appel à la propriété de la borne supérieure énoncée plus loin au théorème 5.5.
- Pour une partie $A \subset \mathbf{R}$ non majorée, on écrira parfois $\sup A = +\infty$.
  Si elle est non minorée, on écrira $\inf A = -\infty$.
  Mais c'est à considérer davantage comme une notation que comme une valeur.

B Définitions pour un ensemble quelconque

Le cas général reprend les mêmes idées en utilisant les notations adaptées.
La difficulté vient lorsque l'ordre n'est plus total, mais partiel et qu'il faut prendre en compte la multitude de « lignées ».

Définition 5.2 *(Relation d'ordre quelconque)*

Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$, et A une partie de E.

- On appelle **majorant** de A tout élément $M \in E$ tel que $\quad \forall x \in A,\ x \preccurlyeq M$. A est **majorée** si elle admet au moins un majorant.
- On appelle **minorant** de A tout élément $m \in E$ tel que $\quad \forall x \in A,\ m \preccurlyeq x$. A est **minorée** si elle admet au moins un minorant.

Une partie à la fois majorée et minorée est dite **bornée.**

- M est le **plus grand élément** de A si $\quad M \in A$, et $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq M$.
- M est le **plus petit élément** de A si $\quad m \in A$, et $\forall x \in A,\ m \preccurlyeq x$.
- Lorsque l'ensemble des majorants est non vide, et qu'il admet un plus petit majorant, on l'appelle **borne supérieure**.
  On note : $\sup A$.
- Lorsque l'ensemble des minorants est non vide, et qu'il admet un plus grand minorant, on l'appelle **borne inférieure**.
  On note : $\inf A$.

⚠

- Dans la définition 5.2, l'ensemble de nombre A n'est pas supposé être un intervalle : il peut avoir n'importe quelle forme.
  Par exemple on peut prendre $F = \mathbf{Q}$, ou l'ensemble des valeurs prises par une suite (u_n),...
- Un ensemble de nombres peut ne pas avoir de majorant.
  Par exemple $[-3, +\infty[$ n'est pas majoré, de même, $\{n^2,\ n \in \mathbf{N}\}$ est un ensemble non majoré.
- Lorsqu'ils existent, le majorant et le minorant ne sont en général **pas uniques**, contrairement aux éventuelles bornes supérieures ou inférieures.

Explications

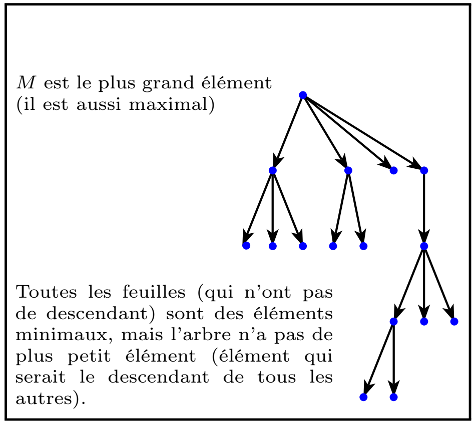
Lorsque l'ordre est total, tout est facile parce que les éléments sont tous de la même « lignée » et il suffit d'aller à un bout ou à l'autre pour trouver le maximum ou le minimum (s'ils existent).
Par contre, si l'ordre est seulement partiel, alors il faut faire davantage attention aux définitions : le plus grand élément n'existe que rarement puisque l'on impose que tous les éléments de A puissent lui être comparés. De même, pour un majorant.
Par exemple, dans une généalogie, le plus grand élément est l'ancêtre commun à tous (mais il est rare qu'une généalogie contienne un tel personnage). On définit donc, lorsque l'ordre est partiel, un *élément maximal* de A. C'est un élément de A qui n'en

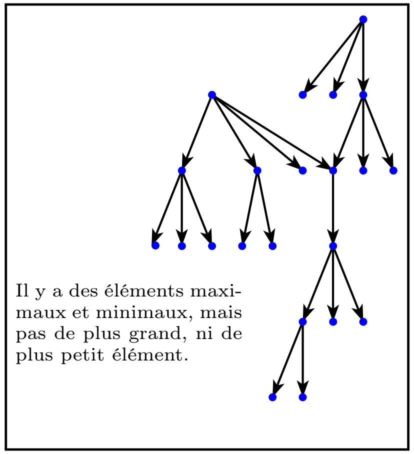
a pas de plus grand dans A :

$$\forall x \in A,\, M \preccurlyeq x \Rightarrow M = x.$$

Pour un ordre total, élément maximal et plus grand élément coïncident. Par contre lorsque l'ordre est partiel, ce n'est pas la même chose de dire qu'un élément n'en a pas de plus grand dans A ou que tous les éléments de A lui sont plus petits. En effet, on voit bien la deuxième formulation impose que tous les éléments de A puissent lui être comparés.
Revenons à l'exemple de la généalogie :

- Pour qu'il y ait un plus grand élément, il faut (et il suffit) qu'il y ait un patriarche dont toutes les personnes de la généalogie descendent. C'est rarement le cas. On voit bien alors que ce plus grand élément, s'il existe, est nécessairement unique.
- Par contre, il peut y avoir de nombreux éléments maximaux, qui correspondent chacun au patriarche *d'une* des branches. Mais il n'y a pas, alors, de *plus grand élément* commun à tous.





Exemple

Soit E un ensemble (dont les éléments ne sont pas eux-même des ensembles).
On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre d'inclusion, notée $\subset$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ possède à la fois un plus grand et un plus petit élément.
2. Si E contient au moins deux éléments, trouver une partie de $\mathcal{P}(E)$ qui n'admet ni plus grand, ni plus petit élément.

Solution :

1. $E \subset \mathcal{P}(E)$ et $\forall A \in \mathcal{P}(E),\, A \subset E$, donc A est le plus grand élément de $\mathcal{P}(E)$. De même, $\emptyset$ est le plus petit élément de $\mathcal{P}(E)$, car $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, et $\forall A \in \mathcal{P}(E),\, \emptyset \subset A$.
2. Notons a, b deux éléments distincts de E, et considérons $A = \{\{a\}, \{b\}\}$.
   Alors, il est évident que ni $\{a\}$, ni $\{b\}$ ne sont plus grand et plus petit élément de A (car ils ne sont pas comparables).
   En revanche, ils sont tous les deux à la fois maximal et minimal de A.

Exemple *(Prolongation de l'exemple précédent)*

Soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.
Montrer que $\mathscr{A}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathcal{P}(E)$ muni de l'inclusion :

$$\sup \mathscr{A} = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \qquad \text{et} \qquad \inf \mathscr{A} = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A.$$

Solution :

Par définition $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \in \mathcal{P}(E)$ et $\forall B \in \mathscr{A},\, B \subset \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.
Donc $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ est un majorant de $\mathscr{A}$.
De plus, si C est un majorant de $\mathscr{A}$, alors, par définition, C contient toutes les parties de $\mathscr{A}$, donc C contient $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.
On a donc bien montré que $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ est le plus petit majorant de $\mathscr{A}$, donc sa borne supérieure.
On fait de même pour la borne inférieure.

Exemple

Montrer que si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E, alors la relation binaire $\succcurlyeq$ définie par

$$\forall (x, y) \in E^2,\, x \succcurlyeq y \iff y \preccurlyeq x$$

définit une nouvelle relation d'ordre sur E.
Montrer que les majorants pour $\preccurlyeq$ sont exactement les minorants pour $\succcurlyeq$.
(Ainsi, toutes les preuves sur les majorants, bornes supérieures peuvent être facilement transposées aux minorants et bornes inférieures quitte à modifier la relation d'ordre).

Solution :

- *Réflexivité :* $\forall x \in E,\, x \preccurlyeq x$, donc $x \succcurlyeq x$.
- *Antisymétrie :* $\forall (x, y) \in E^2$, si $x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq x$ alors $y \preccurlyeq x$ et $x \preccurlyeq y$, donc par antisymétrie de $\preccurlyeq$, on a $x = y$.
- *Transitivité :* $\forall (x, y, z) \in E^3$, si $x \succcurlyeq y$ et $y \succcurlyeq z$ alors $y \preccurlyeq x$ et $z \preccurlyeq y$, donc par transitivité de $\preccurlyeq$, on a $z \preccurlyeq x$ donc $x \succcurlyeq z$.

Soit M un majorant d'une partie A de E pour la relation $\preccurlyeq$, alors $\forall x \in E,\, x \preccurlyeq M$, donc $M \succcurlyeq x$, ce qui montre bien que x est un minorant de A pour $\succcurlyeq$.

C Propriétés

Propriété 5.3 *(Unicité du plus grand élément)*

A admet au plus, un plus grand élément : s'il existe, alors il est unique.
De même, A ne peut pas admettre plusieurs plus petits éléments.

Preuve

Rappelez-vous : pour démontrer l'unicité d'un objet, on suppose souvent qu'il y en a deux, et on montre qu'ils sont nécessairement égaux.
Supposons qu'il existe deux plus grands éléments dans A, que l'on note M et M'.
Par définition $\forall x \in A$, $x \preccurlyeq M$, or $M \in A$, donc $M \preccurlyeq M'$.
De même, $M' \preccurlyeq M$.
Donc par antisymétrie de la relation d'ordre $M = M'$.
On fait la même preuve pour le plus petit élément. ■

Corollaire 5.4 *(Unicité des bornes supérieures et inférieures)*

Si la borne supérieure existe, alors elle est unique.
Si la borne inférieure existe, alors elle est unique.

Preuve

Elles sont définies respectivement comme plus petit élément des majorants, ou plus grand élément des minorants. ■

Théorème 5.5 *(Axiomes des bornes supérieures et inférieures)*

Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure.

Preuve

Admis. ■

⚠ Une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet toujours une borne supérieure, mais pas nécessairement de maximum. De même pour le minimum.

Remarque culturelle : L'axiome de la borne supérieure n'est pas valable pour n'importe quel ensemble. Par exemple, il n'est pas valable sur $\mathbf{Q}$.

Exemple

Soit $I = [2, 5[$.
Établir si I admet des majorants (lesquels ?), une borne supérieure, un maximum.
De même pour les éventuels minorants, borne inférieure et minimum.
Solution :

- L'ensemble des majorants de I est $[5, +\infty[$.
  La borne supérieure de I est 5, c'est le plus petit des majorants. Ce **n'est pas** un maximum, car il n'appartient pas à l'intervalle I. I n'a pas de maximum.
- L'ensemble des minorants de I est $]-\infty; 2]$.
  La borne inférieure de I est 2, c'est aussi un minimum, car $2 \in I$.

Méthode *(Démontrer qu'un élément est la borne inférieure – ou supérieure)*

Pour démontrer que $x = \inf A$, on raisonne souvent ainsi :

- On montre que x est un minorant de A,
  c'est-à-dire que pour $y \in A$ quelconque, on montre que $x \preccurlyeq y$.
- On montre que c'est le plus grand.
  - Si on a $x \in A$, alors $x = \min A$ et a fortiori : $m = \inf A$.
  - Si $x \notin A$, alors on montre par l'absurde qu'il n'existe pas de minorant plus grand :
    On suppose qu'il en existe un plus grand : $x \prec y$ et on montre qu'il ne peut pas être un minorant en trouvant $y \in A$ tel que $y \prec m$.

Exemple

Un intervalle est non majoré, si, et seulement s'il est de la forme $[a; +\infty[$ ou $]a; +\infty[$, avec $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

Exemple

Soit $E = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
Montrer que E admet une borne supérieure et une borne inférieure que l'on déterminera. E admet-elle un maximum ? un minimum ?
Solution :
E est une partie non vide de $\mathbf{R}$ (⚠ ne pas oublier cet argument).

- $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n} \leqslant 1$, donc 1 est un majorant de E.
- $1 \in E$ (pour $n = 1$), donc 1 est le maximum de E.
- $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n} \geqslant 0$, donc 0 est un minorant de E.
- Montrons, que c'est sa borne inférieure : (comme $0 \notin E$, on doit passer par le raisonnement par l'absurde).
  Si, par l'absurde, il existait un minorant m strictement plus grand que 0, alors $m > 0$.
  Alors, on peut choisir un entier n_0 strictement supérieur à $\frac{1}{m}$ (qui existe car $m \neq 0$).
  Ainsi, on obtient $\frac{1}{n_0} < m$. Or $\frac{1}{n_0} \in E$, et m ne peut pas être un minorant de E : absurde. 0 est donc bien le plus grand des minorants : c'est la borne inférieure de E.
  Et $0 \notin E$, ce n'est donc pas un minimum.

Propriété 5.6 *(Caractérisation de la borne supérieure sur $\mathbf{R}$)*

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$.

$$S = \sup A \iff S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ ]S - \varepsilon,\, S] \cap A \neq \emptyset.$$

ou, de façon équivalente :

$$S = \sup A \iff S \text{ est un majorant de } A \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ S - \varepsilon < x.$$

Explications

Sur $\mathbf{R}$, une partie non vide majorée admet une borne supérieure. Celle-ci n'est pas nécessairement atteinte, mais elle peut être approchée d'infiniment près par les éléments de A : elle est *collée* à A (en mathématiques, on dit qu'elle est *adhérente* à A). Ainsi, quelle que soit la distance $\varepsilon > 0$, on peut toujours trouver un élément de A proche de S à ε près.

Remarque : Si A est non vide majorée de $\mathbf{R}$, alors on sait que A admet une borne supérieure.

Preuve

La propriété revient à dire que si S est un majorant de A, alors

$$S = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0, \,]S-\varepsilon, \, S] \cap A \neq \emptyset.$$

On montre les deux sens par contraposée.
(sens direct) Par contraposée. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]S-\varepsilon, \, S] \cap A = \emptyset$, alors $S - \varepsilon$ est aussi un majorant de A.
Donc S n'est pas le plus petit.
(sens réciproque) Encore par contraposée : Si S n'est pas le plus petit majorant.
Puisque c'est un majorant, c'est qu'il en existe alors un autre, $M < S$. Donc, $\forall x \in A, \, x \leqslant M$.
On note alors $\varepsilon = S - M > 0$.
Ainsi, $]S-\varepsilon, \, S] \cap A = \emptyset$. ■

Exercice

Donner la caractérisation correspondante pour la borne inférieure.

Théorème 5.7 *(Rappel)*

Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément (minimum).
Toute partie non vide majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément (maximum).

Preuve

Déjà prouvé dans le chapitre sur la récurrence. ■

6 Parties positives et négatives

On quitte le cas général et on revient sur $\mathbf{R}$ jusqu'à la fin de ce chapitre.

Définition 6.1 *(Parties positives et négatives)*

Soit $x \in \mathbf{R}$, la **partie positive de** x est définie par :

$$x^+ = \max(x, \, 0).$$

la **partie négative de** x est définie par :

$$x^- = \max(-x, \, 0).$$

Autrement dit :

- Si $x \geqslant 0$, alors $x^+ = x$ et $x^- = 0$.
- Si $x < 0$, alors $x^+ = 0$ et $x^- = -x$.

Exemple

Pour $x = 6$, $x^+ = 6$ et $x^- = 0$.
Pour $x = -3$, $x^+ = 0$ et $x^- = 3$.

Propriété 6.2

$\forall x \in \mathbf{R}, \, x^+ \geqslant 0, \;$ et $x^- \geqslant 0$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \, x = x^+ - x^-.$$

Preuve

Immédiat par disjonction des cas suivant le signe de x. ■

Exemple

Soit $x \in \mathbf{R}$, calculer $x^+ x^-$.
Solution :
Par disjonction des cas.
Si, $x \geqslant 0$, alors $x^- = 0$, donc $x^+ x^- = 0$.
Si, $x < 0$, alors $x^+ = 0$, donc $x^+ x^- = 0$.
D'où le résultat vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$.

7 Valeur absolue

Définition 7.1 *(Valeur absolue)*

Soit $x \in \mathbf{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel positif défini par

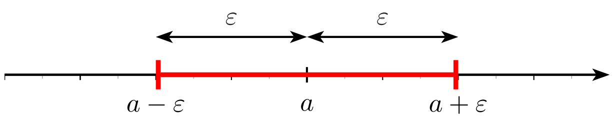
$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Explications

$|x|$ désigne la distance de x à 0, on utilisera en particulier cette fonction lors des limites où il est question de se rapprocher infiniment d'un point (distance).

Exemple *(fondamental)*

Pour $\varepsilon \geqslant 0$, $|x-a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.



Propriété 7.2

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |x| = x^+ + x^-.$$

Preuve

Par disjonction des cas suivant le signe de x. ∎

Propriété 7.3

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|. \qquad \forall x \in \mathbf{R}^*, \forall n \in \mathbf{Z}, \quad |x^n| = |x|^n.$

Preuve

Immédiat par disjonction des cas pour la première égalité. La deuxième se montre ensuite par récurrence sur n (en pensant à traiter les cas $n < 0$). ∎

Propriété 7.4 *(Inégalité triangulaire)*

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Preuve

$(|x|+|y|)^2 = |x|^2+|y|^2+2|xy| = x^2+y^2+2|x||y| \geqslant x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 = |x+y|^2$.
Donc par croissance de la racine carrée, on obtient l'inégalité triangulaire. ∎

Corollaire 7.5

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad \Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad \Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|.$

Preuve

Pour la partie gauche :
$|x| = |x+y-y| \leqslant |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $|x|-|y| \leqslant |x+y|$ et par symétrie des rôles de x et de y on a aussi $|y|-|x| \leqslant |x+y|$.
Donc $\Big| |x| - |y| \Big| \leqslant |x+y|$. La seconde propriété est la même proposition avec $-y$. ∎

8 Partie entière

Définition 8.1 *(Partie entière)*

Pour $x \in \mathbf{R}$, on appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier relatif tel que

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z}, n \leqslant x\}.$$

Remarque : La partie entière est parfois notée en France $E(x)$.

Explications

La partie entière de x est le plus grand des minorants entiers du singleton $\{x\}$.
Cela correspond à une approximation par défaut par un entier relatif. Lorsque le nombre est positif, cela revient simplement à le tronquer à la virgule. Par contre, lorsqu'il est négatif, il faut alors prendre l'entier **inférieur**.

Exemple

$\lfloor 2,3 \rfloor = 2$,
$\lfloor \pi \rfloor = 3$,
$\lfloor -\pi \rfloor = -4$,
$\lfloor 7 \rfloor = 7$.

⚠ En général $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$.

Preuve

Il faut simplement vérifier l'existence et l'unicité.
$E = \{n \in \mathbf{Z}, n \leqslant x\}$ est une partie non vide majorée (par x).
Or, toute partie non vide majorée de $\mathbf{Z}$ admet un plus grand élément : $n_0 = \max\{n \in \mathbf{Z}, n \leqslant x\}$.
De plus, le maximum est défini de façon unique. ∎

Propriété 8.2

Pour $x \in \mathbf{R}$, la **partie entière** de x est l'unique entier relatif tel que

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Preuve

Par définition de $\lfloor x \rfloor$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x$.
Et $\lfloor x \rfloor + 1 > x$ sinon $\lfloor x \rfloor + 1$ serait aussi un minorant entier de $\{x\}$, ce qui est absurde.
On a donc bien $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Montrons que c'est bien le seul entier qui vérifie cette propriété.
Si, par l'absurde, il en existait 2 distincts, n et n' avec par exemple $n < n'$.
Alors $n < n' \leqslant x < n+1 < n'+1$,
En particulier

$$n < n' < n+1 < n'+1$$

Or entre deux entiers consécutifs n et $n+1$, il ne peut y avoir aucun autre entier n'.
C'est donc absurde. Ce qui justifie bien l'unicité. ∎

Exemple

Calculer $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$ en fonction de x.

Solution :

- Si $x \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor -x \rfloor = -x$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$.
- Si $x \notin \mathbf{Z}$, alors si on note $n = \lfloor x \rfloor$, $n < x < n+1$.
  Donc $-n-1 < -x < -n$, et par définition : $\lfloor -x \rfloor = -n-1$.
  Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

Propriété 8.3

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

Preuve

Soient x et y deux réels, tels que $x \leqslant y$. Par définition, $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y$.
Donc $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à y et par caractérisation de la partie entière, il est donc inférieur ou égal au $\max\{n \in \mathbf{Z}, n \leqslant y\} = \lfloor y \rfloor$.
Ainsi $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
On a donc montré que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.
La fonction partie entière est croissante. ■

⚠ La fonction partie entière n'est **pas** *strictement croissante.*

Exemple

Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbf{R}, \ \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Solution :

$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$.
Donc $x+n$ est compris (inégalité de droite stricte) entre deux entiers consécutifs. On reconnait la définition de la partie entière, donc $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

9 Densité

Définition 9.1 *(Densité)*

Une partie $\mathscr{A}$ est **dense** dans $\mathbf{R}$ si, et seulement si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ rencontre $\mathscr{A}$ (contient au moins un élément de $\mathscr{A}$).

Explications

On peut imaginer $\mathscr{A}$ comme un brouillard dans $\mathbf{R}$: il est partout, mais ne remplit pas nécessairement tout.
$\mathbf{R}$ est dense dans lui-même, mais c'est peu intéressant.

Théorème 9.2 *(Densité des rationnels et irrationnels)*

$\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.

Autrement dit :
Tout intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ rencontre $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

$$\forall (a,\, b) \in \mathbf{R}^2,\ a < b \Rightarrow \,]a,\, b[\, \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset \text{ et } \,]a,\, b[\, \cap \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \neq \emptyset.$$

Explications

Entre deux nombres réels, il existe toujours au moins un nombre rationnel et un irrationnel. Les deux ensembles sont imbriqués de façon tellement serrée que l'on ne peut obtenir deux rationnels sans qu'un irrationnel se glisse entre eux (et réciproquement).

Preuve

- Montrons que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
  Soient $a < b$ deux réels. On cherche $(p,\, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tel que $a < \frac{p}{q} < q$.
  Idée :
  L'idée est d'avancer par sauts de puce. On part de zéro, et on fait des sauts suffisamment petits pour être certain de tomber au moins une fois entre a et b.
  Pour cela il suffit de faire des sauts d'une longueur inférieure à la longueur de l'intervalle $]a, b[$ pour ne pas pouvoir passer par dessus en un seul saut.
  p désigne alors le nombre de sauts, et la longueur de chaque saut est déterminée par $\frac{1}{q}$ (qui peut être aussi petit que l'on souhaite).
  Formalisation :
  On pose $q = \left\lfloor \frac{1}{b-a} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{b-a} > 0$.
  ainsi $q \in \mathbf{N}^*$ et $0 < \frac{1}{q} < b - a$.
  On pose à présent $p = \lfloor aq \rfloor + 1 > aq$. Montrons que $p < bq$.
  $$p = \lfloor aq \rfloor + 1 \leqslant aq + 1 \leqslant (a-b)q + 1 + bq < \frac{a-b}{b-a} + 1 + bq \leqslant bq.$$
  Donc $aq < p < bq$ et par stricte positivité de q,
  $$a < \frac{p}{q} < b.$$
- Faisons de même avec un irrationnel.
  Pour cela on peut chercher un nombre sous la forme $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ avec $(p,\, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$.
  Comme $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, on voit alors que $\frac{p}{q}\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ (en exercice).
  Or, d'après la point précédent, il existe un rationnel dans $\left] \frac{a}{\sqrt{2}},\, \frac{b}{\sqrt{2}} \right[$.
  Donc en multipliant par $\sqrt{2}$ on a le résultat immédiatement.

■

Nous verrons plus tard que cette densité peut aussi s'écrire avec des convergences de suites.

10 Rappels sur les puissances et les racines

On ne fait que de courts rappels et on se garde bien de tout justifier proprement : il s'agit uniquement de se rafraichir la mémoire.

Définition 10.1 *(Puissance)*

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la puissance n-ième de x par

$$x^n = \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, pour tout $n \in \mathbf{Z}_-$, on définit la puissance n-ième de x par

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}.$$

On remarque que pour $n = 0$, le produit est vide donc $x^0 = 1$ (même si $x = 0$).

Propriété 10.2 *(Règles de calcul)*

Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $(m, n) \in \mathbf{N}^2$,

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad x^{m+n} = x^m x^n \qquad x^{mn} = (x^m)^n .$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{(binôme de Newton)}.$$

Définition 10.3 *(Racines n-ièmes, puissances rationnelles et réelles)*

- Soit $x \in \mathbf{R}_+$, $\sqrt{x}$ est le seul réel **positif** tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
- Soient $x \in \mathbf{R}_+$ et $n \in \mathbf{N}$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ est le seul réel **positif** tel que $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$.
- Si n est impair, la racine n-ième est définie sur $\mathbf{R}$:
  $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sqrt[n]{x} = x$ est le seul réel tel que $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$.
- Soient $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.
- Soient $x \in \mathbf{R}_+^*$, et $\alpha \in \mathbf{R}$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

Remarque : Nous verrons des prolongements possibles en 0 avec les prolongements par continuité.

Preuve

L'existence et l'unicité des racines sont obtenus grâce au théorème de la bijection continue ce qui n'est pas l'objet de ce chapitre.
Il faudrait également justifier que la définition avec l'exponentielle coïncide avec les définitions précédentes pour $\alpha \in \mathbf{Q}$. ∎

Propriété 10.4

Les règles de calcul, à l'exception de la formule du binôme, vues pour les puissances entières s'appliquent aux puissances rationnelles et réelles.

⚠

- La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbf{R}$.
- On ne parle de puissance rationnelle ou irrationnelle que pour des nombres **positifs**.
- On ne parle de puissance réelle (non rationnelle) que pour des nombres **strictement positifs** (à cause du logarithme).

Remarque : Pour puissances quelconques positives, on peut réaliser un prolongement en 0 comme cela sera vu avec l'étude des fonctions usuelles.

Propriété 10.5 *(Règles de calcul)*

Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\quad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
Soit $x \in \mathbf{R}$, $\quad \sqrt{x^2} = |x|$.

⚠ Dans la deuxième formule, il ne faut pas oublier la **valeur absolue**.

11 Rappels sur les inégalités

Propriété 11.1 *(Opérations sur les inégalités)*

$$\forall a \in \mathbf{R}, \qquad x < y \iff a + x < a + y.$$

La multiplication par un nombre strictement positif conserve les inégalités larges et strictes :

$$\forall a > 0, \qquad x < y \iff ax < ay.$$

La multiplication par un nombre strictement négatif change le sens des inégalités larges et strictes

$$\forall a < 0, \qquad x < y \iff ax > ay.$$

Le passage à l'inverse de nombres de même signe, change le sens des inégalités

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}_+^*, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}_-^*, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}.$$

- On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens

$$\left(x < y \quad \text{et} \quad x' \leqslant y'\right) \Rightarrow x + x' < y + y'.$$

  Remarquez que l'inégalité stricte « gagne » pour la somme.

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **si tous les termes sont positifs**

$$\left(0 \leqslant x < y \quad \text{et} \quad 0 < x' \leqslant y'\right) \Rightarrow xx' < yy'.$$

  Remarquer que l'inégalité stricte « gagne » pour le produit, à condition de ne pas multiplier par 0.

Remarque : Lorsqu'une propriété est vraie pour des inégalités strictes, elle est aussi vraie pour des inégalités larges. La réciproque est fausse.

Définition 11.2 *(Fonction croissante - décroissante)*

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une application réelle.
On dit que f est **croissante** sur I, si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui conserve les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement croissante** sur I, si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

En français : « Une fonction *strictement* croissante est une fonction qui conserve les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

On dit que f est **décroissante** sur I, si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui inverse les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement décroissante** sur I, si

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

En français : « Une fonction *strictement* décroissante est une fonction qui inverse les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

⚠ La croissance ou la décroissance d'une fonction n'est pas d'abord affaire de dérivée. On peut parler de fonction croissante ou décroissante même si celle-ci n'est pas dérivable[7] ! Penser par exemple à la fonction partie entière.

7. Il est vrai que la dérivée est un outil très pratique pour connaître les variations d'une fonction et qu'il faut en profiter. Mais ce n'est qu'un outil parmi d'autres.

Théorème 11.3 *(Passage aux antécédents)*

Montonie stricte $\longrightarrow$ inégalités larges ou strictes.

*La **stricte** croissance conserve les inégalités larges ou strictes par passage à l'antécédent.*
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une application réelle.
Si f est **strictement** croissante sur I, alors

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \begin{aligned} f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow x \leqslant y, \\ f(x) < f(y) \Rightarrow x < y, \\ f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y, \\ f(x) > f(y) \Rightarrow x > y. \end{aligned}$$

De même :
*La **stricte** décroissance « inverse » les inégalités larges ou strictes par passage à l'antécédent.*
Si f est **strictement** décroissante sur I, alors

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \begin{aligned} f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow x \geqslant y, \\ f(x) < f(y) \Rightarrow x > y, \\ f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x \leqslant y, \\ f(x) > f(y) \Rightarrow x < y. \end{aligned}$$

Montonie large $\longrightarrow$ inégalités strictes.

*La monotonie **large** ne permet que de traiter les inégalités **strictes.***
Si f est croissante sur I, alors

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \begin{aligned} f(x) < f(y) \Rightarrow x < y, \\ f(x) > f(y) \Rightarrow x > y. \end{aligned}$$

Si f est décroissante sur I, alors

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \begin{aligned} f(x) < f(y) \Rightarrow x > y, \\ f(x) > f(y) \Rightarrow x < y. \end{aligned}$$

Preuve

Pour une fonction strictement monotone, les propriétés s'obtiennent directement par contraposée.
Le fait que la monotonie au sens large, ne suffise pas pour les inégalités larges s'obtient facilement avec le contre-exemple d'une fonction constante : l'inégalité large des images est toujours vérifiée (puisqu'elles sont toutes égales), ce qui ne dit rien de l'ordre des antécédents. ■