Convergence des suites

« L'infini n'est pas un état stable, mais la croissance elle-même. »
Aristote

Les suites traduisent des phénomènes par étapes. Ces processus n'avancent pas de façon continue, mais par pas de temps entiers. Dès l'antiquité, elles ont servi à Archimède pour proposer une méthode d'approximation de π et ont interrogé sur la notion d'*infini*.
Il faut attendre le XIX[e] siècle avec Cauchy pour formaliser la notion de limite. À sa suite, Weierstrass donnera la première définition axiomatique rigoureuse de l'ensemble des réels.

1 Définition d'une suite

A Opérations sur les suites

Définition 1.1

Une **suite réelle** u est une fonction de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
On note la suite u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Lorsque la suite n'est définie qu'à partir d'un rang n_0, on note $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
L'expression de u_n en fonction de n s'appelle le **terme général**.

⚠ Il ne faut pas confondre la notation (u_n) qui représente la suite toute entière, et u_n qui représente le terme n de la suite (c'est-à-dire un réel). Écrire u_n, suppose que n est un entier qui a été préalablement défini. En revanche, la notation $(u_n) = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comporte en elle-même la définition de n (placée en indice dans la deuxième notation, et sous-entendue dans la première).
Par exemple, il ne faut jamais écrire que u_n est croissante. C'est un non-sens !
C'est la même distinction qu'entre une fonction f et sa valeur en un point : $f(x)$.

Définition 1.2

On définit les opérations $+$, $\times$, et . sur les suites par :

1. Pour toutes suites (u_n) et (v_n), on définit la suite **somme** $(u_n)+(v_n)$ par
$$(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n).$$
2. Pour toutes suites (u_n) et (v_n), on définit la suite **produit** $(u_n)\times(v_n)$ par
$$(u_n)\times(v_n) = (u_n\times v_n).$$
3. Pour toute suite (u_n) et pour tout scalaire $\lambda\in\mathbf{R}$, on définit la suite $\lambda\cdot(u_n)$ par
$$\lambda\cdot(u_n) = (\lambda\, u_n).$$

Explications
Les opérations sur les suites se font terme à terme.

⚠ On peut avoir $(u_n)\times(v_n) = 0$ alors qu'aucune des suites n'est nulle. La structure n'est pas *intègre* et on ne peut pas simplifier une égalité par une suite, même si elle est non nulle.

Exemple
Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que (u_nv_n) soit la suite nulle, sans qu'aucune des deux ne le soit.
Solution :
On définit (u_n) par $\forall n\in\mathbf{N}$, $u_n = 0$ si n est pair et $u_n = 1$ si n est impair.
Et on définit (b_n) par $\forall n\in\mathbf{N}$, $v_n = 1$ si n est pair et $v_n = 0$ si n est impair.

Alors ni (u_n), ni (v_n) ne sont des suites nulles, mais $(u_n v_n)$ est nulle.

B Suites majorées, minorées et bornées

Définition 1.3

Une suite (u_n) est **majorée**, s'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant M$:

$$(u_n) \text{ majorée} \iff \exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant M.$$

M est alors *un* **majorant** de (u_n).

⚠ Le majorant, s'il existe, n'est pas unique, en particulier, si M est un majorant de la suite u, alors tout nombre qui lui est supérieur est aussi un majorant de u.

Explications

Une suite est majorée, s'il existe une « barrière » qu'elle ne dépasse pas.
Par définition, une suite est majorée, si l'ensemble de ses termes est majoré :

$$\left\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\right\} \leqslant M.$$

Exemple

Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang, est majorée.

Solution :

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$, le rang à partir duquel la suite u est majorée. On appelle M un de ses majorants.
L'ensemble $\{u_n,\ n \in [\![0, n_0]\!]\}$ admet une nombre fini d'éléments (n_0+1), et il a donc un maximum que l'on peut noter M'.
Si on pose $\widetilde{M} = \max(M, M')$, alors $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant \widetilde{M}$.
Donc (u_n) est majorée.

Exemple *(Notations)*

Expliquer pourquoi u_n est toujours majoré.

Solution :

u_n désigne un terme particulier de la suite, et non toute la suite. Il est donc toujours majorée (par lui-même ou tout nombre qui est supérieur).
Les étudiants qui maîtrisent les accords des participes passés, auront remarqué que le terme « majoré » était écrit au masculin (pour désigner le terme de la suite) et non au féminin (pour désigner toute la suite) : mais ce genre de notions grammaticales dépasse beaucoup le cadre du programme et n'est donc réservé qu'aux étudiants les plus à l'aise.

Le contraire d'une suite majorée s'obtient par la négation de l'assertion logique précédente :

Propriété 1.4

Une suite (u_n) n'est pas majorée si

$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ u_{n_0} > M.$$

Explications

De façon imagée, quel que soit le nombre M choisi (aussi grand soit-il), on trouvera toujours un terme (désigné par un indice n_0) qui dépassera M : $u_{n_0} > M$.
De la même façon :

Définition 1.5

$$(u_n) \textbf{ minorée} \iff \exists m \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant m.$$

On dit que m est *un* **minorant** de (u_n).

Définition 1.6 *(Bornes supérieures et inférieures)*

Lorsque (u_n) est majorée, elle admet un plus petit majorant que l'on appelle sa **borne supérieure**.

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Lorsque cette borne est atteinte en un terme u_{n_0}, c'est alors un **maximum**.

Lorsque (u_n) est minorée, elle admet un plus grand minorant que l'on appelle sa **borne inférieure**.

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Lorsque cette borne est atteinte en un terme u_{n_0}, c'est alors un **minimum**.

Preuve

Voir le cours sur les nombres réels. ∎

Définition 1.7

On dit qu'une suite (u_n) est **bornée**, si elle est à la fois majorée et minorée.
On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées.

Propriété 1.8 *(Caractérisation d'une suite bornée)*

(u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.

Preuve

$$\begin{aligned}(u_n) \text{ est bornée } &\iff \exists (m, M) \in \mathbf{R}^2,\ \text{tel que } \forall n \in \mathbf{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M\\ &\iff \exists A \in \mathbf{R}_+,\ \text{tel que } \forall n \in \mathbf{N},\ -A \leqslant u_n \leqslant A \qquad (\star)\\ &\iff \exists A \in \mathbf{R}_+,\ \text{tel que } \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leqslant A\\ &\iff (|u_n|) \text{ est majorée.}\end{aligned}$$

Pour l'équivalence de $(\star)$, le sens direct s'obtient en prenant $A = \max(M, -m)$ et le sens réciproque en prenant $M = A$ et $m = -A$. ∎

Exemple

Pour $a \in \mathbf{R}$, $\big(\cos(an)\big)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty$.
Pour $|a| \leqslant 1$, les suites définies par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = au_n$ sont bornées.
Pour $b > 0$, les suites définies par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + b$ sont minorées, mais non majorées.

Propriété 1.9

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites bornées et $\lambda \in \mathbf{R}$,
alors $(u_n) + (v_n)$, $(u_n) \times (v_n)$ et $\lambda(u_n)$ sont des suites bornées.

Preuve

Si on suppose que (u_n) et (v_n) sont bornées, alors $\exists A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leqslant A$ et $|v_n| \leqslant A$.
(pour A on prend le maximum entre deux majorants de u et v)
Somme :

$$\begin{aligned}|u_n + v_n| &\leqslant |u_n| + |v_n| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant 2A \qquad \text{par hypothèse.}\end{aligned}$$

Donc la somme est bornée.

Produit :

$$|u_n v_n| \leqslant |u_n|\,|v_n| \leqslant A^2.$$

Donc $(u_n v_n)$ est bornée.

Produit avec un scalaire :

$$|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leqslant |\lambda| A \qquad \text{car } |\lambda| \geqslant 0.$$

Donc (λu_n) est bornée. ∎

Exemple

Si (u_n) et (v_n) sont majorées, $(u_n) \times (v_n)$ est-elle nécessairement majorée ?
Solution :
Non, par exemple pour $u_n = v_n = -n$, alors les deux suites sont majorées, mais la suite produit $(u_n v_n)$ n'est pas majorée.

C Monotonie des suites

Définition 1.10

On dit qu'une suite (u_n) est

- **croissante** si $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,
- **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} > u_n$,
- **décroissante** si $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$,
- **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} < u_n$.

Remarque : On peut aussi définir une suite croissante ou décroissante à partir d'un certain rang n_0.

Exemple

La suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$ est croissante.
La suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$ est décroissante.

⚠ Le contraire d'une suite croissante est une suite telle que $\exists n_0 \in \mathbf{N},\ u_{n_0+1} < u_{n_0}$.
Cela ne veut pas dire que la suite est décroissante.
Ainsi, une suite qui n'est pas croissante, n'est pas nécessairement décroissante : il existe des suites qui ne sont pas monotones ; elles ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Exemple

Donner l'exemple d'une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante.
Solution :
La suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Définition 1.11

(u_n) est dite **monotone**, si elle est soit croissante, soit décroissante.
(u_n) est dite **constante**, si elle est à la fois croissante et décroissante.
(u_n) est dite **stationnaire**, si elle est constante à partir d'un certain rang.

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut

1. Étudier $u_{n+1} - u_n$ (cas d'une suite définie avec des sommes ou une relation de récurrence linéaire)
2. Étudier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ si la suite est de **signe constant** et **ne s'annule pas** (cas des suites avec des produits ou des puissances),
3. Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f.

2 Théorèmes de convergence

A Suites convergentes

Définition 2.1

On dit qu'une suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ (ou admet ℓ pour limite), si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \text{tel que } \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

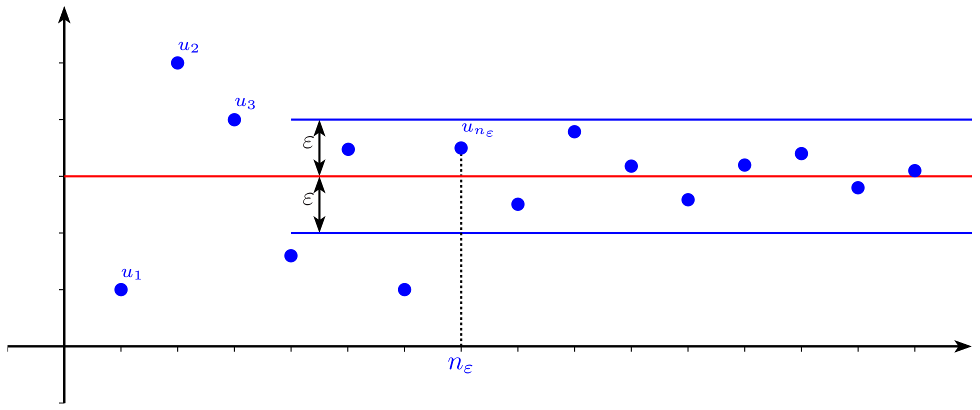
On dit qu'une suite (u_n) est convergente, s'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Explications

Cela veut dire que la suite s'approche de ℓ autant que l'on veut. :
Si je trace un « couloir » aussi fin que je veux autour de ℓ, il y aura toujours un rang à partir duquel la suite sera « coincée » dans ce couloir.
Reprenons cette phrase et traduisons-la avec la définition formelle :

Si je trace un « couloir » aussi fin que je veux autour de ℓ, ε désigne la demi-largeur du couloir	$\forall \varepsilon > 0$
il y aura toujours un rang n_ε désigne un rang qui convient	$\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$
à partir duquel	$\forall n \geqslant n_\varepsilon$
la suite sera « coincée » dans ce couloir	$\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$

Contrairement à l'usage courant en français, une limite n'est pas une barrière infranchissable. La limite est davantage comme un point d'équilibre qui attire la suite et dont elle s'approche infiniment (elle peut éventuellement osciller autour, comme pour un pendule amorti).



Méthode

Pour montrer qu'une suite converge en utilisant cette définition, on pose $\varepsilon > 0$ quelconque, et on cherche un n_ε qui dépend de ε tel que tous les termes après n_ε soient dans le couloir $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

Dans la très grande majorité des cas, on utilisera les théorèmes de convergence présentés plus loin pour démontrer la convergence et trouver la limite.

⚠ n_ε dépend de ε (plus le couloir est étroit, plus n_ε sera grand).

Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas convergente, même si on dit que $+\infty$ est sa limite.

Exemple

Trouver des exemples de suites divergentes qui ne tendent ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

1. Avec une suite bornée.
2. Avec une suite ni majorée, ni minorée.

Solution :

1. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (-1)^n$ définit une suite bornée divergente.
2. $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (-1)^n n$ définit une suite divergente ni minorée, ni majorée.

Propriété 2.2

1. Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est unique.
2. Une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

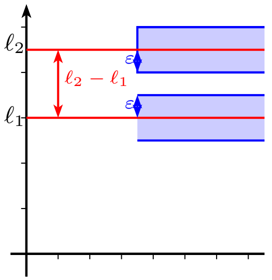
Preuve

1. On suppose qu'il existe deux limites, ℓ_1 et ℓ_2 et on cherche à montrer qu'alors $\ell_1 = \ell_2$.
   On suppose par l'absurde que $\ell_1 \neq \ell_2$. Par exemple $\ell_1 < \ell_2$.
   Idée intuitive :
   L'idée est de montrer que la suite ne peut pas être à la fois très proche de ℓ_1 et de ℓ_2.
   Pour cela on définit deux couloirs autour de ℓ_1 et ℓ_2 de telle sorte que la suite ne puisse être dans les deux à la fois. Il suffit de choisir une largeur de couloir égale au tiers de la distance entre ℓ_1 et ℓ_2.
   Puisque $u_n \to \ell_1$, on sait qu'à partir d'un certain rang n_1, tous les termes sont dans le couloir autour de ℓ_1.
   Mais $u_n \to \ell_2$ également. À partir d'un rang n_2 (a priori différent), tous les termes sont dans le couloir autour de ℓ_2.
   Ainsi, en allant au delà de n_1 et de n_2, les termes sont à la fois dans le couloir autour de ℓ_1 et dans le couloir autour de ℓ_2. Mais c'est impossible car nous avons vu que les deux couloirs sont disjoints. Il est donc impossible que (u_n) tende vers deux limites différentes.

Formellement :
On pose $\varepsilon = \frac{\ell_2-\ell_1}{3} > 0$.
$u_n \to \ell_1$, donc $\exists n_1 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.
$u_n \to \ell_2$, donc $\exists n_2 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_2, |u_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.
Soit $N = \max(n_1, n_2)$, alors $\forall n \geqslant N$,

$$\ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon \qquad (\star)$$

Or $\ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2-\ell_1}{3} = \frac{\ell_2+2\ell_1}{3}$,
et $\ell_2 - \varepsilon = \ell_2 - \frac{\ell_2-\ell_1}{3} = \frac{2\ell_2+\ell_1}{3}$.
Ainsi, $\ell_1 < \ell_2$, $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$, ce qui est contradictoire avec l'équation $(\star)$.
C'est absurde.
Donc $\ell_1 = \ell_2$ et la limite d'une suite est unique.



2. Simplement car $|u_n - \ell - 0| = |u_n - \ell|$.
Intuitivement, si (u_n) converge vers ℓ, alors elle s'en approche infiniment. Cela veut dire que la distance entre u_n et ℓ tend vers 0, c'est-à-dire que $(u_n - \ell)$ tend vers 0. ∎

Exemple

La suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0.
La suite définie par $v_n = \frac{1}{n+1} + 5$ converge vers 5.

⚠ **Tout doit disparaître :** lorsque l'on est passé à la limite, tous les « n » ont disparu. Ils tendent tous vers $+\infty$, et on ne doit pas en retrouver dans le résultat.

Théorème 2.3

Si (u_n) converge, alors elle est bornée.

Remarque : On utilise souvent la contraposée : si une suite n'est pas bornée, alors elle diverge.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, par exemple $\varepsilon = 1$,
si $u_n \to \ell$, alors
$$\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geqslant n_\varepsilon, \ |u_n - \ell| \leqslant 1$$
De plus, $\left\{u_n\right\}_{n<n_\varepsilon}$ est un ensemble *fini* d'éléments. Il admet donc un maximum M et un minimum m.
Ainsi $\forall n < n_\varepsilon$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
Et pour $n \geqslant n_\varepsilon$, $\ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$.
Par conséquent,
$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \min(m, \ell-1) \leqslant u_n \leqslant \max(M, \ell+1)$$
Donc (u_n) est bornée. ∎

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple la suite $\left(\sin \frac{n\pi}{4}\right)$ est bornée mais ne converge pas. Nous verrons cependant, avec le théorème de Bolzano-Weierstrass qu'il existe une forme de réciproque *affaiblie*.

Propriété 2.4

Si (u_n) et (ε_n) sont deux suites réelles, telles que

1. (u_n) est bornée,
2. (ε_n) tend vers 0,

alors $(u_n\varepsilon_n)$ tend vers 0.

Preuve

Si (u_n) est bornée, alors $\exists M \in \mathbf{R}_+$, tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant M$.
Sans restreindre la généralité, on peut supposer $M > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut poser $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ (car $M > 0$),
comme $\varepsilon_n \to 0$,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow \ |\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}.$$
Donc $\forall n \geqslant n_0, |u_n\varepsilon_n| = |u_n|\,|\varepsilon_n| \leqslant M\,|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$. Donc $(u_n\,\varepsilon_n)$ converge vers 0. ∎

Exemple

Étudier la convergence de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $\frac{\sin n}{n}$.
Solution :
La suite $(\sin n)$ est bornée (car la fonction sinus est bornée sur $\mathbf{R}$).
La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.
D'après la proposition 2.4, $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Exemple

Trouver des contre-exemples lorsque l'une des deux hypothèses de la propriété 2.4 n'est pas vérifiée.
Solution :
$\star$ Si (u_n) n'est pas bornée, mais $\varepsilon_n \to 0$, alors la suite peut converger vers 0, vers une limite non nulle, ou même diverger.
Par exemple pour $u_n = n^2$.
Si on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n^3} \to 0$ alors la suite produit tend vers 0.
Si on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ alors la suite produit tend vers 1.
Si on pose $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \to 0$ alors la suite produit tend vers $+\infty$.

$\star$ Si (u_n) est bornée, mais $\varepsilon_n \not\to 0$, alors la suite peut converger vers 0, converger vers une limite non nulle ou diverger. Par exemple, pour $\varepsilon_n = 1$,
Si on pose $u_n = 0$ qui est bornée, alors la suite produit tend vers 0.
Si on pose $u_n = 1$ qui est bornée, alors la suite produit tend vers 1.
Si on pose $u_n = (-1)^n$ qui est bornée, alors la suite produit diverge.

B Suites divergentes

Définition 2.5

Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas. C'est-à-dire

$$(u_n) \text{ diverge } \iff \forall \ell \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geqslant N \text{ tel que } |u_n - \ell| > \varepsilon_0.$$

Définition 2.6

Une suite (u_n) admet $+\infty$ pour limite si et seulement si

$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \text{tel que } \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant M.$$

⚠

1. Une suite qui diverge ne tend en général pas vers $\pm\infty$.
2. Il ne suffit pas que (u_n) ne soit pas majorée pour quelle tende vers $+\infty$. En effet, il faut en plus que (u_n) reste au dessus de M à partir d'un certain rang.

Exemple

La suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = n(-1)^n$ est une suite non bornée qui diverge, mais elle ne tend pas vers $+\infty$.

Propriété 2.7

Une suite qui admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite est non bornée, donc diverge.

Preuve

Si u_n tend vers $+\infty$, alors $\forall M \in \mathbf{R}$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant M$.
En particulier $u_{n_0} \geqslant M$ ce qui prouve que la suite est non bornée.
Or, on a vu que toute suite convergente est bornée, donc par contraposée, si la suite n'est pas bornée, alors elle diverge. ■

Remarque : On définit de même une suite admettant $-\infty$ pour limite.

Définition 2.8

La convergence ou divergence d'une suite s'appelle sa **nature**.

Propriété 2.9

La modification d'un nombre fini de termes de la suite ne modifie pas sa nature ni son éventuelle limite.

Preuve

Si un nombre fini de termes sont modifiés, on peut noter N le plus grand indice de ceux-ci et il suffit de choisir $n_0 > N$ pour appliquer les définitions. ■

C Opérations sur les limites

Théorème 2.10

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ', soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

1. $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ est convergente de limite $\lambda\ell + \mu\ell'$ (**linéarité**).
2. $(u_n) \times (v_n)$ est convergente de limite $\ell \times \ell'$.

Preuve

Preuve pour $\lambda(u_n)$:
Si $\lambda = 0$, la suite est identiquement nulle et $\lambda u_n \to 0 = \lambda\ell$.
Si $\lambda \neq 0$,
Soit $\varepsilon > 0$, alors $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$ car $|\lambda| > 0$.
On peut donc appliquer la définition de la convergence de (u_n) à $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\lambda}$.
Donc

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda|\,|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |\lambda\, u_n - \lambda\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\lambda(u_n)$ converge vers $\lambda\ell$.

Preuve pour $(u_n) + (v_n)$:
On utilise l'inégalité triangulaire dans la définition.
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists n_0' \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0' \ \Rightarrow |v_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $n \geqslant \max(n_0, n_0')$,

$$\begin{aligned}\left|v_n + v_n - (\ell + \ell')\right| = \left|u_n - \ell \ + \ v_n - \ell'\right| &\leqslant |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
On en déduit la propriété de linéarité énoncée dans le théorème.

Preuve pour $(u_n) \times (v_n)$:
On remarque que $u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$
Or (v_n) converge donc est bornée et $(u_n - \ell) \to 0$.
Donc d'après la propriété 2.4, $(u_n - \ell)v_n \to 0$
De même, $(v_n - \ell')u_n \to 0$.
Donc par somme (preuve précédente), $u_n v_n - \ell\ell' \to 0$.
Donc $u_n\, v_n \to \ell\ell'$. ■

Lemme 2.11

Si (v_n) est un suite convergente de limite non nulle, alors v_n est strictement de même signe que sa limite à partir d'un certain rang (et en particulier $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang).

Preuve

$v_n \to \ell \neq 0$. Si on pose $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Par exemple, si $\ell > 0$, alors $\forall n \geqslant n_0$, $0 < \frac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\ell}{2}$, donc $u_n > 0$.
De même, si $\ell < 0$, alors $\forall n \geqslant n_0$, $\frac{3\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{\ell}{2} < 0$, donc $u_n < 0$. ■

Théorème 2.12

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' avec $\ell' \neq 0$

1. la suite $(\frac{1}{v_n})$ est définie à partir d'un certain rang et elle est convergente de limite $\frac{1}{\ell'}$
2. la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est définie à partir d'un certain rang et elle est convergente de limite $\frac{\ell}{\ell'}$

Preuve

Il suffit de faire la preuve pour le premier point. Le deuxième en découle à partir du théorème du produit de deux suites.
$v_n \to \ell' \neq 0$, donc $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $v_n \neq 0$.
On peut donc définir la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \geqslant n_0}$.

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'}\right| = \left|\frac{\ell' - v_n}{v_n \ell'}\right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n \ell'|}.$$

Idée :
À présent, l'idée est de montrer que $(\frac{1}{v_n \ell'})$ est bornée (ce qui nous permettra d'utiliser la propriété 2.4).
Or, montrer que l'inverse est bornée, revient à prouver que v_n n'est pas « trop près » de 0. On utilise pour cela sa convergence pour l'écarter d'au moins $\frac{|\ell'|}{2}$ de 0 (avec le bon choix pour ε).
Formalisation :
Pour $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2} > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_\varepsilon, |v_n - \ell'| \leqslant \frac{|\ell'|}{2}$.
Ains, pour $n \geqslant n_\varepsilon$, le corollaire de l'inégalité triangulaire donne

$$|v_n| = |\ell' + v_n - \ell'| \geqslant |\ell'| - |v_n - \ell'| \geqslant \ell' - \frac{\ell'}{2} = \frac{\ell'}{2}.$$

Donc $|v_n \ell'| = |v_n|\ |\ell'| \geqslant \frac{\ell'^2}{2}$.
Donc $\forall n \geqslant \max(n_0, n_\varepsilon)$, $\left|\frac{1}{u_n \ell'}\right| \leqslant \frac{2}{\ell'^2}$
La suite $\frac{1}{vn\ell'}$ est donc bornée et la suite $(v_n - \ell')$ tend vers 0. Donc $\frac{1}{v_n} \to 0$. ■

Exemple

Montrer, en s'inspirant de la preuve précédente, que si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

Solution :
Méthode 1 :
Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Or $|u_n| = |u_n - \ell + \ell|$, donc en appliquant l'inégalité triangulaire et son corollaire :

$$|\ell| - |u_n - \ell| \leqslant |u_n| \leqslant |\ell| + |u_n - \ell|.$$

Puis en utilisant la majoration précédente : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, on trouve $|\ell| - \varepsilon \leqslant |u_n| \leqslant |\ell| + \varepsilon$ ce qui prouve le résultat cherché.
Méthode 2 :
Si $\ell = 0$, alors il suffit d'appliquer la définition.
Si $\ell > 0$, alors, la suite est strictement positive à partir d'un certain rang, donc $|u_n| = u_n$ et la convergence de $|u_n|$ correspond à celle de ℓ.
Si $\ell < 0$, alors, la suite est strictement négative à partir d'un certain rang, et $|u_n| = -u_n$, donc par linéarité de la limite, $|u_n| \to -\ell = |\ell|$.

Théorème 2.13 *(Tableau des limites)*

ℓ et ℓ' sont deux réels non nuls

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$u_n \times v_n$	$\frac{u_n}{v_n}$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
0	ℓ'	ℓ'	0	0
ℓ	0	ℓ	0	$\pm\infty$ pas de limite
0	0	0	0	indéterminé
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé	0
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	indéterminé	$\pm\infty$ pas de limite
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé
$+\infty$	$-\infty$	indéterminé	$-\infty$	indéterminé

L'existence du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Explications

La forme *indéterminée* veut dire qu'il n'existe pas de formule générale. Mais cela ne veut pas dire qu'il faille s'en contenter. Au contraire, il faut exprimer différemment la suite pour trouver sa limite et lever l'indétermination.

⚠ Une suite de limite nulle peut ne jamais s'annuler. Par exemple $\frac{1}{n}$ admet 0 pour limite, mais ne s'annule jamais.

Méthode *(Lever une indétermination)*

1. Lorsque c'est un quotient de puissances, on factorise par les termes de plus grande puissance au numérateur et au dénominateur.
2. Lorsque c'est la différence de deux racines, on utilise la quantité conjuguée.

Les croissances comparées puis l'analyse asymptotique complèteront ces méthodes.

Exemple

Étudier la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par

$$u_n = \frac{2n^3 - 5n + 1}{n^3 + 6n^2 + 8}.$$

Solution :
Pour $n \geqslant 1$, on factorise par n^3 au numérateur et par n^3 au dénominateur.

$$u_n = \frac{2 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{6}{n} + \frac{8}{n^3}}.$$

Le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers 1. Donc par quotient $u_n \to 2$.

Exemple

Étudier la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $u_n = \dfrac{-n^3 - n^2 + n + 1}{6n^2 + 7}$.

Solution :
Pour $n \geqslant 1$, on factorise par n^3 au numérateur et par n^2 au dénominateur.

$$u_n = n\frac{-1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{6+\frac{7}{n^2}}.$$

Dans la fraction, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers 6, donc le quotient tend vers $-\frac{1}{6}$. Avec le n en facteur, $u_n \to -\infty$ par produit.

Exemple

Étudier la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}$.

Solution :
$\forall n \in \mathbf{N},\ \sqrt{n+4} + \sqrt{n+1} \neq 0$, donc

$$u_n = \frac{\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = \frac{n+4-(n+1)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}} = \frac{3}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1}}.$$

Or (par somme) $\sqrt{n+4} + \sqrt{n+1} \to +\infty$, donc par quotient, $u_n \to 0$.

Exemple

Étudier la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $u_n = \dfrac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}}$.

Solution :
$\forall n \in \mathbf{N},\ \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} \neq 0$, donc la suite est bien définie.

$$u_n = \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}}}.$$

Or $3\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 3$ et $\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} \to 2$ par somme.
Donc par quotient, (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

D Convergence des suites monotones

Théorème 2.14 *(Théorème de la limite monotone)*

Si (u_n) est une suite monotone, alors (u_n) admet une limite finie ou infinie.

Les deux énoncés suivants vont nous donner des précisions sur le comportement de la suite, selon qu'elle est bornée ou non. Leur preuve permettra donc de démontrer le théorème de la limite monotone.

Théorème 2.15

1. Si (u_n) est une suite croissante majorée, alors (u_n) converge et sa limite est
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} u_n.$$
2. Si (u_n) est une suite croissante non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Preuve

1^er^ cas : si (u_n) est non majorée.
Alors par définition d'une suite non majorée :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_M \in \mathbf{N},\ \text{tel que } u_{n_M} > M.$$

Or (u_n) est croissante, donc $\forall n \geqslant n_M,\ u_n \geqslant u_{n_M} > M$.
Ainsi

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_M \in \mathbf{N},\ \text{tel que } \forall n \geqslant n_M,\ u_n > M.$$

C'est la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$.

2^e^ cas : si (u_n) est majorée, alors elle admet une borne supérieure M.
Ainsi, par définition de la borne supérieure,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \text{tel que } M - \varepsilon \leqslant u_{n_\varepsilon} \leqslant M.$$

La première inégalité traduit que M est le plus petit majorant : s'il n'existait pas de u_n supérieur à $M - \varepsilon$, alors $M - \varepsilon$ serait aussi un majorant, qui serait strictement plus

petit que M. C'est absurde. D'où l'existence de $u_{n_\varepsilon} \geqslant M-\varepsilon$.
La deuxième inégalité traduit que M est un majorant, c'est-à-dire que tous les termes de la suite lui sont plus petits : $u_{n_\varepsilon} \leqslant M$.
Or (u_n) est croissante, donc $\forall n \geqslant n_\varepsilon, u_n \geqslant u_{n_\varepsilon} \geqslant M-\varepsilon$.
De plus comme M est un majorant de la suite, $\forall n \geqslant n_\varepsilon,\ u_n \leqslant M$.
Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \text{tel que } \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow M-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant M \Rightarrow |u_n - M| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $u_n \to M$ sa borne supérieure. ■

Corollaire 2.16

1. Si (u_n) est une suite décroissante minorée, alors (u_n) converge et sa limite est

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} u_n.$$

2. Si (u_n) est une suite décroissante non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Preuve

On utilise le théorème 2.15 avec la suite $-u$. ■

Méthode *(Utilisation du théorème de la limite monotone)*

Pour une suite monotone bornée, le théorème de la limite monotone donne **l'existence** de la limite.
Mais il est souvent difficile de trouver la valeur de cette limite avec ce théorème (on n'a aucun moyen de connaître la borne supérieure).
Une fois que l'on sait que la suite converge, on cherchera donc un autre moyen pour calculer la limite (si c'est demandé).

⚠ Il faut vérifier que le majorant **ne dépend pas de** n : c'est un nombre fixe.

Exemple

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^k}.$$

Montrer que (u_n) converge (on pourra utiliser la majoration $\frac{1}{k^k} \leqslant \frac{1}{2^k}$).
Solution :
On remarque que pour $k=0$, $k^k = 1 \neq 0$, la suite est donc bien définie.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^k} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0.$$

Donc la suite est croissante. $\forall n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
0 < u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^k} &\leqslant 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} && (\text{car } \forall n \geqslant 2,\ k^k \geqslant 2^k)\\
&\leqslant 2 + \frac{1}{2^2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} && (\text{somme des termes d'une suite géométrique})\\
&\leqslant 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\\
&\leqslant 2 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{5}{2} && (\text{ne dépend pas de } n).
\end{aligned}$$

Donc (u_n) majorée par $\frac{5}{2}$.
(u_n) est croissante majorée, ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge (et sa limite est dans $[0, \frac{5}{2}]$ mais le théorème n'en dit pas plus).

Définition 2.17

Deux suites u et v sont **adjacentes**, si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.

Théorème 2.18 *(Suites adjacentes)*

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Preuve

Soient u et v les deux suites adjacentes, avec u croissante et v décroissante.
⋆ On démontre que (u_n) majorée.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$, donc pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n - v_n \leqslant 1$, donc $u_n \leqslant v_n + 1 \leqslant v_0 + 1$ par décroissance de v.
On remarque même que cette majoration est aussi vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par croissance de u. ⋆ On démontre que (u_n) et (v_n) convergent.
u est croissante majorée, donc converge (d'après le théorème de la limite monotone).
Or $u - v$ converge, donc $v = u - (u-v)$ converge par sommme.
Et par opération sur les limites

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + 0.$$

■

Exemple *(Suite harmonique : à connaître)*

On note

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n),$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune notée γ.

Solution :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n) = \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Or $\forall x>-1$, $\ln(1+x)<x$ (inégalité à connaître), donc

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad u_{n+1}-u_n \leqslant \frac{1}{n+1}+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\leqslant 0.$$

Donc (u_n) est décroissante.

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Et avec la même inégalité que précédemment,
$v_{n+1}-v_n\geqslant \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\geqslant 0$.
Donc (v_n) est croissante.

Or $u_n-v_n=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0$.
Donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
Leur limite γ s'appelle la constante d'Euler ($\gamma\approx 0,576$).

Exemple *(Théorème des segments emboîtés)*

Voici une autre formulation du théorème des suites adjacentes :
Si (I_n) est une suite de segments de la forme $[a_n,b_n]$, tels que

1. $\forall n\in\mathbf{N}$, $I_{n+1}\subset I_n$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n-a_n=0$.

$$\text{alors } \bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n \text{ est un singleton}$$

E Convergence et comparaison

Théorème 2.19 *(Conservation des inégalités par passage à la limite)*

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes telles que $u_n\leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n\to+\infty}u_n\leqslant \lim_{n\to+\infty}v_n.$$

⚠ Même dans le cas d'une inégalité stricte : $u_n<v_n$, on conserve une inégalité *large* pour les limites.

Corollaire 2.20

Soit $a\in\mathbf{R}$ une constante fixée, et (u_n) une suite *convergente*.

- si $u_n\leqslant a$ à partir d'un certain rang, alors
$$\lim_{n\to+\infty}u_n\leqslant a.$$
- si $u_n\geqslant a$ à partir d'un certain rang, alors
$$\lim_{n\to+\infty}u_n\geqslant a.$$

Preuve

On raisonne par l'absurde (la preuve ressemble beaucoup à celle de la propriété 2.2 sur l'unicité de la limite) :
Supposons que $u_n \to \ell_u$ et $v_n \to \ell_v$, avec $\ell_u > \ell_v$. On peut alors poser $\varepsilon = \frac{\ell_u - \ell_v}{3}$,
Comme $u_n \to \ell_u$, $\exists n_1 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell_u| < \varepsilon \Rightarrow u_n \geqslant \ell_u - \varepsilon$.
Comme $v_n \to \ell_v$, $\exists n_2 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_2$, $|v_n - \ell_v| < \varepsilon \Rightarrow v_n \leqslant \ell_v + \varepsilon$.
donc $\forall n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $u_n \geqslant \ell_u - \varepsilon = \frac{2\ell_u + \ell_v}{3}$ et $v_n \leqslant \ell_v + \varepsilon = \frac{\ell_u + 2\ell_v}{3}$.
Comme $\ell_u > \ell_v$,

$$v_n \leqslant \frac{\ell_u + 2\ell_v}{3} < \frac{2\ell_u + \ell_v}{3} \leqslant u_n.$$

Or, on a supposé $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang : c'est absurde.
Donc $\ell_u \leqslant \ell_v$: les inégalités (larges) donc conservées par passage à la limite.

Pour le corollaire, il suffit de prendre v une suite constante égale à a. ■

Théorème 2.21

Si $u_n \to +\infty$ et si (v_n) est une suite telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Alors

$$v_n \to +\infty.$$

Remarque : Il existe un théorème analogue en $-\infty$.

Preuve

On utilise la définition de la limite en $+\infty$ pour v.
Soit $M \in \mathbf{R}$,
$u_n \to +\infty$, donc $\exists n_M \in \mathbf{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_M$, $u_n \geqslant M$.
or $v_n \geqslant u_n$, donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_M \Rightarrow v_n \geqslant M$.
C'est la définition pour dire que $v_n \to +\infty$. ■

Exemple

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles.
On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant b_n$, que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) converge.
Montrer que la suite (a_n) converge, et comparer les limites des deux suites.
Solution :
La suite b converge, donc est majorée, notons M un tel majorant.
Ainsi $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant b_n \leqslant M$.
Donc la suite (a_n) est croissante et majorée par M, donc elle converge (théorème de la limite monotone).
Alors, par passage des inégalités aux limites $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Théorème 2.22 *(Théorème d'encadrement dit aussi théorème des gendarmes)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de même limite ℓ.
Si (w_n) est une suite telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant w_n \leqslant v_n,$$

alors (w_n) est convergente de limite ℓ.

⚠ Pour utiliser le théorème de passage des inégalités au limites, il faut **d'abord** montrer que les suites convergent.
Dans le théorème d'encadrement, la convergence de (w_n) est une conclusion : le théorème d'encadrement montre que la suite converge **et** donne sa limite.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$,
$u_n \to \ell$, donc $\exists n_1$, tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant u_n$.
$v_n \to \ell$, donc $\exists n_2$, tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_2 \Rightarrow |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon \Rightarrow v_n \leqslant \ell + \varepsilon$.
Donc $\forall n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $\quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon$.
C'est-à-dire $|w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc $w_n \to \ell$. ■

3 Suites extraites

On n'est pas toujours intéressé par la totalité de la suite. Parfois au contraire, on n'étudie qu'une suite extraite : par exemple la suite dont on ne garde que les indices pairs : u_0, u_2, $u_4 \cdots$.
De telles suites extraites nous donnent chacune des informations *partielles*, mais peuvent s'avérer beaucoup plus faciles à étudier.
Par exemple, pour montrer qu'une suite diverge, il suffira de trouver une extraction de cette suite qui diverge.
Pour construire cette suite extraite, la seule condition est d'avancer strictement dans les indices sans s'arrêter (on ne veut pas « piétiner » sur le même indice, ou pire, revenir en arrière).
On peut alors numéroter les nouveaux indices de la suite extraite par $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\cdots$ de telle sorte que la fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ soit strictement croissante.
Par exemple, pour les indices pairs, on aura : $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 2, \varphi(2) = 4, \cdots, \varphi(n) = 2n, \cdots$

Définition 3.1 *(Suite extraite)*

Soit (u_n) une suite.
On appelle **suite extraite** de (u_n), toute suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad v_n = u_{\varphi(n)},$$

où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une application strictement croissante appelée **fonction d'extraction.**

Explications

La nouvelle suite correspond alors à l'application composée $u \circ \varphi$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} & \to & \mathbf{R} \\ n & \mapsto & \varphi(n) & \mapsto & u_{\varphi(n)}. \end{array}$$

Exemple

$(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de (u_n) qui ne prend que les termes $2n$.

De même $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est une autre suite extraite.
$\left(u_{(n^2)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une autre suite extraite.

Définition 3.2 *(Suites d'indices pairs et impairs)*

Soit (u_n) une suite.
On appelle **suite extraite d'indices pairs** de (u_n), la suite (v_n) définie par

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad v_n=u_{2n}.$$

On appelle **suite extraite d'indices impairs** de (u_n), la suite (w_n) définie par

$$\forall n\in\mathbf{N},\qquad w_n=u_{2n+1}.$$

Explications

Cela revient simplement à ne prendre que les indices pairs ou que les indices impairs.

⚠ **Nouvelle extraction :** si $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de u, alors une suite extraite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ par la fonction d'extraction ψ s'écrit $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
Il en faut pas se tromper d'ordre dans la composition.

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbf{N} & \to & \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} & \to & \mathbf{R}\\ n & \mapsto & \psi(n) & \mapsto & \varphi(\psi(n)) & \mapsto & u_{\varphi(\psi(n))}.\end{array}$$

Propriété 3.3

Si $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ est une application strictement croissante, alors

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad \varphi(n)\geqslant n.$$

Preuve

Par récurrence sur $\mathbf{N}$. ■

Théorème 3.4

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell\in\overline{\mathbf{R}}$, alors toute suite extraite de u tend aussi vers ℓ.

Preuve

Par exemple si $\ell\in\mathbf{R}$, on suppose donc que $u_n\to\ell$.
Soit $\varepsilon>0$, il existe donc $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.
Or $\forall n\geqslant n_0$, $\varphi(n)\geqslant n$, donc $\varphi(n)\geqslant n_0$, donc $\left|u_{\varphi(n)}-\ell\right|\leqslant\varepsilon$.
Ceci prouve donc que $u_{\varphi(n)}\to\ell$.
On a le même raisonnement dans le cas d'une limite infinie. ■

Exercice

Montrer que la réciproque est aussi vraie.

Solution :

Si on considère la fonction d'extraction égale à l'identité, alors on a le résultat voulu.

Corollaire 3.5 *(Montrer qu'une suite diverge)*

1. Si une suite u admet au moins une suite extraite n'admettant pas de limite, alors elle n'admet pas de limite.
2. Si une suite u admet deux suites extraites qui tendent vers des limites différentes, alors elle n'admet pas de limite.

Les suites les plus simples à considérer sont souvent (u_{2n}) et (u_{2n+1}), mais l'expression de la suite peut pousser vers d'autres suites extraites.

Preuve

1. Cas particulier de la propriété précédente (contraposée du sens direct).
2. Idem.

■

Exemple

Montrer que la suite définie pour tout n par $u_n=(-1)^n$ diverge.
Solution :
La suite extraite d'indices pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante égale à 1, donc elle converge vers 1.
La suite extraite d'indices impairs est constantes égale à -1, donc elle converge vers -1.
Donc la suite u diverge.

⚠ Ce théorème est rarement utilisé pour montrer qu'une suite tend vers ℓ, mais plutôt pour démontrer son contraire.
En effet, pour montrer que $u\to\ell$, il ne suffit pas de trouver *une* suite extraite qui tende vers ℓ, mais il faut montrer que **toutes** ses suites extraites tendent vers ℓ (et il y en a beaucoup...)
Dans l'exemple précédent, les deux suites extraites d'indices pairs et d'indices impairs convergent et pourtant la suite u diverge.
Cependant, il existe un cas particulier très utile qui consiste à considérer les deux suites extraites d'indices pairs et d'indices impairs. En effet, mises ensembles, ces deux suites contiennent tous les termes de u et il n'est alors pas nécessaire de considérer les autres extractions.

Définition 3.6 *(Valeurs d'adhérence)*

Les **valeurs d'adhérence** dans $\mathbf{R}$ d'une suite u sont toutes les limites de ses suites extraites convergentes.

Exemple

La suite définie pour tout $n\in\mathbf{N}$ par $u_n=(-1)^n$ admet seulement deux valeurs d'adhérence 1 et -1 (on a seulement prouvé que 1 et -1 sont valeurs d'adhérence, mais pas que ce sont les seules, comment feriez-vous ?)

Propriété 3.7

(u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$, **si, et seulement si** (u_n) tend vers ℓ.

Preuve

Le sens direct.
Montrons-le pour une limite finie : soit $\varepsilon > 0$,
$u_{2n} \to \ell$, donc $\exists n_0$, tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0,\ |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
$u_{2n+1} \to \ell$, donc $\exists n_1$, tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_1,\ |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $\forall n \geqslant \max(2n_0, 2n_1 + 1)$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Donc $u_n \to \ell$.
La preuve est semblable pour une limite infini Le sens réciproque est un cas particulier des théorèmes précédents.

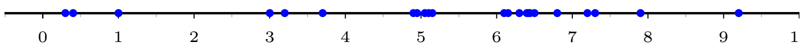
■

Théorème 3.8 *(Théorème de Bolzano-Weierstrass)*

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Preuve *(Par dichotomie – principe à connaître)*

L'idée est de chercher par dichotomie, un point d'accumulation des termes de la suite.
Si on représente les valeurs prises par la suite sur l'axe des réels, le théorème indique qu'il existe au moins un point a proximité duquel s'accumuleront une infinité de termes de la suite.



On coupe à chaque fois l'intervalle en deux en son milieu, puis on ne conserve qu'une seule des deux parties qui admet une infinité de termes de la suite (parfois les deux peuvent avoir une infinité de termes, auquel cas, on peut prendre la première par exemple).
Ainsi, les bords de l'intervalle vont former deux suites adjacentes qui convergent vers la même limite ℓ.
Si on prend intelligemment un terme de u dans chaque intervalle ainsi formé, on obtient donc une suite extraite qui converge vers ℓ.
Formellement : On définit les suite a_n et b_n par
$a_0 = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} (u_n)$ et $b_n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} (u_n)$ (les bornes existent dans $\mathbf{R}$ car la suite est bornée).
Puis, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Comme $[a_n,\ c_n] \cup [c_n b_n]$ admet une infinité de termes de la suite, alors, au moins l'un des deux intervalles en contient également une infinité (par contraposée).
Si $[a_n,\ c_n]$ contient une infinité de termes, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
Sinon, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
Ainsi $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ et $a_{n+1} \geqslant a_n$, $b_{n+1} \leqslant b_n$.
On construit donc par récurrence des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monotones de sens contraires et telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ces suites sont adjacentes donc elles convergent vers une limite ℓ commune.
Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, $E_n = \{p \in \mathbf{N},\ a_n \leqslant u_p \leqslant b_n\}$ est infini par construction. On construit donc la fonction d'extraction φ par
$\varphi(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n+1) = \min E_{n+1} \cap \{p \geqslant \varphi(n) + 1\}$.
(L'intersection des deux ensemble est lui-même infini, car $E_n \cap \{p \leqslant \varphi(n)\}$ est fini : il contient au plus $\varphi(n)$ éléments).
Ainsi, la fonction $\varphi\ : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n,\ b_n]$.
Donc par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

■

Exemple

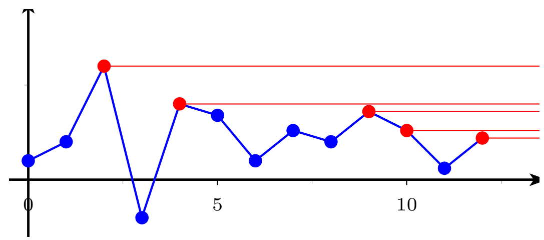
Montrer que si u admet une suite-extraite convergente, alors elle en admet une infinité.
Solution :
Si on note $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ une suite extraite convergente.
Alors toute suite extraite de u_φ est encore convergente (vers la même limite que u_φ).
Montrons donc que pour une suite donnée, il existe une infinité de fonctions d'extraction.
Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on pose $\psi^i\ : n \mapsto n + i$.
ψ^i est bien une fonction d'extraction, et toutes les fonctions ψ^i donnent des suites extraites distinctes, ce qui permet d'achever la preuve en considérant $\left(u_{\varphi\circ\psi^i(n)}\right)$.

Exemple *(Autre preuve de Bolzano-Weierstrass)*

Il existe une autre preuve classique du théorème de Bolzano-Weiestrass qui permet même d'avoir un résultat plus fort.
La preuve au programme est celle par dichotomie, mais celle-ci constitue un bel exercice et le résultat en vaut la peine.

Lemme : De toute suite, on peut extraire une sous-suite montone.

Une fois ce lemme démontré (pas spécifique aux suites bornées), le théorème de Bolzano-Weierstrass s'obtient directement grâce au théorème de la limite monotone.
Reste donc à prouver le lemme :
Idée géométrique : On imagine que le soleil se trouve à l'infini et on considère le relief dessiné par la suite.
On cherche les sommets depuis lesquels on peut observer le lever du soleil, c'est-à-dire les points qui sont plus haut que tous les suivants.
Si ce nombre de sommets est infini, alors on peut, en sautant de sommet en sommet, aller vers $+\infty$ en descendant.



Sinon, au delà du dernier sommet, pour chaque nouveau « sommet », il en existe un plus haut au delà pour cacher la vue. On avance alors entre les nouveaux sommets de façon croissante désormais.

Formaliser cette idée.

Solution :

On considère

$$A = \{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } \forall p \geqslant n,\, u_n > u_p\}\,.$$

1. *1er cas :* A est infini.
   A est une partie non vide de $\mathbf{N}$, elle admet donc un plus petit élément n_0. On pose $\varphi(0) = n_0$.
   $A \setminus \{n_0\}$ est également infini et on peut donc prendre son plus petit élément $n_1 > n_0$, de telle sorte que $u_{n_1} < u_{n_0}$.
   Par récurrence, on construit ainsi une suite extraite décroissante.
   2ème cas : A est fini.
   Il admet donc un plus grand élément m. On pose $\varphi(0) = n_0 = m + 1$
   Par définition de A, il existe $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_0} < u_{n_1}$.
   De plus $n_1 \notin A$ par construction de n_0.
   On construit ainsi par récurrence une suite extraite croissante.

Exemple

En admettant le résultat de l'exemple précédent, montrer qu'une suite (u_n) de limite $+\infty$ admet une suite extraite croissante.

Solution :

Par l'absurde, si aucune suite extraite n'était croissante, alors il en existerait une décroissante. Cette suite ne peut donc tendre vers $+\infty$, ce qui est absurde, car toutes les suites extraites doivent avoir la même limite que u.

4 Propriétés séquentielles

Certaines propriétés sur des parties de $\mathbf{R}$ peuvent être traduites avec les suites. Ces propriétés donnent une construction *concrète* de la propriété.

Propriété 4.1 *(Partie majorée et borne sup)*

Si une partie X non vide de $\mathbf{R}$ est majorée, alors il existe une suite d'éléments de X qui converge vers $\sup X$.

Preuve

On remarque que X est une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$, donc elle admet bien une borne supérieur que l'on notera S.
Alors par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$, $S - \varepsilon \leqslant x \leqslant S$.
On discrétise ε : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists x_n \in X$, $S - \frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant S$.
On obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in X^{\mathbf{N}^*}$ qui converge vers S. ■

Propriété 4.2 *(Partie non majorée)*

Si une partie X non vide de $\mathbf{R}$ est non majorée, alors il existe une suite d'éléments de X qui tend vers $+\infty$.

Preuve

En exercice. ■

On a de même avec les parties minorées ou non minorées de $\mathbf{R}$.

Propriété 4.3 *(Caractérisation séquentielle de la densité)*

Une partie X de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si, et seulement si tout réel $x \in \mathbf{R}$ peut s'écrire comme limite d'une suite d'éléments de X.

Preuve

(sens direct) Si X est dense dans $\mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap X \neq \emptyset$.
Donc en discrétisant ε, on trouve que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\, \exists x_n \in X,\, x_n \in \left]x - \frac{1}{n},\, x + \frac{1}{n}\right[.$$

Ce qui construit une suite $(x_n) \in X^{\mathbf{N}^*}$ qui converge vers x.
(sens réciproque) Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbf{R}$.
On note $x = \frac{a+b}{2} \in]a, b[$ et on considère une suite de $X^{\mathbf{N}}$ qui converge vers x.
Alors pour $\varepsilon = \frac{b-a}{4}$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $x_n \in \left[x - \frac{b-a}{4},\, x + \frac{b-a}{4}\right]$.
Or, $x - \frac{b-a}{4} = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{4} = \frac{b+3a}{4} > a$ et de même, $x + \frac{b-a}{4} < b$.
Donc $x_n \in]a, b[$.
Ainsi, on a montré que tout intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbf{R}$ rencontre X, donc X est dense dans $\mathbf{R}$. ■

Corollaire 4.4

Tout nombre réel peut s'écrire comme limite d'une suite de rationnels.
Tout nombre réel peut s'écrire comme limite d'une suite d'irrationnels.

Ces propriétés, jointes à la continuité, seront très utiles pour étudier des fonctions. L'étude de la fonction sur $\mathbf{Q}$ suffira, à l'aide de la continuité, à obtenir la fonction sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Définition 4.5 *(Nombre décimal)*

Un **nombre décimal** est un nombre rationnel que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Explications

Les nombres décimaux sont les nombres qui admettent un nombre fini de décimales après la virgule.
Ainsi, en les multipliant par une puissance de 10 suffisamment grande, on obtient un nombre entier p.

Exemple

$\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Théorème 4.6 *(Densité des décimaux dans $\mathbf{R}$)*

L'ensemble $\mathbf{D}$ des décimaux est dense dans $\mathbf{R}$.

Preuve

Soit $x \in \mathbf{R}$, Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $x_n = \frac{1}{10^n} \lfloor 10^n x \rfloor$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans $\mathbf{D}$. Montrons qu'elle converge vers x.
Par définition de la partie entière $10^n x - 1 \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$, donc $x - \frac{1}{10^n} \leqslant x_n \leqslant x$.
Par encadrement, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
D'après la caractérisation séquentielle, $\mathbf{D}$ est dense dans $\mathbf{R}$. ■

5 Composition avec une application

Théorème 5.1 *(Convergence et limites de fonctions)*

Si f est une fonction qui admet une limite en $a \in \overline{\mathbf{R}}$, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Corollaire 5.2 *(Convergence et continuité)*

Si f est une fonction **continue** en a, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(a).$$

⚠ Dans les démonstrations, il ne faut pas oublier d'écrire que f est continue pour utiliser ce théorème.

Preuve

Admis car ces théorèmes sont liés aux définitions des limites de fonctions et de la continuité qui sont vues dans le chapitre correspondant (et dans lequel ils sont démontrés). ■

⚠ Ce n'est pas parce que la fonction n'est pas continue en a ou n'admet pas de limite en a que la suite n'en aurait pas non plus.

Exemple

Trouver une suite u qui diverge vers $+\infty$, et une fonction f qui n'admet pas de limite en $+\infty$, mais telles que $f(u_n)$ admette une limite en $+\infty$.

Solution :

On prend par exemple $f : x \mapsto \sin x$ qui n'admet pas de limite en $+\infty$.
Si on pose $u_n = n\pi$, alors $u_n \to +\infty$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sin(u_n) = 0 \to 0$.
Donc $(\sin(u_n))$ converge.

Exemple

Avec les mêmes hypothèses qu'à l'exemple précédent, trouver u et f telles que $f(u_n)$ n'admette pas de limite en $+\infty$.

Solution :

Avec la même fonction f, si on pose $u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, alors $u_n \to +\infty$.
$\forall n \in \mathbf{N}$, $\sin(u_{2n}) = 1 \to 1$ et $\sin(u_{2n+1}) = -1 \to -1$.
Donc les deux suites extraites convergent vers des limites différentes.
Donc $(\sin(u_n))$ diverge.

Exemple

Donner la limite de la suite (u_n) définie par $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \ln\left(\dfrac{n\sqrt{n}-1}{n^2+1}\right)$.

Solution :

Pour tout $n \geqslant 2$, $n^2+1 \neq 0$ et $\dfrac{n\sqrt{n}-1}{n^2+1} > 0$, donc la suite est bien définie.

Or,$n \neq 0$, donc $\dfrac{n\sqrt{n}-1}{n^2+1} = \dfrac{n\sqrt{n}}{n^2}\dfrac{1-\frac{1}{n\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n^2}}$.

$\dfrac{1-\frac{1}{n\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1$ par quotient, et $\dfrac{n\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0^+$, donc $\dfrac{n\sqrt{n}-1}{n^2+1} \to 0^+$ par produit.
Or $x \mapsto \ln x$ tend vers $-\infty$ en 0^+, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

6 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Les méthodes présentées ci-dessous ne font pas explicitement parties du programme, mais il serait dommageable de ne pas, au moins, les comprendre.
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et A un intervalle ou une réunion d'intervalles.
$f : A \to \mathbf{R}$ est une application.

A Définition

Pour pouvoir calculer $f(u_n)$, il faut s'assurer que u_n reste dans le domaine de définition de f pour tout $n \in \mathbf{N}$. Voire même, que u_n reste dans un domaine sur lequel f possèderait des propriétés qui rendent l'étude plus simple.
C'est l'objet de la définition suivante : trouver un domaine stable par la fonction. Intuitivement, si un point est dans ce domaine, on peut lui appliquer f autant de fois que l'on veut, l'image reste dans ce domaine. Ainsi, on peut restreindre f à ce domaine, appelé A ici.

Définition 6.1

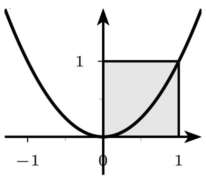
On dit que la partie $A \subset \mathbf{R}$ est **stable** par f, si $f(A) \subset A$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$. Montrer que $[0,1]$ est stable par f. $[-1,1]$ est-il également stable ?

Solution :

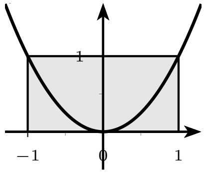
f est croissante sur $[0,1]$, donc $\forall x \in [0,1]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire $f(x) \in [0,1]$.
Donc $[0,1]$ est stable par f.
Visuellement, les images par f de $[0,1]$ sont également dans le segment $[0,1]$: la courbe reste dans le rectangle $[0,1] \times [0,1]$.



f est décroissante sur $[-1,0]$,
donc $\forall x \in [-1,0],\ f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(-1)$, c'est-à-dire $f(x) \in [0,1]$.
Ainsi, avec la question précédente,

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) \in [0,1] \subset [-1,1]$$

Donc $[-1,1]$ est stable par f.



Un point fixe est un point qui n'est pas modifié par f : son image est égale à lui-même. Une fois sur le point fixe, on « ne bouge plus ».
Géométriquement, un point fixe correspond à un point d'intersection entre la courbe de f et la courbe $y = x$.

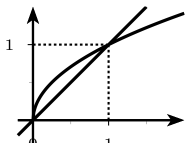
Définition 6.2

Un point $x_0 \in A$ est un **point fixe** de f si $f(x_0) = x_0$

Exemple

Chercher les points fixes de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution :
Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = x$,
on trouve $x = 1$ comme unique solution.
1 est le seul point fixe de f.



Propriété 6.3

Si A *stable* par f, alors les relations $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent une unique suite.
Dans ce cas, $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = f^n(u_0)$ où f^n désigne la composée $n^{\text{ième}}$ de f.

Preuve

Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in A$. Ainsi la suite est bien définie (et de façon unique). L'expression en fonction des composées s'obtient par la récurrence. ■

Exemple

Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

1. Montrer que $\forall u_0 > 0$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une unique suite.
2. Montrer que les valeurs interdites pour u_0 peuvent être décrites par les termes d'une suite récurrente (v_n) de premier terme $v_0 = -1$.

Solution :

1. On montre que $\mathbf{R}_+^*$ est stable par f. En effet, $\forall x > 0,\ x+1 > 0$, donc $f(x) > 0$.
Ainsi $f(\mathbf{R}_+^*) \subset \mathbf{R}_+^*$.
Or $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$, donc la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ et de façon unique.
2. La suite u n'est pas définie $\iff \exists n \in \mathbf{N},$ tel que $u_n = -1$
$\iff \exists n \in \mathbf{N},$ tel que $f^n(u_0) = -1$
Or, on remarque que f est bijective de $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbf{R}^*$.
En effet, $\forall x \neq -1,\ f(x) \neq 0$, et $\forall y \neq 0,\ f(x) = y \iff \frac{1}{x+1} = y$
$\iff x + 1 = \frac{1}{y}$ (car $y \neq 0$)
$\iff x = \frac{1}{y} - 1$
Donc f est bijective et pour tout $x \neq 0$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$.
Ainsi $\exists n \in \mathbf{N},$ tel que $f^n(u_0) = -1 \iff \exists n \in \mathbf{N},$ tel que $u_0 = \left(f^{-1}\right)^n(-1)$
Donc les valeurs interdites sont décrites par les termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$.

B Monotonie de la suite

Méthode

La monotonie de la suite u dépend de la position de la courbe de f par rapport à la bissectrice $y = x$.

1. Si la courbe de f est au dessus de la bissectrice $y = x$, alors la suite est croissante.
2. Si la courbe de f est en dessous de la bissectrice $y = x$, alors la suite est décroissante.

On essaie de trouver un intervalle **stable** sur lequel la courbe est toujours du même côté de la bissectrice : la suite est alors monotone.

Si la suite oscille entre deux intervalles : l'un où $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe, et l'un où $\mathscr{C}_f$ est en dessous, on peut étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et essayer de montrer qu'elles sont adjacentes par exemple.

Preuve

$u_{n+1} > u_n \iff f(u_n) > u_n$
Cela correspond à $f(x) > x$ pour $x = u_n$ ■

C Utilisation de la monotonie de f

Théorème 6.4

Soit f une fonction **croissante** sur une partie A de $\mathbf{R}$ stable par f.
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in A$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors (u_n) est monotone et

- (u_n) est croissante si $u_1 \geqslant u_0$,
- (u_n) est décroissante si $u_1 \leqslant u_0$,
- (u_n) est constante si $u_1 = u_0$.

Preuve
Par récurrence, une fonction croissante conserve le sens des inégalité :

$$u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} \geqslant u_{n+1}.$$

■

Théorème 6.5

Si f est **décroissante**, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.

Preuve
Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante.
Donc d'après le théorème 6.4, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
Supposons que (u_{2n}) soit croissante, alors $u_2 \geqslant u_0$, et par décroissance de f : $u_3 = f(u_2) \leqslant u_1 = f(u_0)$.
Donc (u_{2n+1}) est décroissante.
De même, si (u_{2n}) est décroissante, alors (u_{2n+1}) est croissante.
Et si l'une est constante, l'autre aussi. ■

⚠ f croissante n'implique **pas** que (u_n) soit croissante, mais qu'elle est monotone.
f décroissante n'implique **pas** que (u_n) soit décroissante.

⚠ Penser à vérifier que le domaine sur lequel f est monotone est **stable** par f.

Méthode

Lorsque f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) peuvent parfois se comporter comme des **suites adjacentes**.
(Mais elles peuvent aussi diverger pour $A = \mathbf{R}$ ou converger vers deux points distincts).

D Utilisation de la continuité de f

Théorème 6.6

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$, *continue* sur une partie $A \subset \mathbf{R}$ stable par f.
On définit une suite (u_n) par $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in A$, alors ℓ est un point fixe de f.

Preuve
Voir le corollaire 5.2.
L'idée est d'écrire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n) = f(\ell)$.
Par égalité des limites on en déduit : $f(\ell) = \ell$. ■

⚠ La réciproque est fausse : une fonction peut avoir un point fixe sans que la suite soit convergente.

Méthode *(Montrer que la suite diverge)*

Pour montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$ diverge, on peut

- Montrer que f n'admet pas de point fixe (ou pas de point fixe atteignable).
- Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas vers la même limite.

Exemple
Soit $u_0 \in \mathbf{R}$, et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2$.
Solution :
On pose $f : x \mapsto x^2$. Comme f est définie sur $\mathbf{R}$, la suite est définie de façon unique.
Si $u_0 \leqslant 0$, alors $u_1 \geqslant 0$, donc quitte à décaler la suite d'un rang, on peut supposer $u_0 \geqslant 0$.
Or $f(\mathbf{R}_+) \subset \mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}_+$ est stable par f), donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant 0$.

- si $u_0 \in [0, 1[$ alors par récurrence immédiate, on montre que la suite est décroissante (la courbe de f est en dessous de la bissectrice $y = x$),
  Et la suite est minorée par 0, donc elle converge.
  Comme f est continue, alors (u_n) converge vers un point fixe de f.
  Or 0 est le seul point fixe de f inférieur à u_0.
  Donc (u_n) converge vers 0.
- si $u_0 = 1$, alors la suite est constante égale à 1.
- si $u_0 > 0$, alors par par récurrence immédiate, (u_n) est croissante.
  si la suite converge, alors elle converge vers un point fixe de f.
  Or f n'admet par de point fixe supérieur à $u_0 > 1$.
  Donc (u_n) diverge et tend vers $+\infty$.

7 Extensions aux suites complexes

Définition 7.1

Une suite *réelle* est un élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
Une suite *complexe* est un élément de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

⚠ Les inégalités n'ont aucun sens dans $\mathbf{C}$, il faut toujours passer au module.
On ne parle pas de suite croissante ou décroissante dans $\mathbf{C}$.

Définition 7.2 *(Suite bornée)*

Une suite complexe (u_n) est bornée, si la suite de ses modules $(|u_n|)$ est bornée.

Propriété 7.3

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, on pose $x_n = \mathfrak{Re}\,(u_n)$ et $y_n = \mathfrak{Im}\,(u_n)$.
Alors (u_n) est bornée si et seulement si (x_n) et (y_n) le sont.

Preuve

Élémentaire, car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x_n| \leqslant |u_n|$ et de même pour (y_n). ■

Définition 7.4 *(Convergence)*

Une suite $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ converge vers un complexe L (ou admet L pour limite), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geqslant n_\varepsilon, \quad |u_n - L| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 7.5

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, on pose $x_n = \mathfrak{Re}\,(u_n)$ et $y_n = \mathfrak{Im}\,(u_n)$.
Alors (u_n) converge si et seulement si (x_n) et (y_n) convergent et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} x_n + i \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Preuve

Élémentaire.
Si on note $L = x + iy$ la limite, alors $x_n - x = \mathfrak{Re}\,(u_n - L)$, donc $|x_n - x| \leqslant |u_n - L|$, ce qui permet de conclure pour le sens direct par comparaison.
Pour le sens réciproque, $|u_n - L| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$ ce qui donne également le résultat par comparaison. ■

Corollaire 7.6

Toute suite complexe convergente est bornée.

Preuve

Comme sur $\mathbf{R}$ en remplaçant les valeurs absolues par les modules. ■

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple la suite (e^{in}) est bornée, mais ne converge pas.

Propriété 7.7

Les opérations sur les limites vues sur $\mathbf{R}$ restent valables sur $\mathbf{C}$ (les scalaires λ et μ peuvent être complexes).

Preuve

Soit on refait les preuves comme sur $\mathbf{R}$, soit on réalise les opérations sur les parties réelles et imaginaires pour obtenir le résultat sur $\mathbf{C}$. ■

Propriété 7.8

Si $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ qui converge vers $L \in \mathbf{C}$, alors

1. $(|u_n|)$ converge vers $|L|$,
2. $(\overline{u_n})$ converge vers $\overline{L}$.

Preuve

Si $u_n \to L$, alors $x_n \to x = \mathfrak{Re}\,(L)$ et $y_n \to y = \mathfrak{Im}\,(L)$.
Donc $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to \sqrt{x^2 + y^2} = L$ par continuité des fonctions en présence (on met chacune au carré, puis on somme et on passe à la racine ; on pourrait aussi le voir avec la continuité du module comme fonction définie sur $\mathbf{C}$, mais ce sera l'an prochain).
De même $x_n - iy_n \to x - iy$ par opération sur les limites. ■

Théorème 7.9 *(Théorème de Bolazano-Weiestrass)*

Toute suite complexe bornée admet une suite extraite convergente.

Preuve

L'idée est de reprendre le résultat sur $\mathbf{R}$, *mais de réaliser deux extractions successives en raison des deux suites (parties réelles et parties complexes).*
Soit $u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ une suite bornée.
On note x la suite de ses parties réelles, et y celle de ses parties imaginaires.
Les suites x et y sont donc également bornées.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbf{R}$, il existe donc une fonction d'extraction φ telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$.
Mais $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est encore bornée, donc il existe une extraction ψ telle que $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$.
$\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge également (suite extraite d'une suite convergente).
Donc $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{C}$.
(On remarque que $\varphi \circ \psi$ est une fonction strictement croissante – par composition – de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$). ■