Dénombrement

1, 2, 3, je sais compter,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
Avec mes mains.
Si je prends aussi mes doigts de pieds,
Je compterai jusqu'à 20
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

Le dénombrement est une partie délicate en mathématiques. Notre but ne sera pas d'étudier la science du dénombrement, mais simplement d'utiliser quelques uns de ses outils essentiellement en vue des probabilités, mais également en algèbre linéaire ou avec les ensembles finis.
Avertissement :
Ce chapitre contient beaucoup de preuves un peu formelles, mais le lecteur pas très à l'aise pourra les sauter en première lecture : l'objectif premier de ce chapitre est de savoir compter sur des exemples – plus ou moins – concrets. Le maniement des bijections est un raffinement pour les meilleurs (ou les « curieux »).

1 Cardinal d'un ensemble fini, réunion et produit

Définition 1.1 *(Cardinal d'un ensemble fini)*

Soit E un ensemble avec un nombre fini d'éléments.
On note $\text{Card}\,(E)$, $|E|$ ou $\#E$ le nombre de ses éléments.
On appelle ce nombre le **cardinal de** E.

Par convention $\text{Card}\,(\emptyset) = 0$.

Exemple

$\text{Card}\,[\![0,5]\!] = 6$, $\text{Card}\,[\![1,n]\!] = n$.

La définition précédente fait appel à l'intuition et manque donc de précision : Qu'est-ce qu'un ensemble fini ? Comment compter le nombre d'éléments ?
La définition qui suit permet de résoudre ces écueils par une approche plus formelle.

Définition 1.2 *(Définition formelle du cardinal avec les bijections)*

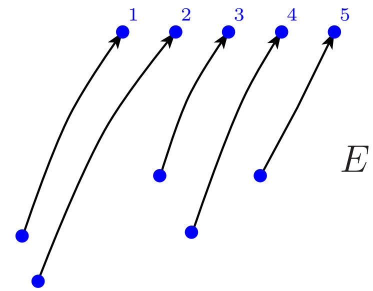
Soit un ensemble non vide E et $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{Card}\, E = n \text{ si et seulement s'il existe une bijection entre } E \text{ et } [\![1,n]\!].$$

Par convention $\text{Card}\,(\emptyset) = 0$.
Les ensembles finis sont exactement ceux qui ont un cardinal dans $\mathbf{N}$.

Explications

Établir une bijection entre E et $[\![1,n]\!]$, c'est donner un numéro distinct à chaque élément de E. C'est donc compter les éléments de E.
Quand on compte sur les doigts d'une main, on réalise une bijection entre les doigts et $[\![1,5]\!]$. Par exemple, on associe 1 au pouce, 2 à l'index, 3 au majeur, 4 à l'annulaire et 5 à l'auriculaire[1].
On exige que l'application soit une bijection pour bien compter chaque élément une et une seule fois.



Interprétation du cardinal par une bijection.

Reste un problème à résoudre : le cardinal est-il unique ? Deux personnes face au même ensemble compteront-elles nécessairement le même nombre d'éléments ? La réponse est heureusement oui.
Pour le montrer l'unicité, on commence le raisonnement sur les entiers naturels, puis, par bijection, on l'étend à tout ensemble fini. Cette démarche en deux étapes sera couramment utilisée.

1. Pour ceux qui avaient oublié la dénomination exacte des doigts, considérez cette énumération comme une révision gracieusement offerte par la maison.

Lemme 1.3

Soient n, p deux entiers naturels non nuls.

- S'il existe une injection de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p\rrbracket$, alors $n \leqslant p$.
- S'il existe une bijection de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p\rrbracket$;, alors $n = p$.

Preuve

Admis

Pour les curieux
Commençons par montrer que s'il existe une *injection* de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p\rrbracket$, alors $n \leqslant p$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Initialisation : si $n = 1$, alors nécessairement $p \geqslant 1 = n$ car il n'existe pas d'application d'un ensemble non vide, vers un ensemble vide.
Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque fixé. On suppose que le résultat est vrai à ce rang.
Soit $p \in \mathbf{N}$, et on suppose qu'il existe une injection f de $\llbracket 1, n+1\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p\rrbracket$.
on note $k = f(n+1) \in \llbracket 1, p\rrbracket$.

- si $k = p$, alors $f_{|\llbracket 1,n\rrbracket}^{|\llbracket 1,p-1\rrbracket}$ est une injection de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p-1\rrbracket$.
Par hypothèse de récurrence, on a donc $n \leqslant p-1$, donc $n+1 \leqslant p$.
- si $k \neq p$, on construit l'application

$$g : \begin{cases} \llbracket 1, n\rrbracket & \to \llbracket 1, p-1\rrbracket \\ i & \mapsto \begin{cases} f(i) & \text{si } f(i) \neq p \\ k & \text{si } f(i) = p \end{cases} \end{cases}.$$

Cette application est bien à valeurs dans $\llbracket 1, p-1\rrbracket$ par construction.
Elle est clairement injective (élémentaire).
Donc g est une injection de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p-1\rrbracket$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $n \leqslant p-1$, donc $n+1 \leqslant p$.

Ainsi, l'hérédité est vérifiée.
Donc $\forall (n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, s'il existe une injection de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p\rrbracket$, alors $n \leqslant p$.

preuve pour la bijection : Si $\llbracket 1, n\rrbracket$ et $\llbracket 1, p\rrbracket$ sont en bijection, alors, si on note f une bijection de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p\rrbracket$, on a $n \leqslant p$ d'après ce qu'on vient de démontrer.
Et f^{-1} est une bijection de $\llbracket 1, p\rrbracket$ dans $\llbracket 1, n\rrbracket$, ainsi on a également $p \leqslant n$.
Donc $p = n$.
Le sens réciproque est trivial. ■

On peut généraliser cette notion à des ensembles finis non vides quelconques :

Théorème 1.4

Deux ensembles finis non vides E et F sont en bijection si et seulement s'ils ont même cardinal.

Preuve

Idée de la preuve : on établit des bijections entre E et $\llbracket 1; n\rrbracket$ et entre F et $\llbracket 1; p\rrbracket$ et on utilise le fait que la composée de deux bijections et une bijection.

$$\begin{tikzcd} \llbracket 1, n\rrbracket \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi_1"'] & \llbracket 1, p\rrbracket \arrow[d, shift right, "\varphi_2"'] \\ E \arrow[u, shift right, "\varphi_1^{-1}"'] \arrow[r, "\psi"'] & F \arrow[u, shift right, "\varphi_2^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

φ_1 et φ_2 sont deux bijections : $\mathrm{Card}(E) = n$ et $\mathrm{Card}(F) = p$.
(sens direct) Si E et F sont en bijection, on pose $\psi : E \to F$ une bijection.
Si on note $f = \varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1$, alors c'est une bijection de $\llbracket 1, n\rrbracket$ dans $\llbracket 1, p\rrbracket$.
Donc $n = p$ et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
(sens réciproque) Si $n = p$, alors dans le schéma, on peut choisir $f = \mathrm{Id}$ (la fonction identité). Si on pose $\psi = \varphi_2 \circ \mathrm{Id} \circ \varphi_1^{-1}$, alors c'est une bijection entre E et F. ■

Lemme 1.5

Soit n un entier naturel non nul.
Toute partie de $\llbracket 1, n\rrbracket$ est finie et de cardinal inférieur ou égal à n.

Preuve

Admis.

Pour les curieux
Soit E, une partie de $\llbracket 1,\ n\rrbracket$.
Tout simplement, on pose $\varphi\ : E \to \llbracket 1,\ n\rrbracket$, la restriction de l'identité de $\llbracket 1,\ n\rrbracket$ à E.

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = x.$$

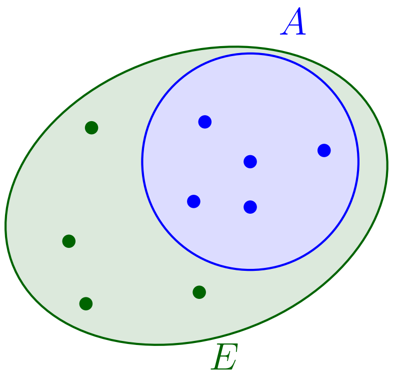
φ est donc une injection de E dans $\llbracket 1,\ n\rrbracket$, donc E est de cardinal inférieur ou égal n.
Pour cela, on a utilisé le lemme 1.3, et si besoin, comme E n'est pas nécessairement sous la forme $\llbracket 1,\ p\rrbracket$, on le met en bijection avec un tel ensemble : je ne détaille pas et laisse ce détail en exercice. ■

Propriété 1.6 *(Cardinal d'une partie)*

Soit E un ensemble fini, et $A \subset E$,

$$A \text{ est un ensemble fini et } \mathrm{Card}\, A \leqslant \mathrm{Card}\, E.$$

avec cas d'égalité si et seulement si $A = E$.



Dénombrement : inclusion d'un ensemble dans un autre.

Explications

Cette propriété est très utile pour remplacer le raisonnement par double inclusion. En effet, il suffit de montrer une seule inclusion et l'égalité des cardinaux (finis) pour avoir l'égalité des ensembles.

Preuve

Si $E = \emptyset$, le résultat est clair.
Sinon, $\operatorname{Card} E = n \geqslant 1$ et il existe une bijection $\varphi : E \to [\![1; n]\!]$.
$\varphi(A)$ est donc un sous-ensemble de $[\![1; n]\!]$ (par croissance de l'image directe).
Donc $\varphi(A)$ est fini et $\operatorname{Card} \varphi(A) \leqslant n$ (lemme).
Or $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(\varphi(A))$ car φ est une bijection, donc

$$\operatorname{Card}(A) \leqslant n.$$

On pouvait aussi refaire une preuve en construisant une injection, sans se ramener au cas $[\![1,\ n]\!]$.

cas d'égalité :
(sens réciproque) évident.
(sens direct) $\varphi(A) = [\![1; n]\!]$, donc $\varphi(A) = \varphi(E)$, or φ bijective, donc $A = E$. ■

Définition 1.7 *(Union disjointe)*

Soient A, B deux ensembles,

on dit que $A \cup B$ est une union **disjointe** si $A \cap B = \emptyset$.

Explications

Il n'y a aucun élément commun à A et à B. Ainsi, lorsque l'on fait l'union, on n'a pas de doublons.

Lemme 1.8 *(Cardinal de l'union disjointe)*

Si A et B sont des ensembles finis d'union disjointe,
alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B.$$

Explications

Si on réunit deux ensembles qui n'ont aucun élément en commun, alors le nombre total d'éléments de l'union sera égal au nombre d'éléments de A « plus » le nombre d'éléments de B.

Preuve

Preuve intuitive :
Si A possède p éléments et B possède q éléments, alors on compte de 1 à p les éléments de A, puis de $p+1$ à $p+q$ les éléments de B : au lieu de revenir à 0 pour compter les éléments de B, on les compte à la suite de ceux de A.
Rédaction formelle :
1er cas : Si $A = \emptyset$ ou si $B = \emptyset$ le résultat est trivial.
2ème cas : Par définition du cardinal, il existe une bijection $\varphi_1 : A \to [\![1; p]\!]$ et une bijection $\varphi_2 : B \to [\![1; q]\!]$.
On définit une nouvelle application

$$\psi : \begin{cases} A \cup B & \to [\![1, p+q]\!] \\ x & \mapsto \left| \begin{array}{ll} \varphi_1(x) & \text{si } x \in A \\ \varphi_2(x) + p & \text{si } x \in B \end{array} \right. \end{cases}$$

Cette application ψ est clairement injective (on montre que si $x \neq x'$, alors $\psi(x) \neq \psi(x')$: la vérification est à faire en exercice – par disjonction des cas).
De même, elle est surjective. En effet,

- si $y \in [\![1, p]\!]$, alors $\varphi_1^{-1}(y) \in A \subset A \cup B$ est un antécédent de y par ψ.
- si $y \in [\![p+1, q]\!]$, alors $\varphi_2^{-1}(y-p) \in B \subset A \cup B$ est un antécédent de y par ψ.

Donc ψ est bijective, ainsi $\operatorname{Card}(A \cup B) = p + q = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$. ■

Explications

Idée de la preuve :
On dispose d'une urne A avec p boules rouges numérotées de 1 à p et une urne B avec q boules bleues numérotées de 1 à q.
On mélange les deux urnes : le but du lemme est de compter le nombre total de boules : la réunion de A et B.
Le numéro sur la boule rouge issue de l'urne A s'appelle φ_1 : c'est lui qui permet de désigner chaque boule rouge de façon unique. Ainsi, φ_1 permet de compter les boules de A.
De même, chaque boule bleue issue de l'urne B possède un numéro appelé φ_2. Il permet de compter les q boules bleues de B.
Lorsque les deux urnes ont été mélangées, pour compter le nombre total de boules, on commence par lire les numéros sur les boules rouges. De cette façon, on compte toutes les boules rouges de 1 à p avec φ_1.
Pour continuer à compter, il ne faut pas repartir de 1, mais continuer avec $p+1$, $p+2$... pour obtenir le nombre total de boules à la fin.
Ainsi, lorsque l'on prend la boule bleue avec le numéro 1, à la place, on lui donne le numéro $p+1$. De même, la boule bleue avec le numéro 2 correspond à la $(p+2)$-ième boule...
On a simplement remplacé φ_2 par $\varphi_2 + p$, pour éviter d'avoir plusieurs fois le même

numéro dans la même urne (par exemple deux fois le numéros 1 : une fois avec la boule rouge et une fois avec la boule bleue, ce qui ne permettrait pas de compter). Lorsque l'on arrive à la dernière boule bleue, elle porte donc le nouveau numéro $p+q$: on a compté $p+q$ numéros au total !

Exemple

On fusionne deux carnets d'adresse enregistrés sous format informatique.
On suppose que le premier carnet d'adresse contient n adresses et que le second en contient p.
S'ils n'ont aucune adresse en commun, alors le fichier fusionné contiendra $n+p$ adresses.
Par contre, s'il y a des adresses en commun, il ne faudra les compter qu'une seule fois chacune. Ce sera l'objet de la formule du crible simplifiée(théorème 1.10).

Mais avant d'énoncer cette formule, il faut apprendre à enlever les éléments en trop, c'est-à-dire les éléments du complémentaire : les refusés.

Propriété 1.9 *(Cardinal du complémentaire)*

Si E est un ensemble fini et $A \subset E$, alors

$$\text{Card}\,\overline{A} = \text{Card}\,E - \text{Card}\,A.$$

Où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E, c'est-à-dire $E \setminus A$.

Explications

Les éléments dans $\overline{A}$ sont tous les éléments de E sauf ceux de A.

Preuve

$E = \overline{A} \cup A$ et l'union est disjointe donc $\text{Card}\,E = \text{Card}\,(\overline{A}) + \text{Card}\,A$. ■

Théorème 1.10 *(Formule du crible)*

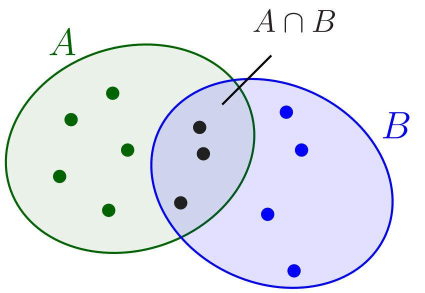
Si A et B sont des ensembles finis,
alors $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B)\,.$$

Remarque : Il existe une formule du crible (la vraie) pour une union avec plus de deux ensembles, mais elle est plus compliquée et n'est pas au programme.

Explications

Contrairement à l'union disjointe, il y a ici des éléments en commun entre les deux ensembles que l'on réunit : il y a des doublons.
Il ne faut donc compter ces éléments qu'une seule fois dans l'union.
Lorsqu'on fait le calcul $\text{Card}\,A + \text{Card}\,B$, on compte chacun de ces doublons deux fois et il faut donc les retrancher une fois pour avoir le bon dénombrement :



$$\text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,(A \cap B)$$

avec $\text{Card}\,(A \cap B)$ qui désigne le nombre de doublons.

Preuve

$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ et l'union est disjointe, donc $\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,A + \text{Card}\,(B \setminus A)\,.$
Or $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ et l'union est disjointe,
donc $\text{Card}\,B = \text{Card}\,(B \setminus A) + \text{Card}\,(A \cap B)$.
Ainsi, en remplaçant $\text{Card}\,(B \setminus A)$ dans la première expression par $\text{Card}\,B - \text{Card}\,A \cap B$, on trouve

$$\text{Card}\,A \cup B = \text{Card}\,A + \text{Card}\,B - \text{Card}\,A \cap B.$$

■

Propriété 1.11 *(Cardinal d'un produit cartésien)*

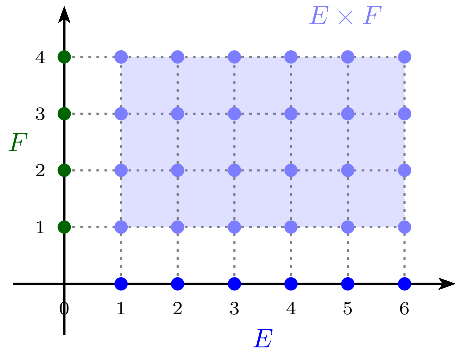
Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}\,(E \times F) = \text{Card}\,E \times \text{Card}\,F.$$

Explications

On peut interpréter le cardinal du produit cartésien comme celui d'une surface :
si on place les éléments de E sur un axe et ceux de F sur un autre,
alors le cardinal du produit cartésien correspond à la surface délimitée par E et F.

La formule est « longueur × largeur ».



Cela se généralise au produit cartésien d'un plus grand nombre d'ensembles : par exemple, un produit cartésien de 3 ensembles sera le volume :

$$\text{Card}\,(E \times F \times G) = \text{Card}\,E \times \text{Card}\,F \times \text{Card}\,G.$$

Preuve

On note $\text{Card}\,E = n$, un entier quelconque et on fait une récurrence sur le cardinal

de F.
Initialisation :
Si $\text{Card}\, F = 0$, alors $E \times F$ est vide et son cardinal est nul. La propriété est donc bien initialisée.
Hérédité :
On suppose le résultat vrai pour $\text{Card}\, F = p$ avec p un entier naturel fixé, et on cherche à montrer la propriété pour un ensemble F' de cardinal $p+1$.
F' peut donc s'écrire $\{x_1, x_2, \cdots, x_p, x_{p+1}\} = F \cup \{x_{p+1}\}$ si on note $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ de cardinal p.
Les éléments de $E \times F'$ sont les couples (a_i, x_j) pour $a_i \in E$ et $x_j \in F'$ (c'est-à-dire $j \in [\![1, p+1]\!]$).
Donc

$$\begin{aligned} E \times F &= \{(a_i, x_j),\ a_i \in E, j \in [\![1, p+1]\!]\} \\ &= \{(a_i, x_j),\ a_i \in E, j \in [\![1, p]\!]\} \cup \{(a_i, x_{p+1}), a \in E\} \qquad \text{(l'union est disjointe)} \end{aligned}$$

Ainsi $E \times F' = \Big(E \times F\Big) \cup \Big(E \times \{x_{p+1}\}\Big)$ et

$$\begin{aligned} \text{Card}\ (E \times F') &= \text{Card}\ \Big(E \times F\Big) + \text{Card}\ \Big(E \times \{x_{p+1}\}\Big) && \text{(union disjointe)} \\ &= np + \text{Card}\ \Big(E \times \{x_{p+1}\}\Big) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Or $E \times \{x_{p+1}\}$ est de cardinal n.
Pour le démontrer formellement, il n'est pas difficile de construire une bijection entre E et $E \times \{x_{p+1}\}$ en posant

$$\varphi : \begin{cases} E & \to E \times \{x_{p+1}\} \\ a_i & \mapsto (a_i, x_{p+1}) \end{cases}$$

Ainsi $\text{Card}\ (E \times F') = np + n = n(p+1) = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F'$.
L'hérédité est donc démontrée
Conclusion :
Par principe de récurrence, pour tous ensembles finis E et F,

$$\text{Card}\, E \times F = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F.$$

■

Exemple

Quel est le cardinal de $[\![1, 3]\!] \times [\![8, 14]\!]$?
Solution :
$3 \times (14 - 8 + 1) = 21$.

Corollaire 1.12

E est un ensemble fini, et $p \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{Card}\ (E^p) = (\text{Card}\, E\,)^p\,.$$

Explications

Un p-uplet s'écrit sous la forme $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in E^p$.
Pour x_1, on a n possibilités (autant que d'éléments dans E).
Pour chaque choix de x_1, on a n possibilités pour x_2, donc au total on a $n \times n = n^2$ possibilités pour (x_1, x_2).
Pour chaque possibilité de (x_1, x_2), on a encore n possibilités pour x_3, c'est-à-dire, au total n^3 possibilités pour (x_1, x_2, x_3).
Et ainsi de suite...
C'est le volume d'un hypercube en dimension p (de côté $n = \text{Card}\, E$).

Exemple

Vous avez un cadenas à code avec 3 molettes comportant chacune 10 positions de 0 à 9. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
Solution :
Un code est un triplet $(x_1, x_2, x_3) \in [\![0, 9]\!]^3$.
Il y a donc $10^3 = 1000$ possibilités (ici on peut les lire comme les nombres de 000 à 999 : la première molette représente les unités, la seconde les dizaines, et la troisième représente les centaines).

2 Combinatoire

A Listes

Définition 2.1 *(Rappel)*

Soit E un ensemble non vide.
On appelle **liste à p éléments de E** (*ou p-liste de E*), toute famille d'éléments de E indexée par $[\![1, p]\!]$:

$$(x_1, x_2, ..., x_p) \text{ tel que } \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \in E.$$

Propriété 2.2

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $p \in \mathbf{N}^*$,
le nombre de p-listes (ou p-uplets) de E est n^p.

Preuve

C'est une nouvelle formulation du corollaire 1.12 : les p-listes de E correspondent par définition au éléments de E^p. ■

B Arrangements

Définition 2.3

Soit E un ensemble fini non vide, et $p \in \mathbf{N}$,
on appelle p**-arrangement** de E, tout p-uplet d'éléments **distincts** de E.

Explications

Les p-arrangements sont les **p-listes sans répétition**. On s'interdit de prendre deux fois le même élément.

Exemple *(Tirage dans une urne)*

Soit une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n.
Si on tire *successivement* p boules (sans remise), alors il y a A_n^p tirages possibles (p-arrangement).
Par contre, si on tire *successivement* p boules avec remises, alors il y a n^p tirages possibles (p-liste).
⚠ Dans les deux cas, c'est comme au tiercé, l'ordre a de l'importance : si on tire deux fois les mêmes boules mais dans un ordre différent, alors cela donne deux tirages différents. Si on ne veut pas s'occuper de l'ordre de tirage, alors, il ne faut compter qu'une seule fois tous les tirages qui correspondent au même ensemble. C'est ce que nous allons faire plus loin avec les « parties ».

Théorème 2.4

Pour E un ensemble fini non vide de cardinal n, et $0 \leqslant p \leqslant n$, alors le nombre de p-arrangements de E est

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Remarque : Si $p > n$, il n'y a aucun p-arrangement (on ne peut pas tirer plus d'éléments qu'il n'y en a dans l'ensemble).
La notation traditionnelle A_n^p n'est plus guère utilisée.

Preuve

Intuitivement on voit que l'on a n possibilités pour le premier élément,
Pour chacun de ces n choix, il reste $n-1$ éléments dans l'urne, donc $n-1$ possibilités pour le choix du 2$^{\text{e}}$ élément.
Ainsi, pour le tirage des deux premiers éléments, on a $n(n-1)$ possibilités.
Pour le tirage du 3$^{\text{e}}$ élément, les deux premiers étant fixés, il reste $(n-2)$ possibilités.
Donc le nombre total de choix pour 3 éléments est $n(n-1)(n-2)$.
Et ainsi de suite...
Pour le p-ième élément, il reste $(n-p+1)$ possibilités.
Au total, il y a donc $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ possibilités pour le choix (ordonné) de p éléments sans répétition.
Pour les curieux :
Formellement : on rédige une récurrence sur p : « $\forall n \geqslant p$, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ ».
L'initialisation est immédiate pour $p=1$.
Pour l'hérédité, on suppose la propriété au rang $p \geqslant 1$.
Pour $n \geqslant p+1$, l'ensemble des $(p+1)$-arrangements de E est alors l'union disjointe pour $x_1 \in E$ des $(x_1, x_2, \cdots, x_{p+1})$ où $(x_2, \cdots, x_{p+1})$ est un p-arrangement de $E \setminus \{x_1\}$ (ensemble à $n-1$ éléments).
Ainsi

$$A_n^{p+1} = \sum_{x_1 \in E} A_{n-1}^p = n \times \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} = \frac{n!}{(n-(p+1))!}.$$

■

C Permutations

Définition 2.5

Soit E un ensemble fini non vide.
Une permutation est une liste de E qui contient exactement une fois chaque élément de E.
On note σ_n les permutations de $[\![1, n]\!]$.

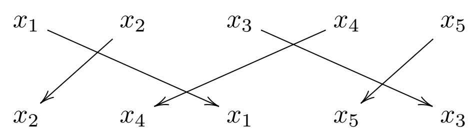
Remarque : Si $\operatorname{Card} E = n$, alors les permutations de E sont les n-arrangement sur E. C'est-à-dire les listes de tous les éléments de E sans répétition.

Explications

Faire une permutation sur un ensemble, c'est changer l'ordre de ses éléments.
En fait, les permutations sont simplement les bijections de E sur lui-même.

Explications

Lorsque l'on compte les éléments de E, on leur donne un ordre (à travers la bijection de $[\![1; n]\!]$ dans E).
Une permutation correspond simplement à « changer l'ordre » des éléments de l'ensemble par une bijection.



Théorème 2.6

Si E est un ensemble fini non vide de cardinal n, alors il y a $n!$ permutations de E.

$$\operatorname{Card} \sigma_n = n!$$

Preuve

Découle du nombre de p-uplets.
On peut aussi le voir comme : n possibilités pour le premier élément, $n-1$ pour le second... ■

Exemple

1. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?
2. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot ENSEMBLE ?

Solution :

1. $5! = 120$.
2. $\frac{8!}{3!}$. En effet, le mot possède 8 lettres, mais le E se retrouve trois fois. Si on numérotait les E, on aurait 8! possibilités (chaque E aurait un rôle distincts). Mais puisque les E sont identiques, tous les mots qui ont les E au même endroit, à l'ordre près, doivent n'être comptés que pour un seul. Or, il y a 3! façon de permuter les E, tout en conservant le même mot. Il faut donc diviser le nombre total d'anagrammes par 3!.

D Parties à p éléments

Définition 2.7 *(p-combinaisons)*

Pour E un ensemble fini non vide. Une **p-combinaison** de E est une partie de E à p éléments (distincts).

Théorème 2.8

Soit E un ensemble fini à n éléments, et $p \leqslant n$,
le nombre de parties de E à p éléments est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Se lit « p parmi n ».

Explications

Par définition, il n'y a pas d'ordre dans un ensemble et tous les éléments sont deux à deux distincts (revoir le cours sur les ensembles).
Ainsi, les $p-$combinaisons, à l'instar des p-arrangements sont constitués d'éléments deux à deux distincts. La différence est que les $p-$arrangements prennent en compte l'ordre, alors qu'il est indifférent pour les combinaisons.
On comprend donc que pour une p-combinaison possible, il existe autant de $p-$arrangements avec les mêmes éléments, qu'il y a de façon de les réordonner : $p!$ (le nombre de permutations de p éléments). Il y a donc $p!$ fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons. C'est ce qui donne la formule

$$p!\binom{n}{p} = A_n^p.$$

Preuve

Pour les curieux :
Le principe de comptage donné dans l'explication se formalise à travers le *lemme des bergers :* Pour compter le nombre de moutons dans un prés, le plus simple est évidemment de compter le nombre de pattes[2] et de diviser par 4. Cela se formalise ainsi :
Lemme des bergers : Si A est un ensemble non vide qui admet une partition $E_1, E_2, \cdots, E_n$ telle que tous les E_i aient exactement p éléments, alors A possède $p \times n$ éléments.
ou, formulé autrement :
Si f est une application surjective de A sur E telle que $\forall y \in E$, $\operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = p$, alors $p \times \operatorname{Card} E = \operatorname{Card} A$.
Les deux énoncés sont bien évidemment équivalents (en exercice), et la preuve s'écrit directement avec le cardinal pour la partition (union disjointe).
Preuve du théorème :
On note $S_p(E)$ l'ensemble des $p-$arrangements de E, $\operatorname{Card} \sigma_p(E) = \frac{n!}{(n-p)!}$.
On peut créer une relation d'équivalence sur $\sigma_p(E)$ en considérant que deux $p-$arrangements sont équivalents si, et seulement s'ils possèdent les mêmes éléments.
L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de $\sigma_p(E)$ et chaque classe d'équivalence possède exactement $p!$ arrangements.
Donc il y a exactement $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ classes d'équivalences.

Chaque classe d'équivalence correspond à une partie à p éléments parmi n donc $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. ■

Exemple

Une urne contient 8 boules numérotées. On tire successivement 3 boules et on note les numéros dans l'ordre (a, b, c).
Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
Si les trois boules étaient tirées simultanément, sans égard de l'ordre, combien y aurait-il eu de tirages possibles ?
Solution :
Avec ordre : $A_8^3 = \frac{8!}{5!}$ et sans ordre $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!}$.

Exemple

À la fin d'un dîner, les convives repartent chez eux. Avant de partir, ils se serrent l'un, l'autre la main (chacun part isolément de son côté). Combien y aura-t-il eu de poignées de main échangées, s'il y avait 16 convives ?
Solution :
$\binom{16}{2} = 105$.

Explications

Se souvenir : On considère le nombre de p-arrangements (ou p-listes sans répétition) lorsque l'ordre à une importance. Lorsque l'ordre n'a pas d'importance, on considère le nombre de parties à p éléments (c'est-à-dire qu'on ne divise pas $p!$)

2. Ceux qui ont une vague idée de ce qu'est un mouton doivent savoir qu'un mouton possède exactement 4 pattes, et que je n'ai jamais vu de moutons siamois dans un pré.

Valeurs à retenir :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

		Avec répétition	
		OUI	**NON**
Liste ordonnée	**OUI**	p-listes n^p	p-arrangements $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
	NON	(p-*suites*)	p-combinaisons $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$

E Triangle de Pascal, formule du binôme de Newton

L'objet de cette partie et de tenir la promesse faite en début d'année : donner une interprétation combinatoire aux formules avec les coefficients binomiaux.

Propriété 2.9 *(Symétrie)*

Soit $n \in \mathbf{N}$, et $0 \leqslant p \leqslant n$ alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Preuve

Nous avons déjà vu une preuve par le calcul.
On peut aussi comprendre que choisir p éléments parmi n, c'est la même chose que de décider ceux que l'on ne choisit pas : $n-p$.

■

Théorème 2.10 *(Formule du triangle de Pascal)*

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Preuve

On note les $n+1$ éléments de E : $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$. On mets à part l'élément x_{n+1}

Pour choisir $p+1$ éléments dans E, soit on prend l'élément x_{n+1} dans le choix, soit on ne le prend pas.

1. Si on prend l'élément x_{n+1}, alors on a $\binom{n}{p}$ choix pour les autres.
2. Si on ne le prend pas, alors on a $\binom{n}{p+1}$ choix possibles.

Ces deux solutions sont exclusives l'une de l'autre, le nombre total de solutions sera donc la somme des deux. D'où la formule voulue. ■

Théorème 2.11 *(Formule du binôme de Newton)*

Soient $n \in \mathbf{N}$, et a, b deux éléments qui commutent.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve

Les coefficients binomiaux correspondent au nombre de façon d'obtenir $a^k b^{n-k}$ en prenant un élément dans chaque parenthèse du produit. ■

Théorème 2.12

Si E est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et non vide et

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}.$$

Preuve

On note $n = \operatorname{Card} E$ et on suppose $n \geqslant 1$.
Les parties de E sont énumérées en fonction de leur nombre d'éléments.
Si on note P_k l'ensemble des parties de E à i éléments, alors pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\operatorname{Card} P_k = \binom{n}{k}.$$

Or $\mathcal{P}(E)$ est l'union disjointe de ces ensembles :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} P_k.$$

Alors d'après la formule du binôme de Newton

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Cela est également vrai si E est vide ; car on a alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$. ■

Méthode *(Somme ou produit ?)*

Il n'est pas toujours facile de savoir s'il faut additionner ou mutliplier les « sous-dénombrements » pour obtenir le nombre total de possibilité.
Voici de quoi vous aider :

- **Somme = disjonction des cas**
  C'est une union disjointe. Chaque « sous-dénombrement » correspond à des tirages complets.
  L'important, dans cette disjonction est de n'oublier aucun cas, et surtout de ne pas en compter en double (formule du crible).
- **Produit = décomposition du tirage**
  On décompose chaque tirage. Les « sous-dénombrement » correspondent chacun à une partie du tirage total.
  Par exemple, lorsque l'on tire plusieurs cartes par tirage, chaque facteur du produit correspond à une carte dans le tirage.

3 Propriétés des applications entre ensembles finis

Propriété 3.1

Soient E et F deux ensembles finis et $f\ : E \to F$.

1. Si f est injective alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
2. Si f est surjective alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
3. Si f est bijective alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Explications
Ce théorème est très intuitif.

1. Pour injecter E dans F, il faut qu'il y ait assez de place dans F pour contenir E tout entier. Ainsi F a plus d'éléments que E.
2. Pour créer une surjection de E sur F, il faut entièrement recouvrir F par E. Ceci exige évidemment que E ait plus d'éléments que F.
3. C'est ainsi qu'on a commencé le chapitre : on apparie les éléments deux à deux.

Preuve

1. C'est le premier résultat qui a été démontré dans ce cours pour montrer l'unicité du cardinal (preuve en petits caractères).
   Si on oublie cette preuve, on peut, pour toute injection $f\ : E \to F$, considérer la bijection $\widetilde{f} : E \to f(E)$.
   Alors $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(f(E))$, car $\widetilde{f}$ est une bijection, et $\operatorname{Card}(f(E)) \leqslant \operatorname{Card} F$ car $f(E) \subset F$.
2. Pour chaque $y \in F$, on choisit x_y un antécédent de y par f (n'importe lequel) et on définit $\varphi(y) = x_y$. φ est alors une injection de F dans E ce qui permet de conclure.
3. Cela a été démontré plus haut (ne pas dire que cela découle des deux précédentes, puisqu'on utilise cette propriété pour montrer les deux précédentes).

■

Exemple *(Lemme des tiroirs)*
Une commode contient n tiroirs et on veut y ranger p chaussettes.
Si $p \geqslant n$, alors un des tiroirs contient au moins deux chaussettes.
Cet énoncé avait déjà été vu dans un exercice de logique.
On peut interpréter ce résultat ainsi : il n'existe pas d'injection de l'ensemble des chaussettes dans l'ensemble des tiroirs si $p \geqslant n$.

Théorème 3.2

Soient E et F deux ensembles finis et $f\ : E \to F$. Si de plus, $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Preuve
1) $\Rightarrow$ 3) Si f injective, alors f bijective sur $f(E) \subset E$. Donc $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} F$. Et $f(E) = F$ si et seulement si les cardinaux sont égaux. C'est le cas ici. Donc f bijective.
2) $\Rightarrow$ 3) Si f est surjective, on réalise une injection de F dans E comme dans la preuve précédente.
Donc c'est une bijection et c'est l'application réciproque de f.
3) $\Rightarrow$ 1) et 3) $\Rightarrow$ 2) sont évidents. ■

4 Dénombrement des applications

Cette dernière partie est simplement une autre façon d'interpréter les uplets, arrangements... comme des applications particulières.
Par exemple, un $p-$uplet de E correspond au choix de p éléments de E (avec ordre et répétition). On peut donc définir un p-uplet comme une application de $[\![1,\, p]\!]$ dans E qui à chaque i associe l'élément x_i du uplet.
Chaque $p-$uplet correspond exactement à une application, et il y a donc autant d'applications de $[\![1,\, p]\!]$ dans E que de p-uplets.
C'est ce qui est dit dans le théorème suivant (on remplace simplement $[\![1,\, p]\!]$ par un ensemble à p éléments, mais cela revient au même).

Théorème 4.1

Si E et F sont des ensembles finis non vides, alors l'ensemble F^E des applications de E vers F est fini et

$$\operatorname{Card}\left(F^E\right) = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}.$$

Preuve

Si $\text{Card}\, E = n$, on note $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ses éléments.
On construit une bijection entre F^E et F^n par

$$\begin{array}{ccc} F^E & \to & F^n \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n)) . \end{array}$$

L'application est clairement bijective (puisqu'elle revient à énumérer toutes les images des points de E par φ), donc les ensembles ont le même cardinal.
Ainsi

$$\text{Card}\left(F^E\right) = (\text{Card}\, F)^{\text{Card}\, E} .$$

■

Dans cette preuve, on réinterprète un n-uplet comme une application de $[\![1; n]\!]$ dans E. Si vous reprenez votre cours sur la logique et les ensembles de début d'année, vous verrez que c'est déjà ce que nous avions fait. Vous découvrez ainsi à votre plus grande stupéfaction que votre cours est cohérent !

Exemple

Redémontrer la formule « $\text{Card}\, \mathcal{P}(E) = 2^n$ » en réalisant une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0; 1\}^E$.
On pourra s'aider de la fonction indicatrice.

Solution :

On définit l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \{0, 1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array} \right.$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A.
f est bijective car $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B \Rightarrow A = B$ (injectivité) et car toute application φ de $\{0, 1\}^E$ peut-être interprétée comme une fonction indicatrice de la partie $A = \{x \in E, \varphi(x) = 1\}$ (surjectivité).

Comme on vient de le voir pour les $p-$uplets, on peut réinterpréter les p-arrangements à l'aide d'applications.
La seule différence avec les $p-$uplets est que l'on interdit les répétitions. Ainsi, avec l'interprétation précédente, deux éléments différents ne peuvent avoir la même image : cela revient à imposer l'injectivité.
Les $p-$arrangements correspondent aux applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
Les bijections quant à elles reviennent simplement à changer l'ordre des éléments : ce sont les permutations.

Théorème 4.2 *(Dénombrement des injections, bijections)*

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, avec $\text{Card}\, E = p$ et $\text{Card}\, F = n$.

1. si $p \leqslant n$, alors le nombre d'injections de E dans F est égal au nombre de $p-$ arrangements de F : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
2. si $p = n$, alors le nombre de bijections de E dans F est égal au nombre de permutations de E : $n!$.

Remarque : le nombre de surjections est nettement plus difficile à trouver et n'est pas au programme.
Nous verrons en exercice, une interprétation des $p-$combinaisons sous forme d'applications.