Équations différentielles linéaires

Les équations différentielles sont très présentes dans tous les domaines scientifiques dès qu'il s'agit de *dynamique*. Ainsi, ces équations interviennent dans les mouvements en mécanique newtonienne, dans la cinétique chimique, les évolutions bactériologiques...
Il n'est pas toujours possible de trouver une solution exacte aux équations différentielles et les études qualitatives ainsi que les méthodes numériques jouent un rôle important.
Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'étudier les équations les plus simples : les équations différentielles linéaires.

Notations :
Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
I et J désignent des intervalles de $\mathbf{R}$ (non réduits à un point).

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Il faudra garder en mémoire que les équations différentielles linéaires se comportent (et se résolvent) de la même façon que les suites récurrentes linéaires.
Au lieu d'être des suites $\mathbf{N} \to \mathbf{K}$, ce sont des fonctions de $\mathbf{R} \to \mathbf{K}$ et on remplace les accroissements $u_{n+1} - u_n$ par les dérivées f'.
On retrouvera donc les mêmes structures de solutions et de nombreux points communs.

A Définition et structure des solutions

Définition 1.1

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, on considère l'équation :

$$(E_b) \ : \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où a et b sont deux applications **continues** sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$.
(E_b) est une **équation différentielle linéaire du premier ordre** à coefficients continus sur I.

$y \ : \ I \to \mathbf{K}$ est une **solution** de (E_b), si y est dérivable et vérifie la relation (E_b).

L'équation différentielle **homogène** associée à (E_b) est définie par :

$$(E_0) \ : \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

Dans la suite on notera $\mathscr{S}_c$, les solutions de (E_c) et $\mathscr{S}_0$ les solutions de (E_0).

Dans le cadre de ce cours, on ne s'intéresse qu'aux équations différentielles

- linéaires,
  Pas de y^2, de e^y... La notion de linéarité sera étudiée dans le chapitre sur les espaces vectoriels.
- à coefficients continus,
- définies sur des intervalles de $\mathbf{R}$,
- mises sous forme résolue (il n'y a pas de coefficient devant le y').

Remarques sur les notations :
On utilisera souvent t comme variable en référence au temps en physique, mais il est

tout à fait possible d'utiliser à la place la variable x, ou u...
De même, on omet parfois l'écriture de la variable avec y et le fait que y dépende de t est alors sous-entendu.

Théorème 1.2 *(Structure des solutions)*

$\mathscr{S}_0$ est non vide. Si g est une solution particulière de E_b, alors

$$\mathscr{S}_b = \mathscr{S}_0 \text{ “}+\text{” } g = \{f+g,\ f \in \mathscr{S}_0\}.$$

Preuve

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S}_b &\iff \forall t \in I,\ y'(t) + ay(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in I,\ y'(t) + ay(t) = g'(t) + ag(t) \\ &\iff \forall t \in I,\ (y-g)'(t) + a(y-g)(t) = 0 \\ &\iff y - g \in \mathscr{S}_0. \end{aligned}$$

■

Remarque : Nous verrons plus tard que $\mathscr{S}_0$ est un espace vectoriel (comme noyau d'une application linéaire).

La conclusion de ce théorème est qu'il suffit de connaître les solutions de l'équation homogène (sans second membre) et **une seule** solution particulière, pour avoir **toutes** les solutions de l'équation.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle, on procède donc en général de la façon suivante :

1. Recherche des solutions de l'équation homogène : $\mathscr{S}_0$.
2. Recherche d'une solution particulière : g.

Propriété 1.3 *(Principe de superposition)*

$$\text{Si } f_1 \in \mathscr{S}_{b_1} \text{ et } f_2 \in \mathscr{S}_{b_2}, \text{ alors } \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathscr{S}_{\lambda b_1 + \mu b_2}.$$

Preuve

$$\begin{aligned} f_1 \in \mathscr{S}_{b_1} \text{ et } f_2 \in \mathscr{S}_{b_2} &\iff f_1' + af_1 = b_1 \text{ et } f_2' + af_2 = b_2 \\ &\Rightarrow \lambda\left(f_1' + af_1\right) + \mu\left(f_2' + af_2\right) = \lambda b_1 + \mu b_2 \\ &\Rightarrow (\lambda f_1 + \mu f_2)' + a(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda b_1 + \mu b_2 \\ &\Rightarrow \lambda f_1 + \mu f_2 \in \mathscr{S}_{\lambda b_1 + \mu b_2}. \end{aligned}$$

■

B Solutions de l'équation homogène sur un intervalle

Théorème 1.4

Soit I un **intervalle,**

$$(E_0)\ :\qquad \forall t \in I,\quad y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

Les solutions de (E_0) sur I s'écrivent[1] :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}_{\mathbf{K}}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a(u)\,\mathrm{d}u}\right) = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a(u)\,\mathrm{d}u}\right\}_{\lambda \in \mathbf{K}}.$$

avec t_0 un point quelconque de I.
Autre formulation : Si $t \mapsto A(t)$ est une primitive de a sur I, alors les solutions de (E_0) sur I s'écrivent :

$$y\ : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}, \text{ avec } \lambda \in \mathbf{K}.$$

Remarque : Changer de point t_0 revient à prendre une constante λ différente.

Preuve

Par double inclusion :

- Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on pose $f : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$, ainsi
$$\forall x \in I,\ f'(x) = -A'(x)\lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = -a(x)f(x),$$
donc $f \in \mathscr{S}_0$. Donc $\left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)},\quad \lambda \in \mathbf{K}\right\} \subset \mathscr{S}_0$.
- *(méthode de la variation de la constante)*
Soit $f \in \mathscr{S}_0$, montrons que f est sous la forme $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$.
L'exponentielle ne s'annule pas, donc pour tout $x \in I$, on peut poser $\lambda(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-A(x)}}$.
c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}$.
$x \mapsto \lambda(x)$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annule pas).
$$\forall x \in I,\ f'(x) = \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} - a(x)\lambda(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} - a(x)f(x).$$
Or $f \in S_0$, donc $\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = 0$, c'est-à-dire que $\lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = 0$.
Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur I, alors $\forall x \in I,\ \lambda'(x) = 0$,
et I est un **intervalle**, donc λ est constante.
Donc $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}$, donc $\mathscr{S}_0 \subset \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)},\quad \lambda \in \mathbf{K}\right\}$.

Ainsi par double inclusion $\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)},\quad \lambda \in \mathbf{K}\right\}$. ■

Propriété 1.5 *(Cas particulier des équations à coefficients constants)*

Si a est une constante, alors les solutions de l'équation homogène sur un **intervalle** I s'écrivent sous la forme

$$t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-at} \qquad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbf{K}.$$

1. Les solutions forment un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension 1.

Exemple

Résoudre

1. $y' + 2y = 0$ sur $\mathbf{R}$.
2. $y'(t) + \dfrac{2}{t} y(t) = 0$ sur $\mathbf{R}_-^*$.

Solution :

1. $\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-2t},\ \lambda \in \mathbf{K} \right\}$.
2. Une primitive de $t \to \dfrac{2}{t}$ sur $\mathbf{R}_-^*$ est $t \mapsto 2\ln(|t|) = 2\ln(-t)$.

   Ainsi, on obtient les solutions sous la forme $f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-2\ln(-t)} = \dfrac{\lambda}{(-t)^2} = \dfrac{\lambda}{t^2}$.

   Donc $\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \dfrac{\lambda}{t^2},\ \lambda \in \mathbf{K} \right\}$.

Méthode *(Résolution à la physicienne)*

On écrit (sans s'occuper des problèmes de signe ou d'annulation[2], ni de la signification des différentielles) :

$$\begin{aligned}
y'(t) + a(t)y(t) = 0 &\iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -a(t)y \\
&\iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(t)\,\mathrm{d}t \\
&\iff \int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{(on somme les quantités infinitésimales)} \\
&\iff \ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = -\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \\
&\iff y(x) = y_0\, \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

On **évitera de rédiger ainsi** car cette rédaction n'est pas du tout rigoureuse. C'est à considérer comme un moyen mnémotechnique.

C Recherche de solutions particulières

Puisque nous avons les solutions de l'équation homogène sur I, il suffit de trouver *une* solution particulière pour avoir l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur I et utiliser le théorème de structure.
Voici plusieurs méthodes :

2. On peut montrer, a priori, que si la fonction n'est pas identiquement nulle, alors elle ne s'annulera pas et sera donc aussi de signe constant (continue), mais cela n'est pas trivial.

Méthode *(L'intuition)*

Si on montre que g est une solution en la remplaçant dans l'équation, cela suffit. On n'a pas besoin de justifier la méthode utilisée pour trouver g.

Remarque : La méthode « je regarde sur la copie du voisin » n'est pas considérée comme valable dans le cadre du programme et lors des concours. Néanmoins, elle est souvent acceptable, voire conseillée, en milieu professionnel, dès lors que le voisin est consentant.

Exemple

Résoudre sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle : $y' + t^2 y = 5t^2$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
   $t \mapsto \frac{t^3}{3}$ est une primitive de $t \mapsto t^2$.

   On en déduit les solutions de l'équation homogène : $t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$.
2. *Solution particulière.*
   Ici, on voit immédiatement que $t \mapsto 5$ est une solution particulière constante à l'équation avec second membre.
3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) + 5,\ \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Exemple *(À repérer...)*

Résoudre sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle : $3y' + 2y = 5$.
Solution :
Ces équations à coefficient et second membre constant doivent être résolues très rapidement

1. *Résolution de l'équation homogène.*
   Les coefficients sont constants, donc on obtient immédiatement : $t \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}$.
2. *Solution particulière.*
   Avec à la fois des coefficients et un second membre constant, on peut trouver une solution particulière constante : $y' = 0$, ce qui donne $t \mapsto \frac{5}{2}$.
3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \lambda \exp\left(-\frac{2}{3}t\right) + \frac{5}{2},\ \lambda \in \mathbf{K} \right\}.$$

Méthode *(Variation de la constante)*

$$(E_b)\ :\qquad \forall t \in \mathscr{D},\quad y'(t)+a(t)y(t)=b(t).$$

Sur un **intervalle** I inclus dans $\mathscr{D}$.

- On résout l'équation homogène sur I :
$$y_0 : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a(u)\,\mathrm{d}u} = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}.$$
- On fait **varier** λ, en remplaçant par une fonction dérivable $\lambda(t)$.
$$y_b : t \mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}.$$
- On dérive y_b et on remplace dans l'équation (E_b). On obtient :
$$\forall t \in I,\quad \lambda'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}.$$
- On cherche une primitive *quelconque* de λ' : $t \mapsto \lambda_P(t)$.
- On *reconstruit* y_b en multipliant par $\mathrm{e}^{-A(t)}$ pour avoir une solution particulière :
$$\forall t \in I,\quad y_b(t) = \lambda_P(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}.$$

⚠ Ne pas oublier de multiplier λ par l'exponentielle pour avoir la solution particulière.

Exemple

Sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on note $(E)\ :\ y' = -\tan(t)y + \dfrac{1}{\cos(t)}$.
Résoudre (E).
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$t \mapsto -\ln(|\cos(t)|)$ est une primitive de $t \mapsto \tan(t)$. On en déduit les solutions de l'équation homogène ($\lambda \in \mathbf{K}$) :
$t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\ln(|\cos(t)|)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ car sur I, $\cos(t) \geqslant 0$.
2. *Solution particulière.*
Si on n'a pas d'intuition, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante.
On pose donc $g\ : t \mapsto \lambda(t)\cos(t)$ avec λ une fonction dérivable sur I.
$\forall t \in I$, $g'(t) + \tan(t)g(t) = -\lambda(t)\sin(t) + \lambda'(t)\cos(t) + \tan(t)\,\lambda(t)\cos(t)$
$= \lambda'(t)\cos(t)$.
(On retrouve la forme donnée dans la méthode. Le fait que tous les $\lambda(t)$ « disparaissent » nous rassure quant à la validité de notre solution *homogène*.)
g est donc solution particulière si, et seulement si $\lambda'(t)\cos(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$,
c'est-à-dire $\lambda'(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$.
On choisit donc une primitive pour λ : $\lambda(t) = \tan(t)$.
Ainsi, $g(t) = \tan(t)\cos(t) = \sin(t)$.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S} = \{t \mapsto \lambda\cos(t) + \sin(t)\,,\ \lambda \in \mathbf{K}\}.$$

Méthode *(Polynôme-exponentielle)*

On suppose l'équation à **coefficient constant** : $a \in \mathbf{K}$
On suppose que le second membre s'écrit sous la forme $P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec $\gamma \in \mathbf{K}$ et P un polynôme de degré n.
$$(E)\quad y' + ay = P(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}.$$
Alors on peut chercher une solution particulière sous la forme :

- si $\gamma \neq -a$, $g : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec Q un polynôme de degré n,
- si $\gamma = -a$, $g : x \mapsto t\,Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$ avec Q un polynôme de degré n.

On montre aisément que dans le second cas : $\gamma = -a$, $tQ(t)$ est une primitive de $P(t)$.

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = \mathrm{e}^{2x}$.
Solution :
Remarque : Ici, l'énoncé travaille avec la variable x et non t. Il faut donc respecter ce choix.

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$
2. *Solution particulière.*
Ici, le coefficient est constant $-3 \in \mathbf{R}$, et le second membre s'écrit sous la forme « polynôme-exponentielle » avec un polynôme constant égal à 1.
On peut donc chercher une solution sous la forme : $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec P un polynôme de degré 0 que l'on peut donc simplement noter $a \in \mathbf{K}$.
On pose donc $g\ : x \mapsto a\,\mathrm{e}^{2x}$, alors $g'(x) = 2a\,\mathrm{e}^{2x}$ et on remplace dans l'équation différentielle : g est solution si, et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $2a\,\mathrm{e}^{2x} - 3a\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$.
On obtient alors, $a = -1$. Ainsi, $g\ : t \mapsto -\mathrm{e}^{2x}$ est solution.
3. *Solutions générales.*
$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = x\,\mathrm{e}^{2x}$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*
$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
On cherche une solution sous la forme : $x \mapsto P(x)\,e^{2x}$ avec P un polynôme de degré 1 que l'on peut donc simplement noter $ax+b$.
On pose donc $g\ : x \mapsto (ax+b)\,e^{2x}$,
alors $g'(x) = 2(ax+b)\,e^{2x} + a\,e^{2x} = (2ax+a+2b)\ e^{2x}$.
On remplace dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} g'(x) - 3g(x) = x\,e^{2x} &\iff (2ax+a+2b)\ e^{2x} - 3\,(ax+b)\ e^{2x} = x\,e^{2x} \\ &\iff -ax+a-b = x \end{aligned}$$

On travaille par identification sur les polynômes
et on trouve donc $a=-1$ et $b=a=-1$.
Ainsi, $g\ : t \mapsto -(1+x)\,e^{2x}$ est solution.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,e^{3x} - (1+x)\,e^{2x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = \ e^{3x}$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,e^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
Comme précédemment, on a un second membre « polynôme-exponentielle » pour une équation à coefficient constant.
Si on cherchait une solution sous la forme $g\ : x \mapsto a\,e^{3x}$, alors, g est une solution de l'équation homogène et ne peut donner notre second membre.
Cette situation apparaît quand $\gamma = -b$ (ici on a $3 = -(-3)$). Il faut alors multiplier $P(x)$ par x comme précisé dans le théorème.
On cherche donc une solution particulière sous la forme $g\ : x \mapsto ax\,e^{3x}$. Alors $g'(x) = a\,e^{3x} + 3ax\,e^{3x}$ et on remplace dans l'équation différentielle :

$$g'(x) - 3g(x) = a\,e^{3x} + 3ax\,e^{3x} - 3ax\,e^{3x} = a\,e^{3x}.$$

g est donc solution si, et seulement si $a=1$.
Ainsi, $g\ : x \mapsto x\,e^{3x}$ est solution particulière.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,e^{3x} + x\,e^{3x} = (x+\lambda)\ e^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

Méthode *(Théorème de superposition)*

Utiliser le théorème de superposition.

Exemple

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = 2\,e^{3x} + (4-x)\,e^{2x}$.
Solution :
On déjà résolu pour chaque partie du second membre

1. pour e^{3x} avec $g_1 : x \mapsto x\,e^{3x}$,
2. pour e^{2x} avec $g_2 : x \mapsto -\,e^{2x}$,
3. et pour $x\,e^{2x}$ avec $g_3 : x \mapsto (-1+x)\,e^{2x}$.

Il suffit donc d'utiliser le théorème de superposition pour avoir une solution particulière : $2g_1 + 4g_2 - g_3$.
$g\ : x \mapsto 2x\,e^{3x} - 4\,e^{2x} - (-1+x)\,e^{2x} = 2x\,e^{3x} - (3+x)\,e^{2x}$ est solution particulière.

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto (2x+\lambda)\ e^{3x} - (3+x)\,e^{2x},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Exemple *(Passage par les complexes)*

Résoudre $(E)\ :\ y' - 3y = \ e^{x}\sin(x)$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,e^{3x},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
Ici, on va travailler provisoirement avec les nombres complexes et utiliser le théorème de superposition.

$$(E)\ :\ y' - 3y = \ e^{x}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{x(1+i)} - e^{x(1-i)}\right).$$

(a) On commence par la première exponentielle.

$$(E_1)\ :\ y' - 3y = \ e^{x(1+i)}.$$

On cherche une solution sous la forme $f(x) = a\,e^{x(1+i)}$, avec $a \in \mathbf{K}$.
En mettant dans l'équation différentielle, on trouve alors

$$\begin{aligned} f'(x) - 3f(x) = \ e^{x(1+i)} &\iff (1+i)a\,e^{x(1+i)} - 3a\,e^{x(1+i)} = \ e^{x(1+i)} \\ &\iff (-2+i)a = 1 \\ &\iff a = \frac{1}{-2+i} = \frac{-2-i}{5}. \end{aligned}$$

On a donc $f_1 : x \mapsto -\frac{2+i}{5}\,e^{x(1+i)}$ qui est solution particulière.

(b) On peut faire de même avec l'autre second membre, mais on note qu'il est conjugué du précédent.

$$\overline{e^{x(1+i)}} = \ e^{x(1-i)}.$$

Or, si $y' - 3y = \alpha$, alors $\overline{y}' - 3\overline{y} = \overline{\alpha}$.
Ainsi, on sait donc que $f_2 = \overline{f_1}$ convient.

(c) On applique enfin le théorème de superposition pour avoir une solution particulière « *globale* » :

$$g_c = \frac{1}{2i}(f_1 - f_2) = \frac{f_1 - \overline{f_1}}{2i} = \mathrm{Im}\,(f_1)\,.$$

$$\begin{aligned}\text{Or } \mathrm{Im}\,(f_1(x)) &= \mathrm{Im}\left(-\frac{2+i}{5}\,\mathrm{e}^{x(1+i)}\right)\\ &= -\frac{1}{5}\mathrm{Im}\,((2+i)(\cos(x)+i\sin(x))\,\mathrm{e}^{x})\\ &= -\frac{1}{5}(2\sin(x)+\cos(x))\,\mathrm{e}^{x}.\end{aligned}$$

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{5}(2\sin(x)+\cos(x))\,\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Théorème 1.6 *(Fonction trigonométrique)*

Soient $b \in \mathbf{R}$, et $(B,\omega) \in \mathbf{R}^2$

$$(E) \qquad y' + ay = B\cos(\omega t).$$

On peut chercher une solution particulière **à valeurs réelles** sous la forme

$$t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\,.$$

Preuve

On applique le théorème de superposition comme à l'exemple précédent. ■

Remarque : De même, pour un second membre en $B\sin(\omega t)$ on peut chercher une solution particulière sous la même forme.
Si B est un polynôme au lieu d'une constante, alors on cherche une solution en remplaçant λ et μ par deux polynômes de même degré que B.

Exemple

Résoudre dans $\mathbf{R}$, l'équation $(E) \quad y' + 2y = \cos(2t)$.
Solution :

1. *Résolution de l'équation homogène.*

$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2t},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

2. *Solution particulière.*
On cherche une solution sous la forme $g\ : t \mapsto \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$.
Alors $g'(t) = -2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$.

$$\begin{aligned}g'(t) + 2g(t) = \cos(2t) &\iff -2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t) + 2\lambda\cos(2t) + 2\mu\sin(2t) = \cos(2t)\\ &\iff (2\mu+2\lambda)\cos(2t) + (-2\lambda+2\mu)\sin(2t) = \cos(2t)\,.\end{aligned}$$

En choisissant $2\mu + 2\lambda = 1$ et $-2\lambda + 2\mu = 0$ on obtient donc bien une solution.
Le système linéaire se résout avec $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$.
Ainsi, $g\ : t \mapsto \frac{1}{4}(\cos(2t) + \sin(2t))$ est solution particulière.

3. *Solutions générales.*

$$\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4}(\cos(2t) + \sin(2t))\,,\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

D Expression des solutions

Nous récapitulons à présent comment obtenir l'ensemble des solutions à partir de la résolution de l'équation homogène et d'une solution particulière obtenues par les théorèmes précédents.

Théorème 1.7 *(Récapitulatif)*

$$(E_c)\ :\qquad \forall t \in I,\quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

1. On trouve les solutions homogènes sur I.
Pour cela, si A est une primitive de A sur I,
alors
$$\mathscr{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbf{K}\right\}.$$
2. On trouve une solution particulière sur I.

Il reste en général à définir la constante λ à l'aide de la condition initiale.
C'est ce que l'on formalise avec la *condition de Cauchy* :

Définition 1.8 *(Condition de Cauchy)*

Une **condition de Cauchy** impose la valeur d'une solution (ou de l'une de ses dérivées) en un point de l'intervalle I.
Dans le cas d'un domaine non borné, la condition de Cauchy peut être une limite.

Définition 1.9 *(Problème de Cauchy)*

Un **problème de Cauchy** du premier ordre est la donnée d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un **intervalle** I

$$(E_b) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

et d'une condition de Cauchy sur I.

En général, la condition de Cauchy est la donnée d'une *condition initiale* : $y(t_0) = y_0$.

Théorème 1.10 *(Unicité de la solution)*

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

Preuve

Il suffit de résoudre l'équation pour trouver λ tel que $\lambda\,\mathrm{e}^{-A(t_0)} + g(t_0) = y_0$. Cela donne l'existence et l'unicité avec $\lambda = (y_0 - g(t_0))\,\mathrm{e}^{A(t_0)}$. ■

Explications *(Interprétation poétique)*
Vous pouvez imaginer un miroir d'eau infini (imaginez, mais en gardant les yeux ouverts, sinon, vous ne pourrez pas lire la suite de l'explication).
Une brise légère souffle à la surface du miroir et la meut en une onde délicate.
Et sous les yeux de votre imagination, apparaît enfin la poésie de cette vision enchanteresse : en chaque position du miroir, le fil du courant n'est autre que la dérivée (la variation de la position).
Ainsi, vous pouvez surprendre Cauchy en train de déposer une goutte d'encre en un point du miroir et la suivre le long du courant. Il n'y a qu'une seule solution possible, qu'un seul chemin pour la goutte : celle qui s'offre à vos yeux. Si le vent n'a pas changé et que vous déposez une autre goutte au même endroit, elle suivra exactement le même chemin.
Et si je place des taches de couleurs variées en différents points du miroir, aucune des lignes imprimées à la surface du miroir n'en croisera une autre, sauf à se trouver exactement sur le même chemin, auquel cas elles se confondent.
Ces lignes formées par les gouttes d'encre s'appellent les **courbes intégrales**.

Explications *(Interprétation géométrique)*
Pour $I = \mathbf{R}$, les courbes des solutions de l'équation différentielle (E_b) sont appelées **courbes intégrales** de (E_b).
Elles forment une **partition** du plan :

- Par tout point, il passe une courbe intégrale,
- Deux courbes intégrales ne se croisent jamais.
- Aucune courbe n'est vide.

Dans le cas des équations différentielles à coefficients constants, ces courbes seront simplement les courbes exponentielles auxquelles on rajoute g_b.

Corollaire 1.11

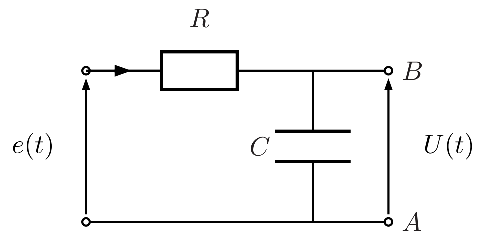
Lorsque le domaine $\mathscr{D}$ est composé de plusieurs intervalles, la donnée d'une condition de Cauchy pour chaque intervalle assure l'unicité de la solution (mais pas forcément leur raccordement).

E Un exemple type en physique : les circuits RC et RL

Partie à travailler en autonomie après avoir étudié les chapitres de physique correspondants.

Le circuit est ouvert en A et B et l'intensité qui parcourt la résistance est la même que celle qui parcourt la capacité.
Ainsi

$$i = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{U_R}{R}.$$



Or $e = U_R + U$, donc $U_R = e - U_C$.
On obtient donc l'équation différentielle :

$$C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{e-U}{R}$$

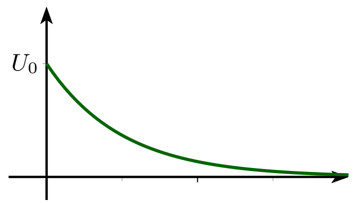
que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U = \frac{e}{\tau}.$$

On a posé $\tau = RC$ qui représente le temps caractéristique du système.

Régime libre ≈ solution de l'équation homogène :
Lorsque $e = 0$, on parle de *régime libre*.
La solution est :

$$U_L(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Ce régime correspond donc à la décharge progressive du condensateur.

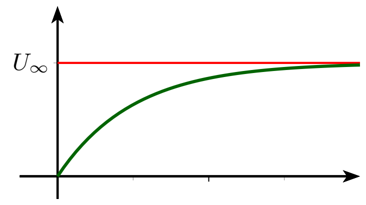
On parle aussi de *régime libre* lorsque le second membre est constant. Cela revient à translater la solution de cette constante. En effet, si $e = U_\infty$ est constant, alors on obtient

$$\frac{\mathrm{d}(U-U_\infty)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}(U-U_\infty) = 0.$$

On trouve donc une solution sous la forme

$$U_L(t) = (U_0 - U_\infty)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_\infty.$$

Par exemple, pour $U_0 = 0$, cela correspond à la réponse du système à un échelon de tension à partir d'un condensateur déchargé.



Régime sinusoïdal forcé ≈ solution particulière :
On peut s'intéresser à la réponse à une tension d'entrée sous la forme d'une sinusoïde

$$e(t) = E\sin(\omega t).$$

Le cours nous dit que l'on peut chercher la solution particulière sous la forme : $U_F(t) = \lambda\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, mais nous allons ici préférer le passage par les complexes tel que cela est fait en physique (on utilise aussi la notation complexe j pour ne pas confondre avec l'intensité). On résout donc

$$\tau\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + U = E\,\mathrm{e}^{j\omega t}.$$

On cherche une solution sous la forme $U(t) = B\,\mathrm{e}^{j\omega t}$. La dérivation revient alors à multiplier par $j\omega$ et on trouve

$$j\tau\omega B + B = E.$$

Donc

$$B = \frac{E}{1+j\omega\tau} = \frac{E}{1+(\omega\tau)^2}(1-j\omega\tau).$$

Si la sollicitation est en sinus, alors il suffit de prendre la partie imaginaire de la solution :

$$U_F(t) = \mathrm{Im}\left(B\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right) = \frac{E}{1+(\omega\tau)^2}\left(-\omega\tau\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right).$$

On peut aussi l'écrire l'écrire sous la forme d'un sinus avec la phase :

$$U_F(t) = G\times E\sin(\omega t - \varphi)$$

avec $G = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$ et $\varphi = \mathrm{Arctan}\,(\omega\tau)$.
G représente le gain : l'amplitude de départ est multipliée par G.
φ représente la phase : le signal est transmis avec un retard de phase égal à $\frac{\varphi}{\omega}$.
On peut observer que B aurait pu s'écrire directement

$$B = G\,\mathrm{e}^{i\varphi}$$

ce qui donne directement le gain et la phase. C'est ce que l'on appelle la fonction[3] de transfert. L'étude de cette fonction de transfert permet de voir les fréquences (ou les pulsations $\omega = 2\pi f$) qui sont privilégiées par le circuit. Dans le cas présent, lorsque $\omega \to 0$, le gain tend vers 1 et la phase vers 0 : le signal est « transparent ». Par contre, si $\omega \to +\infty$, alors le gain tend vers 0 (et la phase vers $\frac{\pi}{2}$). Les hautes fréquences sont atténuées. On dira que c'est un **filtre passe bas**[4]**.**
Dans le cadre du régime sinusoïdal forcé, les physiciens travaillent habituellement avec les complexes (pour éviter de confondre entre l'intensité et la tension, on adopte alors la notation j pour les complexes).
Le condensateur donne l'équation : $i = jC\omega U$ (la dérivation donne un produit). On peut alors faire comme si le condensateur était une « *résistance complexe* » appelée **impédance** de valeur $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$.
Le circuit correspond alors à deux impédances en série.

3. C'est une fonction de ω, la pulsation de l'excitation.
4. Si on prend la tension sur la résistance, on a le comportement complémentaire

Pour étudier la tension au bornes de l'une d'elles, on effectue la moyenne : $U_C = \frac{Z_C}{Z_C+R}E$.
On retrouve alors nos résultats précédents avec un minimum de calculs.
On fait de même avec le **circuit RL**, mais cette fois ci, c'est $U = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ce qui donne $U = jL\omega i$, soit une impédance $Z_L = jL\omega$.

Régime libre vs régime forcé.
On constate que le régime libre tend vers son équilibre à la vitesse exponentielle.
Ainsi, au bout d'un temps très court, son écart à son asymptote sera négligeable par rapport à l'amplitude de la solution particulière.
C'est la raison pour laquelle, on ne s'intéresse souvent qu'au régime sinusoïdal forcé en électronique.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

A Méthode

On a exactement le même théorème de structure que pour les équations du premier ordre. On suivra donc le même cheminement.
⚠ Pour le second ordre, on se limite aux équations à coefficients **constants** (sauf le second membre).

Méthode

Pour $(a,b)\in\mathbf{K}^2, c\in\mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$,

$$(E_c)\qquad y''+ay'+by = f(t).$$

1. On résout l'équation homogène, et on note l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_0$.
2. On trouve *une* solution particulière de l'équation avec second membre : g. L'ensemble des solutions est alors :
$$\mathscr{S}_f = \mathscr{S}_0\text{``}+\text{''}g = \{t\mapsto f(t)+g(t),\ f\in\mathscr{S}_0\}.$$
3. On trouve les constantes à l'aide de la *double* condition de Cauchy.

B Équation homogène

Théorème 2.1

Soit $(a,b) \in \mathbf{K}^2$,
$$(E_0) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$
On appelle **équation caractéristique** de (E_0), l'équation $(\chi) \quad x^2 + ax + b = 0$.
On note Δ son discriminant.
L'ensemble des solutions s'écrit
$$\mathscr{S}_0 = \left\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2,\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbf{R}^2\right\} = \text{Vect}\ \{\varphi_1,\ \varphi_2\}$$
avec

- Si $\Delta \neq 0, r_1$ et r_2 les deux racines de (χ)
  $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}$
  $\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}$.
- Si $\Delta = 0, r$ est racines double de (χ)
  $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$
  $\varphi_2 : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{rt}$.
- *Si* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et si $\Delta < 0, r_1$ et r_2 les deux racines *complexes conjuguées* de (χ)
  On peut alors choisir les fonctions à valeurs réelles suivantes :
  $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$
  $\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$

où $\quad \alpha = \frac{r_1+r_2}{2} = \mathfrak{Re}\,(r_1)$ et $\beta = \frac{r_1-r_2}{2i} = \mathfrak{Im}\,(r_1)$.

Preuve

1. Chercher des solutions sous la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\gamma t}$
2. Méthode de la variation de la constante en distinguant les cas selon Δ.
3. Pour $\Delta < 0$, on résout dans $\mathbf{C}$ puis on cherche les solutions réelles parmi elles.

■

La proposition qui suit, permet de présenter les solutions un peu différemment dans le cas réel. C'est utile en particulier en physique avec les phénomènes oscillatoires. φ représente le décalage de phase, et β la pulsation.

Propriété 2.2 *(Rappel)*

$\forall (A,B) \in \mathbf{R}^2, \exists (C,\varphi) \in \mathbf{R}^2$, tels que
$$\forall t \in \mathbf{R}, A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t) = C\cos(\beta t - \varphi).$$

Preuve

On écrit l'expression : $\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\beta t) + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\beta t)\right)$.

On peut alors poser $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos(\varphi)$ et $\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin(\varphi)$ (car la somme des carrés vaut 1).
On trouve bien l'expression voulue. En physique φ correspond à la *phase*. ■

C Équation avec second membre

Théorème 2.3

$(a,b) \in \mathbf{K}^2, f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbf{K})$,
$$(E_f) \qquad y'' + ay' + by = f(t).$$
On note $\mathscr{S}_f$ les solutions de (E_f).
Si φ_0 est une solution particulière et φ_1, φ_2 des solutions de l'équation homogène telles que définies dans le précédent théorème, alors
$$\mathscr{S}_f = \left\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \varphi_0\ ;\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2\right\}.$$

Preuve

Semblable aux preuves déjà faites. ■

D Recherche d'une solution particulière

Exemple *(L'intuition)*

Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = b$ où $\omega, b \in \mathbf{R}^2$.
Ici, la solution particulière apparaît directement sans travail particulier.

Méthode *(Polynôme-exponentielle)*

Soient $(a,b) \in \mathbf{K}^2$ et $(A,\gamma) \in \mathbf{K}^2$.
$$(E) \qquad y'' + ay' + by = A\,\mathrm{e}^{\gamma t}.$$
On peut chercher une solution de (E) sous la forme

- Si γ n'est pas racine de (χ), $g\ :\ t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.
- Si γ est racine simple de (χ), $g\ :\ t \mapsto \lambda t\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.
- Si γ est racine double de (χ), $g\ :\ t \mapsto \lambda t^2\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Remarque : Si on remplace A par une fonction polynômiale P, alors on a le même type de raisonnement qu'avec l'ordre 1.
Il existe une fonction polynomiale Q de même degré que P telle que g soit solution particulière avec

- si γ est n'est pas racine, $g : t \mapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$,
- si γ est racine simple, $g : t \mapsto tQ(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$,

- si γ est racine double, $g : t \mapsto t^2 Q(t)\,\mathrm{e}^{\gamma t}$.

Méthode

Soient $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, et $(B, \omega) \in \mathbf{K}^2$

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = B\cos(\omega t).$$

On peut chercher une solution particulière sous la forme

$$t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \qquad \text{ou} \qquad t \mapsto \lambda\, \mathbf{t} \cos(\omega t) + \mu\, \mathbf{t} \sin(\omega t).$$

Remarque : De même, pour un second membre en $B\sin(\omega t)$ on peut cherche une solution particulière sous la même forme.
La deuxième forme avec la multiplication par t intervient lorsque $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ sont solutions de l'équation homogène.

Exemple

Trouver les solutions réelles de l'équation définie sur $\mathbf{R}$: $(E) \quad y'' + y' + y = \cos(2t)$.

Solution :

Équation homogène : $y'' + y' + y = 0$.
L'équation caractéristique associée a pour racines $r_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
On trouve donc les solutions de l'équation homogène sont

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right)\right\}.$$

Solution particulière :
On voit que $t \mapsto \cos(2t)$ n'est pas solution de l'équation homogène, donc on cherche une solution sous la forme $y_0 : t \mapsto \lambda\cos(2t) + \mu \sin(2t)$.
On dérive deux fois et on injecte dans l'équation initiale : $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$y_0'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$$
$$y_0''(t) = -4\lambda\cos(2t) - 4\mu \sin(4t).$$

Donc on trouve

$$(-4\lambda + 2\mu + \lambda)\cos(2t) + (-4\mu - 2\lambda + \mu)\sin(2t) = \cos(2t).$$

On trouve donc une solution particulière en résolvant

$$\begin{cases} -3\lambda + 2\mu = 1 \\ -2\lambda - 3\mu = 0 \end{cases}$$

Si on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient

$$\begin{cases} -3\lambda + 2\mu = 1 \\ \lambda - 5\mu = -1 \end{cases}$$

Puis $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$, on obtient

$$\begin{cases} -13\mu = -2 \\ \lambda - 5\mu = -1 \end{cases}$$

Donc $\mu = \frac{2}{13}$ et $\lambda = -1 + \frac{10}{13} = -\frac{3}{13}$ conviennent.
Solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto -\frac{3}{13}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t) + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Exemple

Trouver les solutions réelles de l'équation définie sur $\mathbf{R}$: $(E) \quad y'' + y = \cos(t)$.

Solution :

Équation homogène : on reconnaît une forme bien connue :

$$\mathscr{S}_0 = \{ t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu \sin(t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \}.$$

Solution particulière :
$t \mapsto \cos(t)$ est solution de l'équation homogène.
On cherche donc sous la forme $t \mapsto \lambda t \cos(t) + \mu t \sin(t)$.
On dérive deux fois, et on obtient en réinjectant dans l'équation :

$$2\mu\cos(t) - 2\lambda\sin(t) = \cos(t).$$

Ainsi $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{1}{2}$ conviennent.
Solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{ t \mapsto \frac{1}{2} t \sin(t) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Théorème 2.4 *(Théorème de superposition)*

si g_1 est solution particulière de $y'' + ay' + by = f_1$,
si g_2 est solution particulière de $y'' + ay' + by = f_2$,
alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda g_1 + \mu g_2$ est solution de $y'' + ay' + by = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Définition 2.5 *(Problème de Cauchy)*

$(a, b) \in \mathbf{R}^2, c \in \mathscr{C}^0(I, \mathbf{R})$,

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = f(t).$$

Pour $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbf{R}^2$, on appelle **problème de Cauchy**, la recherche d'une application $f \in \mathscr{S}_c$ vérifiant les **conditions initiales** $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = v_0$.

Théorème 2.6 *(Unicité de la solution)*

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

⚠ Comme l'équation est du second ordre, il faut une **Double** condition aux limite : à la fois sur f et sur f'.
Pour un objet en mouvement, cela correspond à fixer à la fois sa position et sa vitesse

à l'instant t_0. S'il manque une de ces deux informations, il n'y a pas unicité de la solution.

Preuve

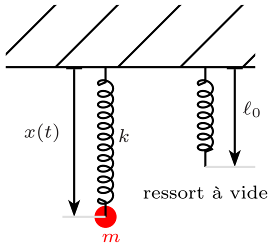
Admis. ∎

E Exemple complet : l'oscillateur harmonique

Partie à travailler en autonomie après avoir étudié les chapitres de physique correspondants.

Modélisation :

Soit une masse ponctuelle m qui oscille librement au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.
On suppose que le ressort est vertical, et que la masse pendue au ressort se déplace uniquement suivant un axe vertical.
On note $x(t)$ l'élongation du ressort à l'instant t.
$x(t)$ est donc la distance entre le point d'ancrage du ressort et la masse m.
Les forces qui s'exercent sur la masse m sont donc :



- la gravité g,
- la force de rappel du ressort $-k(x-\ell_0)$.

Dans un premier temps, les amortissements sont négligés.
Le mouvement étant vertical, on se contente d'étudier la variable d'élongation x.
L'accélération s'exprime alors comme la dérivée seconde de la position : $x''(t)$.
La seconde loi de Newton donne donc l'équation

$$mx'' = mg - k(x-\ell_0).$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, alors l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$x'' + \omega_0^2 x = g + \omega_0^2 \ell_0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre avec second membre.

Changement de variable : On remarque que $x_0 \ : \ t \mapsto = \frac{g}{\omega_0^2} + \ell_0$ est une solution particulière constante. Mécaniquement, cette solution x_0 est la position d'équilibre du mobile : la gravité équilibre exactement la force de rappel du ressort : l'élongation est constante car le mobile ne bouge pas.
Si on pose $z \ : \ t \mapsto x(t) - x_0$, alors, on se ramène à une équation différentielle homogène. En mécanique, ce changement de variable est naturel, il correspond à choisir comme origine du repère le point l'équilibre x_0.
La nouvelle équation du mouvement est donc

$$z'' + \omega_0^2 z = 0.$$

Résolution : L'équation caractéristique est $x^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont $x_1 = i\omega_0$ et $x_2 = -i\omega_0$.

$$\exists A \in \mathbf{R},\ \phi \in]-\pi,\pi[, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad z(t) = A\cos\left(\omega_0 t - \phi\right).$$

ω_0 représente ainsi la pulsation d'oscillation (période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$).
L'amplitude A et la phase ϕ dépendent des conditions initiales.

Analyse énergétique : Si on multiplie l'équation initiale par $z'(t)$, on trouve

$$mz'(t)z''(t) + kz'(t)z(t) = 0.$$

On reconnaît la dérivée de $\frac{1}{2}m\left(z'\right)^2 + \frac{1}{2}kz^2$ qui est donc constante (dérivée nulle).
$z' = v$ désigne la vitesse instantanée du mobile à l'instant t, on peut alors poser

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad E_p = \frac{1}{2}kz^2.$$

La somme de E_c (énergie cinétique) et de E_p (énergie potentielle) est donc constante.
Cette somme s'appelle l'énergie mécanique et elle peut être facilement évaluée lorsque z est extrémal ($v = 0$). A étant l'amplitude on trouve donc

$$E_c + E_p = E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2.$$

Ajout d'un amortissement : on peut rajouter un amortissement proportionnel à la vitesse. L'équation différentielle s'écrit alors

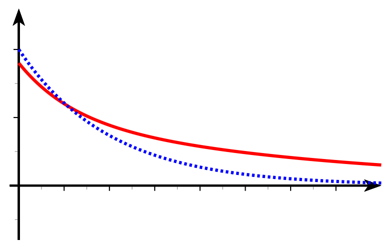
$$z'' + 2\sigma\omega_0 z' + \omega_0^2 z = 0.$$

$2\sigma\omega_0 \geqslant 0$ représente l'amortissement (homogène à une pulsation). σ s'appelle le coefficient d'amortissement.
L'équation caractéristique est $x^2 + 2\sigma\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 4(\sigma^2\omega_0^2 - \omega_0^2) = \left(2\omega_0\right)^2\left(\sigma^2 - 1\right)$.

- Si $\sigma > 1$,
  alors $\Delta > 0$ et le régime n'est pas oscillant (l'amortissement est trop fort).
  Les solutions de l'équation caractéristique sont $x_\pm = -\omega_0\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)$.

  $$z(t) = \left(A\,\mathrm{e}^{\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}\,t}\right)\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 t}.$$

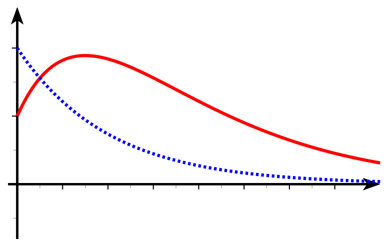
  La solution tend vers 0 de façon exponentielle.



Régime apériodique

- Si $\sigma = 1$,
  alors $\Delta = 0$ et le régime est n'est plus périodique.
  C'est un cas critique.
  La double solution de l'équation caractéristique est $x = -\omega_0$.

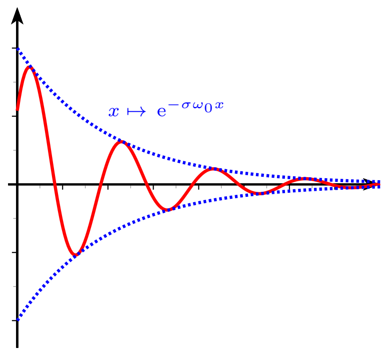
$$z(t) = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$



Régime critique

- Si $\sigma < 1$,
  alors $\Delta < 0$ et le régime est périodique amorti.
  Ainsi les solutions de l'équation caractéristique sont $x_\pm = -\omega_0\left(\sigma \pm i\sqrt{1-\sigma^2}\right)$.
  On pose $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$ la pseudo-pulsation.

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 t}\cos\left(\Omega\, t - \phi\right).$$



Régime amorti

L'amortissement se traduit par « l'enveloppe » exponentielle décroissante et par une altération de la période d'oscillation.

On retrouve l'équation non amortie pour $\sigma = 0$.

Si on note $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ la pseudo-période, alors $z(t+T) = z(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 T}$.

Cela invite à introduire le décrément logarithmique $\delta = -\ln\frac{x(t+T)}{x(t)} = \sigma\omega_0 T$.

Le décrément logarithmique peut être obtenu expérimentalement en observant la variation d'amplitude sur une période (n'importe laquelle).

Voir le cours de physique pour des interprétations dignes de ce nom.

Régime sinusoïdal forcé : On peut imaginer que l'extrémité haute du ressort est fixé à un petit moteur qui exerce sur elle une force ou un mouvement oscillatoire sinusoïdal de période ω.
On peut alors écrire l'équation sous la forme $z'' + 2\sigma\omega_0 z' + \omega_0^2 z = K\sin(\omega t + \phi)$.
On distingue alors deux régimes

- Le régime libre (ou transitoire) : il correspond à la solution de l'équation homogène,
- Le régime sinusoïdal forcé : il correspond à la solution particulière.

Comme la solution de l'équation homogène tend exponentiellement vers 0 ($\sigma > 0$), alors pour un temps suffisamment grand (après quelques périodes), la solution sera « très proche » de la solution particulière [5]. C'est la raison pour laquelle, en physique, on se contente souvent de ne calculer que la solution particulière correspondant au régime sinusoïdal forcé.
La recherche de cette solution particulière se fait aisément avec les nombres complexes.

F Les équations fonctionnelles

Un exercice très classique consiste à résoudre une équation fonctionnelle en se ramenant à une équation différentielle.
Pour cela, la méthode habituelle est de dériver l'équation fonctionnelle une ou plusieurs fois. La preuve se fait alors par **analyse-synthèse**.

Remarques sur les hypothèses :

- Il faut souvent commencer l'exercice en justifiant que la fonction peut être dérivée le nombre de fois voulu. Ces hypothèses de dérivabilité s'obtiennent généralement à partir de la relation fonctionnelle elle-même.
- Même, lorsque la fonction n'est pas supposée dérivable (ou pas suffisamment), cette méthode peut-être un bon point de départ pour trouver un certain nombre de solutions et affiner son intuition en vue du cas général.

Exemple

Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Solution :
Analyse : on suppose que f est solution.
Comme f est dérivable, et $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ l'est aussi, alors par composée, $x \mapsto f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ l'est aussi.
f' est donc dérivable, c'est-à-dire que f est deux fois dérivable.

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad f''(x) = -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)\right) = -f(x).$$

Donc f est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

Ainsi, il existe $(\lambda,\, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que f s'écrive sous la forme $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$.

Synthèse :
Si $\exists\lambda, \mu \in \mathbf{R}^2$, tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$, alors
f est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\lambda\sin x + \mu\cos x - \lambda\sin x - \mu\cos x =$

5. Nous pourrons donner plus tard dans l'année, une définition plus rigoureuse de « très proche » avec l'analyse asymptotique.

$-2\lambda \sin x$.
f est solution si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.
En particulier pour $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $\lambda = 0$.
Ainsi $\exists \mu \in \mathbf{R}$, tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \mu \sin x$, et on vérifie alors que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$$

Donc f est solution.
Conclusion :
L'ensemble des solutions est

$$\{x \mapsto \mu \sin x,\ \mu \in \mathbf{R}\}.$$

G Preuve des solutions de l'équation homogène pour l'ordre 2

1. Chercher des solutions sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\gamma x}$
On pose donc $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{\gamma x}$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mathrm{e}^{\gamma x}, \\ \varphi'(x) &= \gamma\, \mathrm{e}^{\gamma x}, \\ \varphi''(x) &= \gamma^2\, \mathrm{e}^{\gamma x}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0 &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ a\gamma^2\, \mathrm{e}^{\gamma x} + b\gamma\, \mathrm{e}^{\gamma x} + c\, \mathrm{e}^{\gamma x} = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ (a\gamma^2 + b\gamma + c)\, \mathrm{e}^{\gamma x} = 0 \\ &\iff a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \qquad \text{(car l'exponentielle ne s'annule jamais)} \\ &\iff \gamma \text{ est solution de l'équation caractéristique.} \end{aligned}$$

2. Méthode de la variation de la constante en distinguant les cas selon Δ.
Soit $f \in S_0$.
On pose r une solution de l'équation caractéristique (quelle que soit la valeur de $\Delta \geqslant 0$).
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $\lambda(x) \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda(x)\, \mathrm{e}^{rx}$ (car l'exponentielle ne s'annule jamais).
λ ainsi définie est une fonction deux fois dérivable (comme quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda(x)\, \mathrm{e}^{rx}, \\ f'(x) &= \lambda'(x)\, \mathrm{e}^{rx} + r\lambda(x)\, \mathrm{e}^{rx}, \\ f''(x) &= \lambda''(x)\, \mathrm{e}^{rx} + 2r\lambda'(x)\, \mathrm{e}^{rx} + r^2\lambda(x)\, \mathrm{e}^{rx}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f \in S_0 &\iff af'' + bf' + cf = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ \left(a\lambda''(x) + 2ar\lambda'(x) + ar^2\lambda(x) + b\lambda'(x) + br\lambda(x) + c\lambda(x)\right)\, \mathrm{e}^{rx} = 0 \\ &\iff a\lambda'' + (2ar + b)\lambda' + (ar^2 + br + c)\lambda = 0 \quad \text{(l'exponentielle ne s'annule jamais)} \\ &\iff a\lambda'' + (2ar + b)\lambda' + (\underbrace{ar^2 + br + c}_{=0})\lambda = 0 \\ &\iff a\lambda'' + (2ar + b)\lambda' = 0 \\ &\iff \lambda' \text{ est solution de l'équation différentielle } ay' + (2ar + b)y = 0 \\ &\iff \exists \mu \in \mathbf{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbf{R},\ \lambda'(x) = \mu\, \mathrm{e}^{-\frac{2ar+b}{a}x} \qquad (\text{car } a \neq 0). \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, alors $r = -\frac{b}{2a}$, donc $2ar + b = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ \lambda'(x) = \mu$, donc λ est de la forme $x \mapsto \mu_1 x + \mu_2$ avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$.
f s'écrit alors $f(x) = \lambda(x)\, \mathrm{e}^{rx} = \mu_1 x\, \mathrm{e}^{rx} + \mu_2\, \mathrm{e}^{rx}$, ce qui est bien la forme du théorème.
- Si $\Delta > 0$, alors $2ar + b \neq 0$ et λ s'écrit sous la forme $\mu_1\, \mathrm{e}^{-\frac{2ar+b}{a}x} + \mu_2$ (on a renommé $\mu_1 = \frac{a\mu}{2ar+b}$).
Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda(x)\, \mathrm{e}^{rx} = \mu_1\, \mathrm{e}^{-(r+\frac{b}{a})x} + \mu_2\, \mathrm{e}^{rx}$.
Or si r est une des solutions de l'équation différentielle, alors $-(r + \frac{b}{a})$ est l'autre.
Les solutions sont donc bien sous la forme énoncée dans le théorème.

3. Le point précédent pour $\Delta > 0$ reste valable si on se place dans $\mathbf{C}$ au lieu de $\mathbf{R}$. Il faut ensuite sélectionner les solutions réelles parmi toutes celles trouvées.
Les solutions (complexes) sont donc de la forme $x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 x}$ pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}$ où r_1 et r_2 désignent les solutions complexes de l'équation caractéristique.
Comme l'équation caractéristique est à coefficients réels, les deux racines sont conjuguées.
On note donc $r = r_1$ et $\overline{r} = r_2$.
Si f est solution réelle de l'équation, elle est a fortiori solution complexe. Donc toute solution de mon équation s'écrit nécessairement sous la forme

$$f\ :\ x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^{rx} + \mu\, \mathrm{e}^{\overline{r}x} \quad \text{avec}(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2.$$

Voyons à présent à quelle condition sur λ et μ la solution f convient (c'est-à-dire est réelle).

$$\begin{aligned} f \in S &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{f(x)} = f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{\lambda\, \mathrm{e}^{rx} + \mu\, \mathrm{e}^{\overline{r}x}} = \lambda\, \mathrm{e}^{rx} + \mu\, \mathrm{e}^{\overline{r}x} \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{\lambda}\, \mathrm{e}^{\overline{r}x} + \overline{\mu}\, \mathrm{e}^{rx} = \lambda\, \mathrm{e}^{rx} + \mu\, \mathrm{e}^{\overline{r}x} \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \left(\overline{\lambda} - \mu\right)\, \mathrm{e}^{\overline{r}x} = \left(\lambda - \overline{\mu}\right)\, \mathrm{e}^{rx} \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \left(\overline{\lambda} - \mu\right)\, \mathrm{e}^{(\overline{r}-r)x} = \lambda - \overline{\mu}. \end{aligned}$$

Le membre de droite est constant, donc celui de gauche doit l'être aussi.
Or $\overline{r} - r \neq 0$ (sinon $\mathfrak{Im}\,(r) = 0$ ce qui est absurde car $\Delta < 0$).
On peut donc écrire

$$f \in S \iff \overline{\lambda} = \mu.$$

(je n'ai justifié que l'implication, mais la réciproque est évidente car alors $\lambda = \overline{\mu}$)
La fonction f s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\,\mathrm{e}^{rx} + \overline{\lambda}\,\mathrm{e}^{\overline{r}x} \\ &= \lambda\,\mathrm{e}^{rx} + \overline{\lambda\,\mathrm{e}^{rx}} \\ &= 2\,\mathfrak{Re}\,\left(\lambda\,\mathrm{e}^{rx}\right). \end{aligned}$$

Si $r = \alpha + i\beta$ et $\lambda = u + iv$, alors

$$(u+iv)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} = (u+iv)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right).$$

Donc en prenant la partie réelle :

$$f(x) = 2u\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2v\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \text{avec} \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Lorsque (u,v) décrivent $\mathbf{R}^2$; $(2u,-2v)$ décrivent également $\mathbf{R}^2$.
En posant de nouvelles constantes $\widetilde{\lambda} = 2u$ et $\widetilde{\mu} = -2v$, je peux écrire

$$S = \left\{x \mapsto \widetilde{\lambda}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + \widetilde{\mu}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),\ (\widetilde{\lambda},\widetilde{\mu}) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$