Géométrie du plan et de l'espace

« Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. »
Inscription au fronton de l'Académie de Platon

L'objet de ces courtes révisions de géométrie est d'offrir des objets faciles à visualiser qui illustreront les prochains chapitres sur les espaces vectoriels et les applications linéaires.
Les objets considérés ne sont que des cas particuliers des espaces vectoriels et affines qui seront vus au chapitre suivant.

Notations : Dans le chapitre, on désignera habituellement par $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal, et par $\mathscr{E}$ l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormal.

1 Vecteurs

Définition 1.1 *(Vecteurs et opérations)*

Dans le plan	**Dans l'espace**
Définition :	
Un vecteur de $\mathbf{R}^2$ est un couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$	Un vecteur de $\mathbf{R}^3$ est un triplet $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.
Opérations sur les vecteurs :	
• Si $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{v} = (x',y')$, alors $$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x+x', y+y')$$	• Si $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} = (x',y',z')$, alors $$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x+x', y+y', z+z')$$
• Si $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $$\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda x, \lambda y)$$	• Si $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $$\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$
Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est $-\overrightarrow{u} = (-x,-y)$.	Le vecteur opposé à $\overrightarrow{u}$ est $-\overrightarrow{u} = (-x,-y,-z)$.

Les opérations se font simplement coordonnée par coordonnée : on ajoute les abscisses entre elles et les ordonnées entre elles.

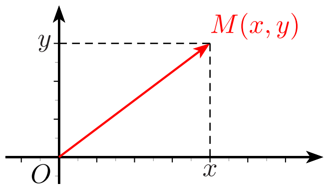
2 Représentation euclidienne

Théorème 2.1

Dans le plan	Dans l'espace
• On munit le plan, ou l'espace, d'un repère	
$\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ avec $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$	$\mathscr{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ avec $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$
• Tout vecteur se décompose de façon unique en fonction des *vecteurs de base* :	
Si $\overrightarrow{u} = (x,y)$, alors $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$	Si $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$, alors $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$
• À chaque vecteur, on associe un unique point (et réciproquement) :	
$\begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathcal{P} \\ (x,y) & \mapsto M(x,y) \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{R}^3 & \to \mathscr{E} \\ (x,y,z) & \mapsto M(x,y,z) \end{cases}$

Si M est un point du plan (ou de l'espace), on note $\overrightarrow{OM}$ le vecteur qui lui est associé.

$$\overrightarrow{OM} = (x,y)$$



Explications

On peut identifier chaque vecteur à un unique point du plan (et réciproquement). (x,y) sera tantôt interprété comme un vecteur ou comme un point selon les situations (à condition d'avoir précisé au préalable le repère dans lequel on travaille).

Approfondissement :

De façon plus précise, on établit une bijection entre les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et les points de l'espace correspondant.
Cette bijection dépend du choix du repère. Si on avait choisi un autre repère, par exemple $\overrightarrow{i} = (1,1)$ et $\overrightarrow{j} = (-1,1)$, alors on aurait décomposé les vecteurs différemment en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ et on aurait abouti à une représentation euclidienne différente.
Ainsi, avec les deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ donnés ci-dessus, le vecteur (x,y) correspondrait au point $M\left(\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right)$ car $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{-x+y}{2}(-1,1) = \frac{x+y}{2}\overrightarrow{i} + \frac{-x+y}{2}\overrightarrow{j}$.
Cette question du choix des vecteurs de base dans le repère sera une question cruciale pour les espaces vectoriels.

Définition 2.2

À tout couple de points (A,B), on associe un unique vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Dans le plan	Dans l'espace
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.	$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux **représentants** d'un même vecteur.

Explications

Ces coordonnées correspondent à « la coordonnée du point d'arrivée *moins* la coordonnée du point de départ ». C'est comme si on prenait A comme origine du repère au lieu de O.
On remarque que cette définition est cohérente avec le théorème 2.1 : si on prend $A = O(0,0)$, alors on obtient $\overrightarrow{OB} = (x_B - 0, y_b - 0) = (x_b, y_b)$.

Théorème 2.3

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ est associé à une unique **translation** $t_{\overrightarrow{u}}$:

Dans le plan	Dans l'espace
Pour $\overrightarrow{u} = (a,b)$, $t_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} \mathcal{P} & \to \mathcal{P} \\ A(x,y) & \mapsto A'(x+a, y+b) \end{cases}$	Pour $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$, $\begin{cases} \mathscr{E} & \to \mathscr{E} \\ A(x,y,z) & \mapsto A'(x+a, y+b, z+c) \end{cases}$

Réciproquement, à toute translation, on peut associer un unique vecteur.

Explications

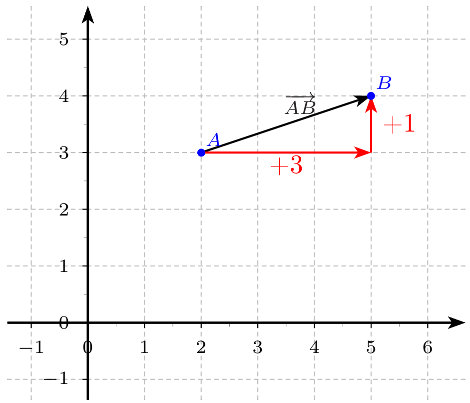
On peut interpréter la *flèche* du vecteur ainsi : elle translate du point de départ vers le point d'arrivée.
Tous les couples de points correspondant à la même translation sont donc identifiés au même vecteur.
Ce théorème définit une bijection entre l'ensemble des vecteurs et l'ensemble des translations.

Exemple

Soient $A(2,3)$ et $B(5,4)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a donc pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A) = (3;1)$.
Ces coordonnées traduisent la transformation qui passe du point A au point B.

En effet, si on ajoute ces coordonnées à celles de A, on obtient le point B.

$$x_A + (x_B - x_A) = x_A + x_B - x_A = x_B$$
$$y_A + (y_B - y_A) = y_A + y_B - y_A = y_B$$

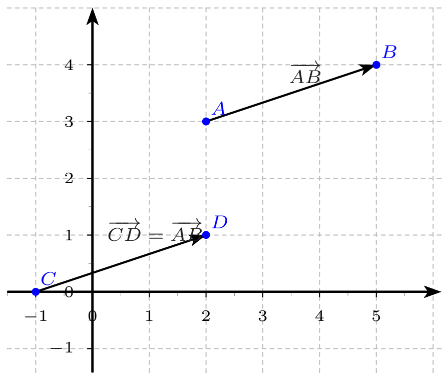


Si $C = (-1, 0)$, quelles doivent être les coordonnées de $D(x_D, y_D)$ pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Solution :

Il suffit d'ajouter les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ aux coordonnées de C :

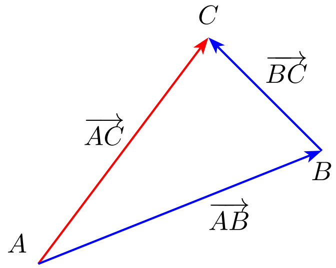
$$x_D = x_C + x_{\overrightarrow{AB}} = -1 + 3 = 2$$
$$y_D = y_C + y_{\overrightarrow{AB}} = 0 + 1 = 1$$



Théorème 2.4 *(Relation de Chasles)*

Si A, B et C sont trois points quelconques,
alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



En allant de A à C, je peux passer par B et y faire une petite pause...

Preuve

C'est immédiat avec les coordonnées.
Par exemple, si on travaille dans le plan, alors on peut noter $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= (x_B - x_A, y_B - y_A) + (x_C - x_B, y_C - y_B)\\ &= (x_B - x_A + x_C - x_B, y_B - y_A + y_C - y_B)\\ &= (x_C - x_A, y_C - y_A) = \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

■

3 Orthogonalité

Définition 3.1 *(Produit scalaire)*

Dans le plan	Dans l'espace
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$. On définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'.$	Soient $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$

Remarque : Le produit scalaire est à valeurs dans $\mathbf{R}$, c'est un réel et non un vecteur.

Définition 3.2 *(Orthogonalité)*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dit **orthogonaux** si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exemple

Montrer que le seul vecteur qui soit orthogonal à tous les vecteurs est le vecteur

nul.
Solution :

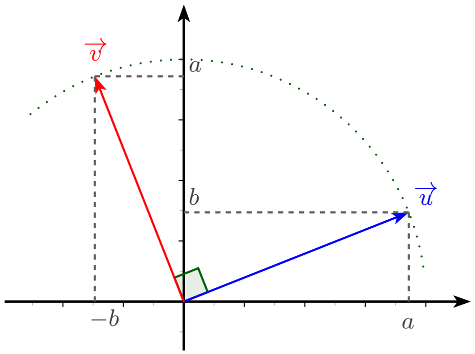
- **Analyse :** soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur orthogonal à tous les vecteurs. En particulier, il est orthogonal à lui-même.

  Méthode : n'oubliez pas que, si c'est vrai pour tous, alors on peut **particulariser**.

  Ainsi $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$, or le produit scalaire est *défini positif*, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- **Synthèse :** pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, on a $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, donc $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Méthode *(Trouver un vecteur orthogonal dans le plan)*

Soit $\overrightarrow{u} = (a, b)$ un vecteur du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{v} = (-b, a)$ lui est orthogonal



Méthode *(Trouver des vecteurs orthogonaux dans l'espace)*

Soit $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ un vecteur du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{v} = (-b, a, 0)$ et $\overrightarrow{v'} = (0, -c, b)$ et $\overrightarrow{v''} = (-c, 0, a)$ lui sont orthogonaux.

Preuve

Il suffit de faire le calcul. ∎

On remarque que dans l'espace à trois dimensions, si $\overrightarrow{u}$ n'est pas nul, alors les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ forment un plan que l'on note $\overrightarrow{u}^{\perp}$.
Ainsi, les trois vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{v''}$ sont coplanaires : on peut en prendre 2 non colinéaires pour définir un repère de ce plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$ et le troisième vecteur s'écrit alors en fonction des deux autres.
Par exemple, lorsque $b \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas colinéaires et peuvent donc former un repère du plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$. $\overrightarrow{v''}$ peut se décomposer suivant $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$:

$$\overrightarrow{v''} = \frac{c}{b} \cdot \overrightarrow{v} + \frac{a}{b} \cdot \overrightarrow{v'}$$

(si $b = 0$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont colinéaires et ne forment donc pas une base du plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$. Mais on peut alors prendre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v''}$ ou $\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{v''}$, selon les valeurs de a et c, comme repère du plan.)

Conclusion : si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors tous les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois là.

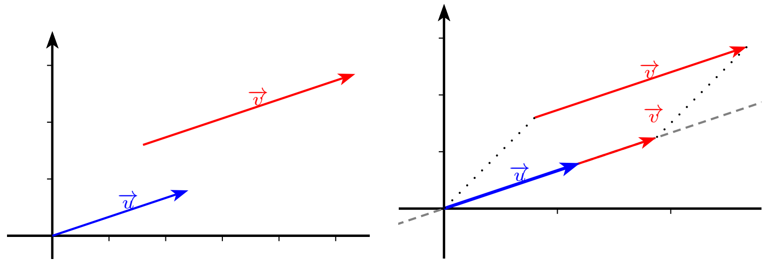
4 Droites dans le plan et l'espace

Définition 4.1 *(Colinéarité)*

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'ils sont proportionnels,
c'est-à-dire, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$.

Explications

Les deux vecteurs placés à l'origine sont sur la même ligne, ou leurs représentants sont parallèles.



Exemple

Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, deux vecteurs non nuls du plan, alors les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ sont exactement tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{v}$. Nous verrons plus loin que c'est une façon de décrire une droite (propriété 4.4).

Définition 4.2 *(Droites du plan ou de l'espace)*

Une droite (d) du plan $\mathcal{P}$ est définie à partir d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ non nul et un point $A(x_0, y_0)$ par lequel elle passe.

La droite est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

On note souvent (AB) : la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ passant par A.

Dans l'espace à trois dimension, on rajoute une troisième coordonnée z pour le point et le vecteur.

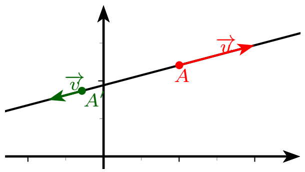
Explications

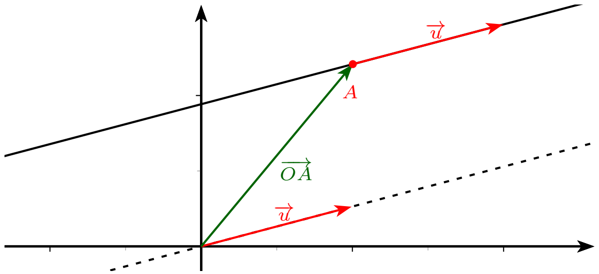
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ donne la direction de la droite et le point A sert à la translater par rapport à l'origine.
On voit que l'écriture n'est pas unique : on peut prendre différents vecteurs, et différents points pour décrire une même droite. En effet, on peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite. Et $\overrightarrow{u}$ peut être remplacé par tout vecteur

non nul qui lui est colinéaire (qui donne la même direction).
Cette définition doit rappeler les solutions des systèmes linéaires avec second membre. Lorsque la solution est une droite affine, elle s'écrit sous la forme

$$(x_0, y_0, \cdots) + \text{Vect}\,(\alpha, \beta, \cdots).$$

Le premier vecteur donne les coordonnées du point A et le second vecteur indique la direction de la droite.





Explications

Ce sont l'ensemble des points situés entre A et B.
Intuitivement : on écrit un point M du segment comme le point A auquel on rajoute une portion de $\overrightarrow{AB}$:

Propriété 4.3 *(Représentation paramétrique d'une droite du plan)*

Une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ et passant par le point $A(x_A, y_A)$ a pour équation :

$$(d)\ \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbf{R}.$$

Remarque : Cette représentation n'est pas unique.

Propriété 4.4 *(Équation implicite d'une droite du plan)*

Une droite (d) du plan est parfaitement décrite par un point $A(x_A, y_A)$ par lequel elle passe et un vecteur orthogonal $\overrightarrow{v} = (a, b)$.
L'équation de cette droite est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Réciproquement, une équation de la forme $ax + by + c = 0$ désigne une droite du plan.
On parle de **représentation cartésienne.**

Remarque : On remarque que les expressions $-x_A$ et $-y_A$ correspondent à un changement d'origine du repère : au lieu de passer par $O(0,0)$, la droite passe par $A(x_A, y_A)$.

Preuve

C'est l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp \overrightarrow{v}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. ∎

Exemple

Soit l'équation d'une droite dans le plan : $(d)\ :\ \ 5x + 3y = 4$.

1. Trouver un vecteur orthogonal à la droite (d) et un point par lequel passe (d).
2. En déduire une équation paramétrique de (d).

Solution :

1. *Vecteur normal :* $(5, 3)$.
   Point de la droite : si on prend $x = 0$, alors $y = \frac{4}{3}$. Donc la droite passe par le point $A\ \left(0, \frac{4}{3}\right)$.
2. Un vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal. Donc $(-3, 5)$ est un vecteur directeur de la droite.
   Une équation paramétrique de (d) est alors

$$(d)\ :\ \begin{cases} x = -3t \\ y = \frac{4}{3} + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

On peut aussi trouver plus rapidement une équation paramétrique, en posant $x = t$ par exemple. Alors en remplaçant dans la deuxième équation, on trouve $y = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}t$ et l'équation de la droite est

$$(d)\ :\ \begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{4}{3} - \frac{5}{3}t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Les deux équations de droite sont équivalentes, à un changement de variable t près (le changement est bijectif en multipliant t par -3 ou en le divisant par cette même quantité). Le changement de variable t nous fait juste parcourir "*plus ou moins vite*" la droite (avec le premier paramétrage on va trois fois plus vite qu'avec le second, mais dans l'autre sens).

Exemple

Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$(d)\ :\ \begin{cases} x &= 7t + 5 \\ y &= -t + 1 \end{cases}.$$

1. Trouver un vecteur directeur à la droite (d) et un point par lequel passe (d).
2. En déduire une équation cartésienne de (d).

Solution :

1. Un vecteur directeur de (d) est $(7, -1)$
   pour $t = 0$, la droite passe par le point $(5, 1)$.
2. Un vecteur normal à (d) est donc $(1, 7)$.
   On en déduit une équation cartésienne de (d) : $x + 7y + c = 0$.
   Pour trouver c, on remplace x par 5 et y par 1 et on trouve : $5 + 7 + c = 0$, donc $c = -12$.

$$(d)\ :\ \ x + 7y - 12 = 0.$$

On peut aussi voir que $t = 1 - y$, que l'on remplace dans la première équation et on retrouve : $x = 7(1-y)+5$ c'est-à-dire $x + 7y - 12 = 0$.

Exemple

Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(2,0)$ et $B(-4,3)$.

Solution :

La droite passe par $A(2,0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (-4-2, 3) = (-6, 3)$. On peut lui substituer un vecteur colinéaire plus simple (en divisant par 3) : $(-2, 1)$.
Un vecteur normal est donc $(1, 2)$.
Une équation cartésienne est du type :

$$(d) \ : \quad x + 2y + c = 0.$$

On sait que la droite passe par A et on peut remplacer x par 2 et y par 0. On obtient ainsi $c = -2$ pour que l'équation soit vérifiée.
La droite a donc pour équation cartésienne

$$(d) \ : \quad x + 2y - 2 = 0.$$

Remarque : On peut aussi obtenir la constante en raisonnant par translation par rapport à l'origine :

$$(d) \ : \quad (x-2) + 2(y-0) = 0.$$

Propriété 4.5 *(Représentation paramétrique d'une droite de l'espace)*

Une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ a pour équation :

$$(d) \ \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbf{R}.$$

Propriété 4.6 *(Équation implicite d'une droite de l'espace)*

L'équation d'une droite de l'espace est donnée par deux vecteurs non colinéaires qui lui sont orthogonaux.

$$\begin{cases} a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) & = 0 \\ a'(x-x_A) + b'(y-y_A) + c'(z-z_A) & = 0 \end{cases}.$$

On parle de **représentation cartésienne.**

Explications

On peut décrire une droite

- par l'intersection de deux plans.
  Nous avions vu au moment des systèmes que dans un espace de 3, les solutions d'une équation (à trois inconnues) désignent un espace de dimension $2 = 3 - 1$.
  Ainsi chaque équation désigne un plan. Si ces deux plans ne sont pas confondus ou parallèles (équations proportionnelles), alors ils sont sécants et leur intersection est une droite.
- par orthogonalité à deux vecteurs.
  Une droite est décrite à partir de deux vecteurs non colinéaires : deux vecteurs non colinéaires désignent un plan. Et la droite décrite est celle qui est orthogonale à ce plan et passe par un point A (second membre).

Ainsi, la propriété ci-dessus, peut être interprétée soit comme l'intersection de deux plans (chaque équation désigne un plan), soit comme la donnée de deux vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') qui doivent tous deux être orthogonaux à $\overrightarrow{AM} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A)$.

Bien sûr, ces deux interprétations sont équivalentes (ce sont les mêmes équations).

5 Plans dans l'espace

Définition 5.1 *(Plans dans l'espace)*

Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace $\mathscr{E}$ est défini à partir de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ non colinéaires qui donnent sa direction et d'un point $A\,(x_0, y_0, z_0)$ qu'il contient.

Le plan est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$ avec $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.

Remarque : Le choix de A et du vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas unique. On peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite, et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par deux autres vecteurs non colinéaires du plans.

Explications

A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donnent trois points non alignés de l'espace. Cela permet de définir un plan. Le plan est décrit par deux réels $(t, t') \in \mathbf{R}^2$, il s'agit bien d'un espace de dimension 2. Les deux vecteurs donnent la *direction* du plan, et le point A permet de le translater par rapport à l'origine. C'est exactement la même logique que pour la droite que nous avions déjà vu.

Définition 5.2 *(Représentation paramétrique d'un plan)*

Un plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ et passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ a pour équation :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \qquad \text{pour } (t, t') \in \mathbf{R}^2.$$

Remarque : Cette représentation n'est pas unique.

Propriété 5.3 *(Équation implicite d'un plan)*

Un plan $(\mathcal{P})$ du plan est parfaitement décrit par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ par lequel il passe et un vecteur orthogonal $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$.
L'équation de ce plan est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de l'espace de la forme $ax+by+cz+d = 0$ désigne une plan.
On parle de **représentation cartésienne.**

Preuve

Ce sont simplement l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp \overrightarrow{w}$. ■

Exemple

Soit l'équation d'un plan : $\mathcal{P}\ :\ \ x + 3y + 2z = 4$.

1. Trouver un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$ et un point par lequel passe $\mathcal{P}$.
2. En déduire une équation paramétrique de $\mathcal{P}$.

Solution :

1. Le vecteur $\overrightarrow{w} = (1, 3, 2)$ est normal au plan.
   Pour $x = y = 0$, on a $z = 2$, donc le plan passe par le point $A(0, 0, 2)$.
2. Il faut trouver deux vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{w}$ et non colinéaire entre eux.
   On peut prendre $\overrightarrow{u} = (-3, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (0, -2, 3)$ par exemple.
   Ainsi un paramétrage du plan est

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = t - 2t' \\ z = 2 + 3t' \end{cases} \qquad \text{pour } (t, t') \in \mathbf{R}^2.$$

   C'est ce que l'on note aussi (dans le chapitre sur les systèmes)

$$(0, 0, 2) + \mathrm{Vect}\,(\,(-3, 1, 0)\ ,\ (0, -2, 3)\,)\,.$$

On pourrait aussi trouver une équation du plan en résolvant comme un système linéaire : on a un pivot x et deux paramètres y et z. On pose donc $y = t$ et $z = t'$.
Alors $x = 4 - 3t - 2t'$ et un paramétrage du plan est simplement

$$\begin{cases} x = 4 - 3t - 2t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases} \qquad \text{pour } (t, t') \in \mathbf{R}^2.$$

C'est ce que l'on note aussi

$$(4, 0, 0) + \mathrm{Vect}\,(\,(-3, 1, 0)\ ,\ (-2, 0, 1)\,)\,.$$

Ces deux paramétrages désignent le même plan : le paramétrage n'est pas unique.

Exemple

Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$\mathcal{P}\ :\ \begin{cases} x &= 2t + 3t' - 5 \\ y &= 4t - t' + 1 \\ z &= t - 1 \end{cases}.$$

1. Trouver deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ et un point par lequel il passe.
2. Donner une équation cartésienne de (d).
3. En déduire un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$.

Solution :

1. $\overrightarrow{u} = (2, 4, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (3, -1, 0)$ sont deux vecteur non colinéaires du plan. Le plan passe par le point $A(-5, 1, -1)$.
2. Pour obtenir une équation cartésienne du plan, soit on cherche un vecteur qui est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, soit on cherche directement l'équation en résolvant le système linéaire d'inconnues t et en t' en fonction des paramètres y et z. On en déduira ensuite la valeur de x en fonction de t et t'.
   Nous allons utiliser cette deuxième méthode :

$$\begin{cases} 4t - t' + 1 &= y \\ t - 1 &= z \end{cases} \iff \begin{cases} 4t - t' + 1 &= y \\ t &= z + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4(z+1) - t' + 1 &= y \\ t &= z + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -t' + 4z + 5 &= y \\ t &= z + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t' &= -y + 4z + 5 \\ t &= z + 1 \end{cases}$$

   Donc $x = 2(z + 1) + 3(-y + 4z + 5) - 5 = -3y + 14z + 12$, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est

$$x + 3y - 14z + 16 = 0.$$

3. Un vecteur orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{v}$ est donné par l'équation cartésienne : $\overrightarrow{w} = (1, 3, -14)$.
   On peut vérifier que

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 2\cdot 1 + 4\cdot 3 + 1\cdot(-14) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = 3\cdot 1 - 1\cdot 3 + 0\cdot(-14) = 0.$$

Exemple

Donner une équation paramétrique du plan qui passe par les points $A(1, 1, 2)$, $B(0, 1, -1)$ et $C(1, -1, -1)$.
Solution :
Les trois points ne sont pas alignés, donc ils définissent bien un plan.
Cela se traduit par le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et peuvent servir pour paramétrer le plan.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -3) = -(1, 0, 3) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = (1, -2, 0).$$

On peut prendre $-\overrightarrow{AB}$ au lieu de $\overrightarrow{AB}$ pour trouver un paramétrage plus simple, et on obtient $\begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = 1 - 2t' \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ pour $(t, t') \in \mathbf{R}^2$.

Exemple

Donner une équation cartésienne du plan qui passe par les points $A(0, 2, -1)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(1, 1, 1)$.

Solution :

Les trois points ne sont pas alignés et désignent donc un plan.
On peut chercher un vecteur orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1).$$

On cherche $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ tel que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
On peut poser $c = 1$ par exemple (le vecteur $\overrightarrow{w}$ est choisit à un rapport de proportionnalité près. Choisir l'une des coordonnées, revient à fixer ce rapport de proportionnalité. Par contre, il faut faire attention, car on ne peut pas toujours prendre n'importe quoi pour cette constante, par exemple $c = 0$ ne donne pas de solutions non nulles).
On doit donc avoir

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w} & = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{w} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -b + 1 & = 0 \\ a + 1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b & = 1 \\ a & = -1 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{w} = (-1, 1, 1)$ convient comme vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} : \quad -(x - 0) + (y - 2) + (z + 1) = 0$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{P} : \quad -x + y + z - 1 = 0.$$