Espaces vectoriels

« Sachez seulement qu'il n'y a pas que des nombres...
il y a aussi des grandeurs, des sommes, il y a des groupes, il y a des tas,
des tas de choses telles que les prunes, les wagons, les oies, les pépins... »
La Leçon, Ionesco

Si depuis votre plus jeune âge vous avez toujours voulu ajouter les choux et les carottes, les courgettes et les aubergines ou mélanger torchons et serviettes, alors ce chapitre est fait pour vous !

Nous nous contenterons d'y réaliser ce travail d'épicier, et pour lui conférer de la superbe, nous y mélangerons des x, y, quantificateurs et autres formules mathématiques propres à impressionner la galerie. Mais derrière tout cela, il ne faudra pas oublier la simplicité dérisoire des objets que nous manipulons : carottes et courgettes. Au menu : la composition d'un beau panier de courses que l'on tâchera de mener au bout sans le transformer en bouillie ; nos outils mathématiques ne vont pas jusqu'à l'art culinaire de la mixture informe.

À l'instar de Monsieur Jourdain, j'espère que vous pourrez bientôt clamer :

« Par ma foi ! il y a plus de dix-huit ans que je manipule les espaces vectoriels sans que j'en susse rien, et je vous suis le plus obligé du monde de m'avoir appris cela. »

Notation : Dans tous ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Approche intuitive

Avant de donner toutes les définitions formelles, tâchons de comprendre « avec les mains » ce qu'est un espace vectoriel.

Un premier espace vectoriel :
Comme dit en préambule, le principe de l'espace vectoriel est de constituer des paniers d'objets sans trop les écraser l'un contre l'autre. Commençons par un panier composé exclusivement de courgettes et d'aubergines :

On note E l'ensemble des paniers composés exclusivement de courgettes et d'aubergines.

Ainsi, le panier $p_1 =$ « 3 courgettes et 5 aubergines » est un élément de E.

Opérations : certaines opérations entre paniers sont naturelles et ne demandent aucun effort d'abstraction.

- **Addition 'interne' :**

  Si $p_2 =$ « 1 courgette », alors $p_1 + p_2 =$ « 4 courgettes et 5 aubergines ».

- **Produit 'externe' par un scalaire** (un nombre) **:**

  $2\,p_1 =$ « 6 courgettes et 10 aubergines ».

Enfin, si on combine les deux opérations, cela forme une **combinaison linéaire**.

$2p_1 - 3p_2 =$ « 3 courgettes et 10 aubergines ».

Cependant, on voit qu'on arrive rapidement à un problème :

$p_1 - 4p_2 =$ « -1 courgette et 5 aubergines ».

Ici, la quantité de courgettes devient négative : ce sont exactement les difficultés que nous avions rencontré lors de la construction de $\mathbf{R}$ (voir le chapitre sur les nombres réels). Alors cette fois-ci, évitons de jeter Hippase de Métaponte par dessus bord, et autorisons nous directement les paniers avec des quantités négatives, fractionnaires et même irrationnelles de courgettes et d'aubergines.
Dans notre super-magasin, on pourra donc commander des paniers du type :

$p_3 =$ « $3\sqrt{2}$ courgettes et $-\dfrac{\pi}{4}$ aubergines ».

Par contre, nous éviterons de multiplier ou de diviser deux paniers entre eux, ce qui n'aurait pas beaucoup de sens.

Une base pour se reposer :
C'est magnifique, on a réussi à ajouter nos courgettes et aubergines. Mais, au bout de quelques lignes, vous serez vite fatigués d'écrire à chaque fois le mot « courgette », et le mot « aubergine » et vous commencerez à utiliser des abréviations.
Peu à peu, l'écriture du premier panier se transformera :

$$p_1 = \text{ « 3 courgettes et 5 aubergines » } \qquad \to \qquad p_1 = 3\,c + 5\,a.$$

On y est ! Vous avez défini une base.
Si on note $c =$ « courgettes » et $a =$ « aubergines », alors tout panier de course s'écrit *de manière unique* sous la forme :

$$p = \lambda c + \mu a\ , \quad \text{avec} \ \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

λ désigne la quantité de courgettes et μ la quantité d'aubergines.

On dit que $\mathscr{B} = (c, a)$ forme une **base** de E :

> Tout panier s'écrit de manière unique comme **combinaison linéaire** des éléments de la **base** : c et a.

Si la base $\mathscr{B}$ a été clairement définie, alors on peut identifier chaque panier à un unique tableau en colonne (on parle de matrice colonne) noté $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
La première coordonnée désigne le nombre de « c », et la deuxième, le nombre de « a ».

Toutes les opérations sur les paniers se réalisent alors à l'aide des matrices colonne, coefficient par coefficient : $2p_1 - 3p_2$ s'obtient en réalisant l'opération

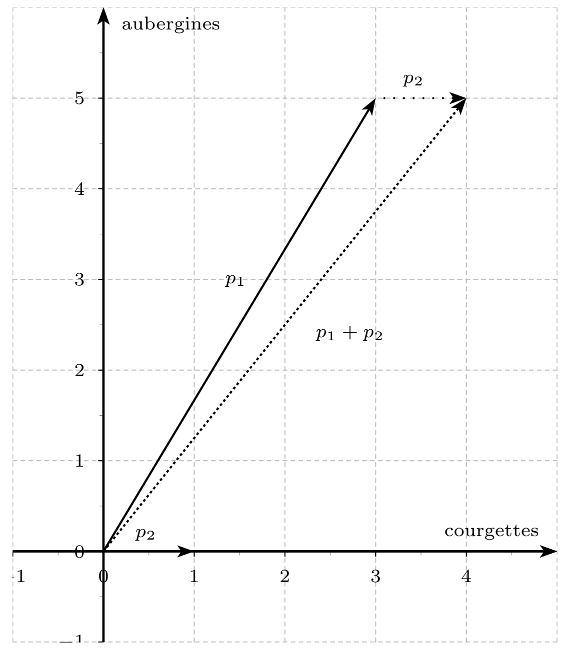
$$2 \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Changement de base :
L'écriture sous cette forme nécessite d'avoir précisé la base auparavant. En effet, le choix de la base n'est pas unique.

- Par exemple, on peut choisir la base $\mathscr{B}' = (a, c)$, (échange l'ordre entre les courgettes et aubergines) et alors p_1 s'écrit $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(p_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- On peut aussi inventer des bases plus exotiques :
  avec $\mathscr{B}'' = (c, a - c)$, le panier s'écrit $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}''}(p_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Il est important de s'assurer que $\mathscr{B}''$ est une base : c'est-à-dire que l'on peut représenter tout panier comme *combinaison linéaire* des éléments de cette base, et que ces paniers n'ont qu'une seule écriture possible dans cette base. Ici, c'est trivial, mais cela sera un vrai sujet dans ce chapitre.

Représentation géométrique :
En se plaçant dans la base $\mathscr{B}$, on peut représenter tout panier par un *vecteur* de $\mathbf{R}^2$ (le terme espace « vectoriel » n'est pas anodin : c'est la généralisation des vecteurs vus en géométrie au lycée).
Ainsi, les paniers peuvent être représentés dans le plan, avec le nombre de courgettes en abscisse et le nombre d'aubergines en ordonnée. Si on change de base, cela revient à changer de repère.
Mais surtout, les opérations entre les paniers correspondent exactement aux opérations sur les vecteurs.



Passons maintenant à la formalisation mathématique de ces idées.

2 Structure d'espace vectoriel

Cette section est plus formelle et peut être sautée en première lecture.

Définition 2.1 *(Espace vectoriel)*

Un ensemble E muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. **loi interne « + » :** $(E,+)$ est un *groupe commutatif* (ou abélien), c'est-à-dire :
   (a) $+$ est une loi *interne* : $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y \in E$,
   (b) $+$ est *associative* : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$,
   (c) $+$ est *commutative* : $\forall (x,y) \in E^2$, $x+y=y+x$,
   (d) $+$ admet un élément neutre noté 0_E : $\forall x \in E$, $x+0_E = x$,
   (e) tout élément de E admet un symétrique pour la loi $+$:
   $\forall x \in E$, $\exists y = (-x) \in E$, tel que $x+(-x) = 0_E$,
   $(-x)$ est appelé l'**opposé** de u.
2. **loi externe « $\cdot$ » :** produit avec un scalaire
   (a) $\cdot$ est une loi de $\mathbf{K} \times E$ dans E,
   (b) $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$,
   (c) (distributivité par rapport à l'addition de E)
   $$\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall (x,y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$$
   (d) (distributivité par rapport à l'addition de $\mathbf{K}$)
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall x \in E, \quad (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$$
   (e) (associativité mixte) $\quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2,\ \forall x \in E, \quad (\lambda \times \mu)\cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

Les éléments de $(E,+,\cdot)$ sont alors appelés **vecteurs**.
Les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés **scalaires**.
L'élément neutre 0_E de E s'appelle le **vecteur nul**.

Remarque sur le vocabulaire : On parle indifféremment de $\mathbf{K}$-espace vectoriel, ou d'espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.
Quand le choix de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est sous-entendu, on parle plus simplement d'espace vectoriel.
Remarques sur les notations :

- Dans la notation $\lambda \cdot x$, on omet souvent le point « $\cdot$ » pour écrire simplement λx.
- En géométrie, il est d'usage de noter les vecteurs en gras $\boldsymbol{x}$ ou avec une flèche $\overrightarrow{x}$ comme nous l'avons fait plus haut. Ici, on notera souvent les vecteurs de la même manière que les scalaires ce qui demande de redoubler de vigilance et de bien réfléchir à la nature de l'objet.
  Pour faciliter la lecture, on utilise plutôt les lettres latines (x, y, z, u, v, w, ...) pour les vecteurs et les lettres grecques (λ, μ, ...) pour les scalaires, mais il y a des exceptions.
- Formellement, un espace vectoriel n'est pas seulement un ensemble, mais un ensemble *muni* de deux opérations vérifiant les axiomes. La notation de l'espace vectoriel doit donc faire mention de ces trois éléments : $(E, +, \cdot)$. Cependant, il faut reconnaître que dans l'usage courant, on omet souvent les deux opérations lorsque ce sont les opérations « usuelles » sur l'ensemble considéré.

Explications

Toutes ces conditions de la définition sont naturelles avec les ensembles sur lesquels nous travaillons, mais la rigueur mathématique exige d'en faire la liste exhaustive pour définir proprement ce qu'est un espace vectoriel et éviter toute ambiguïté future.

1. **loi interne :**
   (a) La caractère interne est essentiel pour « *ne pas sortir de l'ensemble* » avec une opération.
   (b) L'associativité permet de s'affranchir des parenthèses : il n'y a pas d'ordre de priorité au sein de l'addition. Ainsi, on peut commencer par ajouter x et y puis ensuite z à droite ou au contraire, commencer à ajouter y et z puis ensuite x à gauche.
   (c) La commutativité ne doit pas être confondue avec l'associativité. L'associativité permet de ne pas utiliser les parenthèses, mais l'ordre d'*écriture* importe, c'est la raison pour laquelle nous précisions au point précédent si on ajoutait à droite ou à gauche. Avec la commutativité nous pouvons mélanger les termes : additionner à droite ou à gauche revient au même.
   (d) L'intérêt de l'élément neutre n'est pas immédiat. Pourquoi inventer un élément dont le rôle est justement de *ne rien faire* ? Mais ce n'est pas pour *rien* s'il a fallu attendre le XII$^{\text{ème}}$ siècle pour que le 0 soit pleinement accepté en Occident.
   En fait, le zéro devient important lorsqu'il ne s'agit plus seulement d'ajouter mais aussi de soustraire. C'est l'objet du point suivant.
   (e) Chaque élément admet un symétrique. Lorsque l'on ajoute à un élément son symétrique on retombe sur l'élément neutre. On parle d'opposé. L'existence d'un symétrique veut dire que l'on peut soustraire. Soustraire, c'est ajouter l'opposé[1]. C'est pour pouvoir définir cet opposé que nous avions besoin de l'élément neutre 0.
2. **loi externe :**
   (a) On définit une loi de $\mathbf{K} \times E$ dans E, car à partir d'un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ et d'un vecteur $x \in E$, on obtient un nouveau vecteur $\lambda \cdot x \in E$.
   $$\begin{cases} \mathbf{K} \times E & \to E \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}.$$
   (b) Si on multiplie le vecteur par 1, il ne faut pas qu'il soit modifié.
   (c) Si dans une caisse, on place un panier x et un panier y et qu'on prend λ caisses, alors, on obtient au total λx et λy : multiplier les objets séparément ou ensemble revient au même.

1. En fait, la soustraction en tant que telle n'a pas besoin d'être définie, c'est simplement l'ajout de l'opposé.

(d) Prendre 5 fois x, revient au même que de prendre 3 fois x, puis encore 2 fois x.

(e) Prendre 15 fois x est la même chose que prendre 5 fois x et de multiplier le tout par 3.

Exemple

Montrer que l'élément neutre est défini de manière unique.

Solution :

Supposons qu'il existe deux éléments neutres 0 et e.
Alors $e = e + 0_E = 0_E$, d'où l'unicité.

Exemple

Montrer que $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$, muni des opérations usuelles est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Solution :

1. - La somme de deux suites est une suite.
   - La somme est associative et commutative sur les suites (car elle l'est sur $\mathbf{K}$ et les opérations s'effectuent terme à terme).
   - La suite nulle est dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et elle correspond à l'élément neutre pour $+$.
   - Toute suite admet un opposé (la suite des opposés).

   $\rightarrow (\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +)$ est un groupe abélien.
2. - Le produit d'une suite et d'un scalaire est une suite.
   - Pour tout $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $1 \cdot u = u$ (produit terme à terme).
   - Le produit est distributif par rapport à la somme entre suite (car il est distributif par rapport à la somme dans $\mathbf{K}$ et que les opérations se font terme à terme).
   - Le produit est distributif par rapport à la somme dans $\mathbf{K}$ (idem).
   - Et on a l'associativité mixte.

$\rightarrow (\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Propriété 2.2

Un espace vectoriel est toujours **non vide** : il contient le vecteur nul.

Théorème 2.3 *(Règles de calcul)*

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Si $\lambda \in \mathbf{K}$, et $x \in E$ alors

1. $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
2. L'opposé de x est unique. On le note $-x$.
3. L'opposé de x est égal à $(-1) \cdot x$.

Preuve

1. (sens réciproque)
   - Si $\lambda = 0$, $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$,
     On ajoute de part et d'autre de l'égalité l'opposé de $0 \cdot x$ et on obtient : $0_E = 0 \cdot x$.
   - Si $x = 0_E$, $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$.
     Si on ajoute de part et d'autre de l'égalité l'opposé de $\lambda \cdot 0_E$, on trouve $0_E = \lambda \cdot 0_E$.

   (sens direct)
   Si $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors on peut multiplier par $\frac{1}{\lambda}$.
   À gauche, on trouve $\left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = 1 \cdot x = x$.
   Et à droite, $\frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ d'après la réciproque montrée plus haut. Donc $x = 0_E$.
   Ainsi $\lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
2. Unicité du symétrique dans un groupe.
   Si y et z sont deux opposés de x, alors
   $$\begin{aligned} y &= 0_E + y = (z + x) + y \\ &= z + (x + y) \quad \text{par associativité} \\ &= z + 0_E = z. \end{aligned}$$
3. $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$.
   Donc $(-1) \cdot x$ est l'opposé de x.

■

Remarque : Il ne faut par confondre 0_E l'élément nul de l'espace vectoriel avec le nombre 0. 0_E et 0 sont des objets de nature différente :

- 0_E désigne un vecteur (un couple, une application, un n-uplet... on pourrait mettre une flèche au dessus).
- 0 est un nombre réel.

3 Combinaison linéaire

Dans l'approche intuitive, nous avons vu que l'intérêt de l'espace vectoriel était de pouvoir faire des *combinaisons linéaires* entre les vecteurs.
Par exemple, $2p_1 - 3p_2$ avec l'exemple d'introduction.
Cette notion est essentielle pour les espaces vectoriels car ils ont été construits *pour* faire des combinaisons linéaires.

Définition 3.1 *(Combinaison linéaire)*

Si E est un *espace vectoriel* sur $\mathbf{K}$, alors on appelle **combinaison linéaire** de E toute somme *finie* de la forme
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k$$
où $x_1, x_2, \cdots, x_n$ représentent un nombre **fini** de vecteurs
et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont des nombres de $\mathbf{K}$ (**scalaires**).

Explications

Dans notre exemple introductif, les vecteurs x_1, x_2... sont les paniers p_1, p_2...

Théorème 3.2 *(Propriété essentielle)*

Un espace vectoriel est *stable* par combinaison linéaire.
C'est-à-dire que toute combinaison linéaire de vecteurs de l'espace est encore un vecteur de l'espace.

Explications

C'est **la** propriété essentielle des espaces vectoriels : celle qui nous intéressait dans notre exemple initial. Les espaces vectoriels sont conçus pour pouvoir réaliser des combinaisons linéaires (additions et produit externe). Dans le théorème 4.1, nous verrons que cette notion suffit *presque* pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Preuve

Idée : faire une récurrence sur le nombre n d'éléments de la somme et couper celle-ci en deux pour l'hérédité.

Initialisation : pour $n = 0$, si la somme est vide, alors elle est nulle.
Or E contient le vecteur nul. L'initialisation est donc vraie.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour toute combinaison linéaire à n éléments et on le montre pour $n+1$ éléments.
Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{K}^{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \qquad \text{(associativité)}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in E$.

De plus, $\lambda_{n+1} \in \mathbf{K}$ et $x_{n+1} \in E$,
donc par propriété sur le produit externe $\lambda_{n+1} x_{n+1} \in E$.

Et la somme de deux éléments de E est un élément de E, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in E$.

D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai pour toute combinaison linéaire. ∎

Exemple *(À connaître)*

- Le plan $\mathbf{R}^2$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* du plan représentés par des couples.
- L'espace $\mathbf{R}^3$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* de l'espace représentés par des triplets.
- L'espace $\mathbf{R}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes réels $\mathbf{R}[X]$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes réels de degré inférieurs ou égaux à n : $\mathbf{R}_n[X]$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des matrices à coefficients réels de taille fixée forme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
- L'ensemble des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- Pour Ω un ensemble, l'ensemble des application de Ω dans $\mathbf{R}$ forme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
- L'espace $\mathbf{C}^n$ des n-uplets sur $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.
- L'ensemble des polynômes complexes $\mathbf{C}[X]$ forme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbf{C}_n[X]$ forme un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des matrices à coefficients complexes de taille fixée forme un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

Les opérations sont sous-entendues : ce sont les opérations usuelles sur ces ensembles.

Définition 3.3 *(Famille presque nulle)*

Soit I un ensemble non vide quelconque, et soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^I$.
On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est **presque nulle** (ou **à support fini**) si tous ses éléments sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux.
On notera $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de $\mathbf{K}^I$ (notation non officielle).

Explications

La notion de famille presque nulle généralise celle de suite stationnaire à 0 qui avait été utilisée pour les polynômes.
La seule différence est que l'ensemble des indices est ici quelconque.

Définition 3.4 *(Combinaison linéaire)*

Soit $X = \{x_i\}_{i\in I}$ une partie de E.
Une **combinaison linéaire** de X est un vecteur qui s'écrit $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ où la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est **presque nulle.**

Explications

Cette définition généralise celle vue plus haut en admettant que la famille X ait un nombre quelconque (non nécessairement fini) de vecteur. Par contre, dans la somme, il ne doit en intervenir qu'un nombre *fini* d'entre eux pour pouvoir parler de combinaison linéaire.

Exemple

$\mathbf{K}[X]$ est constitué de l'ensemble des combinaisons linéaires de $\left\{X^k\right\}_{k\in\mathbf{N}}$.
Le caractère fini de la somme correspond à la stationnarité à 0 de la suite.

4 Sous espaces vectoriels

Démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel peut s'avérer très long si l'on en croit tous les axiomes à vérifier. Cependant, une fois que les espaces vectoriels de référence sont connus, on ne fera plus appel à la définition d'un espace vectoriel (sauf cas très exotique).
Nous allons voir en effet, la notion de sous-espace vectoriel, qui permet de montrer très facilement qu'un ensemble est un espace vectoriel, à condition de le considérer comme le sous-ensemble d'un espace vectoriel connu.
Comme cela avait été mentionné plus haut, cette caractérisation s'appuie sur la propriété essentielle (3.2) : un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire.

A Caractérisation

Théorème 4.1 *(Caractérisation des sous espaces vectoriels)*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$,
F est un **sous espace vectoriel** de E s'il vérifie l'**une** des trois propriétés équivalentes suivantes :

- F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- $\begin{cases} 0_E \in F, \\ \forall (x,y) \in F^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad x+\lambda y \in F. \end{cases}$
- $\begin{cases} 0_E \in F, \\ \forall (x,y) \in F^2, \quad x+y \in F, \\ \forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lambda x \in F. \end{cases}$

Remarque : on peut remplacer la condition $0_E \in F$ par $F \neq \emptyset$.

Preuve

L'équivalence des trois formulations est immédiate. Nous ne la prouvons donc pas ici. Par contre, nous montrons que la deuxième formulation (par exemple) permet bien de caractériser les sous espaces vectoriels.

Tout d'abord un sous espace vectoriel vérifie toujours cette condition (propriétés 2.2 et 3.2).
Réciproquement, supposons qu'un sous-ensemble F de E vérifie cette condition, et montrons que c'est un sous espace vectoriel de E.

1. « + » est une loi interne en prenant $\lambda = 1$.
2. « + » est associative et commutative car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. En prenant $\lambda = -1$, chaque élément admet un symétrique pour « + ».
4. $0_E \in F$ par hypothèse (si on remplace la condition par $F \neq \emptyset$, alors, on a $0 \cdot x = 0_E$, donc $0_E \in F$).
5. La loi externe est à valeurs dans F (en prenant $x = 0_E$).
6. « $\cdot$ » est distributive par rapport à « + » suivant la loi interne et la loi externe car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
7. $\forall x \in E$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, $1 \cdot x = x$ et $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ car E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Donc F est un espace vectoriel. ■

Exemple

$\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

Exemple

Montrer que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels.

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x+y+z=0\right\}$.
- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x=3y=-2z\right\}$.

Solution :
Il y a toujours trois choses à vérifier :

1. L'ensemble est inclus dans un espace vectoriel « connu ».
2. L'ensemble est non vide (on montre qu'il contient le vecteur nul).
3. L'ensemble est stable par combinaison linéaire (se montre en une ou deux étapes au choix).

Faisons la preuve pour les ensembles donnés en exemple :
⚠ Ici x, y, z désignent des coordonnées et non des vecteurs. Les vecteurs sont les triplets. On peut donc les noter plutôt u, v, w. Pour clarifier cela, nous mettrons exceptionnellement des flèches sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\cdots$

- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x+y+z=0\right\}$.
  1. $E \subset \mathbf{R}^3$ qui est un espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
  2. Pour $(x,y,z) = (0,0,0)$, on a $x+y+z = 0+0+0 = 0$.
     Donc le vecteur nul appartient à E.
  3. (en deux étapes)
     - Si $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in E$ et $\overrightarrow{v} = (x',y',z') \in E$, alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = (x+x', y+y', z+z')$.
       Or $(x+x')+(y+y')+(z+z') = (x+y+z)+(x'+y'+z') = 0+0 = 0$ (car $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$).
       Donc $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \in E$, ainsi E est stable par somme.
     - De plus, si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda\overrightarrow{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
       Or $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = \lambda \cdot 0 = 0$.
       Donc E est stable par produit avec un scalaire.

     Ainsi E est stable par combinaison linéaire.

  Donc E est un espace vectoriel.
- $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \text{ tel que } x=3y=-2z\right\}$.
  1. $E \subset \mathbf{R}^3$ qui est un espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
  2. Pour $(x,y,z) = (0,0,0)$, on a $0 = 3 \cdot 0 = -2 \cdot 0$.
     Donc le vecteur nul appartient à E.

3. (en une seule étape)
Si $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in E$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z') \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors,
$\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$.
Or $x + \lambda x' = 3y + \lambda \times 3y' = 3\,(y + \lambda y')$
et $x + \lambda x' = -2z + \lambda \times (-2)z' = -2\,(z + \lambda z')$
Donc $\overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v} \in E$, ainsi E est stable par combinaison linéaire.

Donc E est un espace vectoriel.

Méthode *(Montrer que E n'est pas un espace vectoriel)*

Pour montrer qu'un ensemble E n'est pas un espace vectoriel :

1. On teste si $0 \in E$.
2. Si c'est vérifié, alors on cherche des vecteurs et des scalaires pour construire une combinaison linéaire dont le résultat n'est pas dans E.

Exemple *(Contre-exemples)*

Montrer que les ensembles ci-dessous ne sont pas des espaces vectoriels (munis des opérations usuelles)

- Une droite affine du plan : pour $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$,
$E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ \text{tel que } y = ax + b\right\}$.
- Une demi-droite du plan de la forme $[0,\ A)$ avec O l'origine du repère, et A un autre point du plan (différent de l'origine).

Solution :

- $(0, 0) \notin E$, donc E n'est pas un espace vectoriel.
- Ici, le point $(0, 0) \in E$, donc il faut chercher un contre-exemple par combinaison linéaire.
Très simplement, on prend le vecteur symétrique d'un vecteur de E :
si $(x, y) \in E$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$, alors le point symétrique $-(x, y) \notin E$.
Donc E n'est pas un espace vectoriel.

Exemple

Soit $(a,\ b) \in \mathbf{K}^2$, on considère l'équation différentielle homogène

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Montrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel.
Solution :
On sait que l'ensemble des solutions est inclu dans $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$ qui est lui-même un espace vectoriel.
De plus, l'application nulle est solution.
De plus, si f et g sont deux solutions, et si $\lambda \in \mathbf{K}$, alors, par linéarité de la dérivation

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)'' + a(f + \lambda g)' + b(f + \lambda g) &= f'' + \lambda g'' + a(f' + \lambda g') + b(f + \lambda g)\\ &= f'' + af' + bf + \lambda(g'' + ag' + bg)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $f + \lambda g$ est aussi solution.
Ainsi, l'ensemble des solutions est non vide et stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$.

Exemple

On montre de même que les solutions de toute équation différentielle linéaire homogène (pas nécessairement à coefficients constants) est un espace vectoriel.
Et que l'ensemble des solutions des suites récurrentes linéaires homogènes forme aussi un espace vectoriel.

Exemple

L'ensemble des familles presque nulles indicées par I est-il un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ?

Solution :

- C'est un sous-ensemble de $\mathbf{K}^I$ qui est un espace vectoriel.
- La somme de deux suite presque nulles est encore presque nulle.
En effet, si on note (λ_i) la première famille, et (μ_i) la seconde.
On peut considérer $\Lambda = \{i \in I,\ \lambda_i \neq 0\}$ et $M = \{i \in I,\ \mu_i \neq 0\}$.
On note $N = \{i \in I,\ \lambda_i + \mu_i \neq 0\}$, alors $N \subset \Lambda \cup M$ qui sont deux ensembles finis, donc N est lui-même fini.
- La produit d'une suite stationnaire à 0 avec un scalaire est encore stationnaire à 0.
(si le scalaire est nul, alors tous les coefficients sont nuls, sinon le nombre de termes non nuls est le même).

Donc $\mathbf{K}^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^I$.

B Intersection d'espaces vectoriels

Théorème 4.2 *(Intersection de deux espaces vectoriels)*

Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.

Preuve

- $F \cap G \subset F$, il suffit donc de montrer que $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de F.
- $0_E \in F \cap G$ (car $0_E \in F$ et $0_E \in G$: ce sont des espaces vectoriels),
- $\forall (x, y) \in F \cap G, \forall \lambda \in \mathbf{K}$,
or $(x, y) \in F^2$, donc $x + \lambda y \in F$ car F est un espace vectoriel.
et $(x, y) \in G^2$, donc $x + \lambda y \in G$ car G est un espace vectoriel.
Donc $x + \lambda y \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un espace vectoriel. ■

Exemple

L'intersection de deux plans vectoriels (non confondus) dans l'espace forme une droite vectorielle.

Théorème 4.3 *(Intersection)*

Toute intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Remarque : C'est vrai pour l'intersection d'un nombre quelconque d'espaces vectoriels.

Preuve

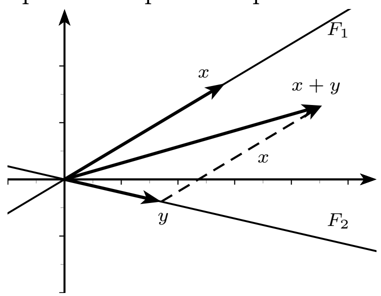
C'est la même preuve que pour 2 espaces. ∎

⚠ En général l'union de deux espaces vectoriels $E \cup F$ **n'est pas** un espace vectoriel.

Exemple

L'union de deux droites non confondues du plan n'est pas un espace vectoriel.

Sur la figure ci-contre,
Si on note F_1 la première droite et F_2 la seconde droite.
$x \in F_1$, donc $x \in F_1 \cup F_2$
$y \in F_2$, donc $y \in F_1 \cup F_2$,
mais $x+y \notin F_1$, $x+y \notin F_2$,
donc $x+y \notin F_1 \cup F_2$.



Explications

En général, les structures « passent très bien » à l'intersection et mal à l'union.
Cela se comprend aisément : faire l'intersection de deux ensembles, c'est cumuler les conditions de chacun : si $x \in E \cap F$, alors x vérifie *à la fois* les conditions de E et celles de F. C'est une notion très restrictive : on trie les candidats sur le volet.
En revanche, les structures passent moins bien à l'union, car dans l'union, il suffit de ne vérifier que l'une *ou* l'autre des conditions d'appartenance : c'est beaucoup moins rigide.
Cette idée n'est pas spécifique aux espaces vectoriels : par exemple, l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle (éventuellement vide), par contre, l'union n'en est pas un (sauf cas particulier).

C Produit cartésien

À présent que l'on sait ce qu'est un espace vectoriel, nous allons essayer de mélanger plusieurs espaces entre eux.
Par exemple, si un espace E correspond aux paniers de courgettes et d'aubergines et un autre espace F aux paniers de tomates et de carottes, on peut créer un nouvel espace $E \times F$ qui correspond aux paniers qui contiennent courgettes, aubergines, tomates et carottes !
De cette façon, à partir d'espaces vectoriels très simples, on pourra en construire de plus en plus gros par ajouts successifs d'information.

Théorème 4.4 *(Produit cartésien - notations simplifiées)*

Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$, deux $\mathbf{K}$-espace vectoriels.
On peut munir $E \times F$ d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel avec les opérations :

$$\begin{aligned} &\forall (x,x') \in E^2 \quad \text{et} \quad \forall (y,y') \in F^2, && (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y'), \\ &\forall (x,y) \in E \times F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, && \lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y). \end{aligned}$$

$(E \times F, +, \cdot)$ est appelé l'**espace produit**.

Remarque : Ici, nous avons noté tous les « + » et les « $\cdot$ » de la même façon, quelque soit l'espace considéré. C'est un abus de langage.
En effet, même si les lois sont identiques sur E et F (ce qui n'est pas nécessairement le cas), la loi sur l'espace produit est définie différemment et il faudrait une nouvelle notation.
En toute généralité, il faut donc rédiger ainsi le théorème :

Théorème 4.5 *(Notations rigoureuses)*

Soient $(E,\hat{+},\hat{\cdot})$ et $(F,\bar{+},\bar{\cdot})$, deux $\mathbf{K}$-espace vectoriels.
On peut munir $E \times F$ d'une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel par

$$\begin{aligned} &\forall (x,x') \in E^2 \quad \text{et} \quad \forall (y,y') \in F^2, && (x,y)+(x',y') = (x\hat{+}x', y\bar{+}y'), \\ &\forall (x,y) \in E \times F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, && \lambda \cdot (x,y) = (\lambda \hat{\cdot} x, \lambda \bar{\cdot} y). \end{aligned}$$

$(E \times F, +, .)$ est l'**espace produit**.

Remarque : On peut généraliser ces théorèmes avec le produit cartésien d'un nombre *fini* d'espaces vectoriels.

Exemple

En particulier pour montrer que $\mathbf{K}^2, \mathbf{K}^3, \cdots, \mathbf{K}^n$ sont des espaces vectoriels, il suffit de montrer que $\mathbf{K}$ en est un, ce qui est évident, puis on procède par produits cartésiens successifs[2] : $\mathbf{K}^{n+1} = \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}$.

Corollaire 4.6

L'ensemble des n-uplets sur $\mathbf{K}$, $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ forme un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, avec

- « + » défini par $\quad (a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, .., b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$,
- « $\cdot$ » défini par $\quad \lambda \cdot (a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$.

Dans la suite du cours, et sauf mention contraire, E désignera un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

2. Le signe = qui suit est un peu abusif, mais nous l'admettrons ainsi.

5 Espace engendré

L'objet de cette section est de trouver une méthode pour décrire un espace vectoriel sans avoir besoin de lister tous les éléments de l'espace (il y en a une infinité).
Si on reprend l'exemple du préambule, nous avions naturellement décrit l'espace comme l'ensemble des paniers constitués de courgettes et d'aubergines. C'est une façon simple de décrire cet espace.
Nous allons introduire une notation mathématique pour traduire cette idée :

$$\text{Vect}\,(\text{« courgettes »}, \text{« aubergines »})$$

désigne tous les paniers que l'on peut composer avec des courgettes et des aubergines.
Par contre, cette description n'est pas unique, et on peut décrire le même espace avec Vect (« courgettes », « aubergines », « 5 aubergines »).

Géométriquement, on peut décrire une droite vectorielle par un vecteur directeur non nul $\overrightarrow{u}$. On la note Vect $(\overrightarrow{u})$ et elle est composée de tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$.
De même, le plan engendré par les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté Vect $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, ce sont tous les vecteurs que l'on peut écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

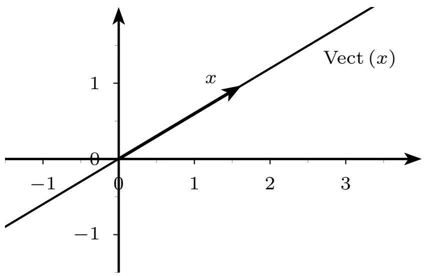
Définition 5.1 *(Sous espace vectoriel engendré)*

Soit E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
On appelle sous espace vectoriel de E **engendré** par $(x_i)_{i\in I}$ le sous espace vectoriel de E composé des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i\in I}$.
On note

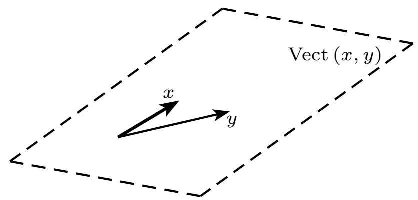
$$\text{Vect}\,(x_i)_{i\in I} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i\, x_i, \text{ pour } (\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)} \text{ une famille presque nulle} \right\}.$$

Exemple

- L'espace vectoriel engendré par un vecteur x : $\text{Vect}\,(x) = \mathbf{K}x$ est la droite vectorielle de vecteur directeur x (et qui passe par 0_E).
Par exemple, dans le plan réel :



- Espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires u, v :
$\text{Vect}\,(x, y) = \left\{\lambda x + \mu y,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2\right\}$ est le plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.



- $\text{Vect}\,\left(X^k\right)_{k\in\mathbf{N}} = \mathbf{R}[X]$.

- $\text{Vect}\,(1, X) = \mathbf{R}_1[X]$: tous les polynômes qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de 1 et de X : $a_0 + a_1 X$.

Explications

On voit que la description de l'espace avec une famille génératrice $(x_i)_{i\in I}$, correspond à la description paramétrique vue en géométrie.

Définition 5.2 *(Sous-espace vectoriel engendré par une partie)*

Soit E un espace vectoriel, et $\mathscr{F}$ une partie de E.
On appelle sous espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$, le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{F}$.
On note $\text{Vect}\,(\mathscr{F})$.

Le plus petit est entendu de le sens de la relation d'ordre donnée par l'inclusion. Il faudra démontrer que cette définition a un sens, c'est-à-dire que ce plus petit élément existe. Pour cela, on s'aide de la caractérisation suivante :

Propriété 5.3 *(Caractérisation)*

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} \in E$.
$\text{Vect}\,(\mathscr{F})$ est égal à l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathscr{F}$.

Preuve

L'ensemble des sous-espace vectoriels qui contiennent F est non vide, car E en fait partie. Leur intersection est également un sous-espace vectoriel de E (voir théorème 4.3) et elle contient F.
S'il existe un sous-espace vectoriel de E qui contient F, alors, il fait partie de l'intersection, donc il est plus grand (au sens de l'inclusion) que l'intersection. La définition et la caractérisation sont donc démontrées. ■

Propriété 5.4

Soit $\mathscr{F}$ une partie d'un espace vectoriel E.
Tout sous espace vectoriel qui contient $\mathscr{F}$, contient $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$.
Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ sont deux parties de E, alors $\mathrm{Vect}\,(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathscr{G})$.

Preuve

C'est une conséquence directe de la définition. ■

Théorème 5.5

Le sous espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est égal au sous espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i\}_{i\in I}$.

$$\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} = \mathrm{Vect}\,\left(\{x_i\}_{i\in I}\right).$$

Explications

En d'autres termes, l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires des x_i est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient tous les x_i.

Preuve

Cette preuve est très simple, les difficultés viennent des notations qui sont proches et qu'il faut bien comprendre.
Si vous comprenez et êtes capable de refaire cette preuve, c'est certainement que la notion d'espace vectoriel engendré est comprise, sinon...

Si F est un espace vectoriel qui contient les x_i, alors il contient toutes leur combinaisons linéaires (puisqu'il est stable par combinaisons linéaires).
Donc cet espace F contient $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$
Ainsi, $\mathrm{Vect}\,\left(\{x_i\}_{i\in I}\right)$ qui contient tous les x_i, contient $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$:

$$\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} \subset \mathrm{Vect}\,\left(\{x_i\}_{i\in I}\right).$$

Or $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$ par définition, donc

$$\mathrm{Vect}\,\left(\{x_i\}_{i\in I}\right) \subset \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$$

(car $\mathrm{Vect}\,(\{x_i\})_{i\in I}$ est inclus dans tout espace qui contient les x_i : c'est le plus petit)
Donc par double inclusion :

$$\mathrm{Vect}\,\left(\{x_i\}_{i\in I}\right) = \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}.$$

■

6 Sommes d'espaces vectoriels

A Somme de deux espaces

Définition 6.1 *(Somme)*

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E,
la **somme** de F et de G est définie par

$$F + G = \left\{x_F + x_G, \quad (x_F, x_G) \in F \times G\right\}.$$

La caractérisation suivante donne une vision géométrique de la somme de deux espaces : c'est le plus petit espace vectoriel qui les contient tous les deux.
La somme est donc la notion qui remplace l'union pour les espaces vectoriels.

Exemple

Si F et G sont deux droites vectorielles non confondues, alors $F + G$ est le plus petit espace vectoriel qui contient ces deux droites : c'est le plan engendré par ces deux droites.

Voyons-le de façon formelle :

Propriété 6.2 *(Caractérisation de la somme)*

Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E.

1. $F + G$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de F et de G.

$$F + G = \left\{\lambda x_F + \mu x_G, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \ (x_F, x_G) \in F \times G\right\}.$$

2. $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $F \cup G$:

$$F + G = \mathrm{Vect}\,(F \cup G).$$

Preuve

1. On note $\mathscr{E} = \left\{\lambda x_F + \mu x_G, \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, (x_F, x_G) \in F \times G\right\}$
L'ensemble $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de E (vérification immédiate car la stabilité par combinaisons linaires est intégrante de sa définition).
On montre ensuite l'égalité par double inclusion.
$\forall x_F + x_G \in F + G, x \in \mathscr{E}$ (avec $\lambda = 1$ et $\mu = 1$).
Donc $F + G \subset \mathscr{E}$.
Réciproquement, si $x \in \mathscr{E}$, on l'écrit $\lambda x_F + \mu x_G = x'_F + x'_G$ avec $x'_F = \lambda x_F \in F$ et $x'_G = \mu x_G \in G$.
Donc $x \in F + G$, ainsi $\mathscr{E} \subset F + G$.
Par double inclusion : $\mathscr{E} = F + G$.
2. Le point précédent montre en particulier que $F + G$ est un espace vectoriel.
C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de F et de G : c'est donc l'espace vectoriel engendré par leur union.

■

Définition 6.3 *(Somme directe)*

On dit que F et G sont en **somme directe** si tout élément de $F+G$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.
On note
$$F \oplus G.$$

Exemple

- Deux droites vectorielles non confondues du plan ou de l'espace sont en somme directe.
- Un plan vectoriel et une droite vectorielle non incluse dans ce plan sont en somme directe.

Propriété 6.4 *(Caractérisation de la somme directe)*

Deux espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Preuve

(sens direct) $0 \in F$ et $0 \in G$ car F et G sont des espaces vectoriels, donc $0 \in F \cap G$.
Si $x \in F \cap G$ alors $x = x_F + 0 = 0 + x_G$. La décomposition est supposée unique, donc $x = x_F = 0$.
(sens réciproque) Soit $x \in F+G$, tel que $x = x_F + x_G = x'_F + x'_G$ avec $(x_F, x'_F) \in F^2$ et $(x_G, x'_G) \in G^2$.
Alors $\underbrace{x_F - x'_F}_{\in F} = \underbrace{x'_G - x_G}_{\in G}$. Or $F \cap G = \{0\}$, donc $x_F - x'_F = x'_G - x_G = 0$.
Ainsi la décomposition de x est unique et $F + G = F \oplus G$. ■

Définition 6.5 *(Espaces supplémentaires)*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si
$$E = F \oplus G.$$
G est alors **un** supplémentaire de F dans E.

⚠

- Le supplémentaire n'est **pas** unique.
- Un supplémentaire n'est pas le complémentaire (le complémentaire ne contient pas 0, ce n'est donc pas un espace vectoriel).
  En particulier,
  $$x \in F \oplus G \text{ et } x \notin F \not\Rightarrow x \in G.$$

Exemple

- Pour une droite vectorielle (d) du plan, toute droite vectorielle (d') non confondue avec (d) lui est supplémentaire dans le plan.
- Un plan vectoriel et une droite vectorielle qui lui est non incluse dans l'espace sont supplémentaires.
- $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.

Exemple

Soit E l'ensemble des suites convergentes sur $\mathbf{R}$. F est l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Trouver un supplémentaire de F dans E.
Solution :
On montre facilement que l'ensemble des suites constantes convient.

Théorème 6.6 *(Caractérisation des espaces supplémentaires)*

Deux espaces F et G sont supplémentaires dans E, si et seulement si
$$\begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}.$$

Remarque : C'est en général ce théorème que l'on utilise pour montrer que deux espaces sont en somme directe.

7 Familles de vecteurs

A Familles libres et liées

Nous avons vu comment engendrer un espace vectoriel par une famille de vecteurs. Mais parfois, la famille contient des informations redondantes : par exemple $\mathrm{Vect}\,(x,\, 2x) = \mathrm{Vect}\,(x)$. En effet, $\mathrm{Vect}\,(x,\, 2x)$ est exactement la droite engendrée par x : ici, l'ajout dans la famille du vecteur $2x$ n'apporte aucune information supplémentaire (car il est colinéaire à x).
Le but de cette section est analyser l'information portée par une famille de vecteurs :

- Lorsque tous les vecteurs de la famille sont *indispensables* et apportent chacun une information nouvelle, alors on dira que la famille est **libre**.
- A contrario, si certains vecteurs de la famille sont *superflus* et n'apportent aucune information supplémentaire, alors, la famille sera dite **liée** : on peut lui retirer un certain nombre de vecteurs sans modifier l'espace qu'elle engendre.

La famille $(x,\, 2x)$ est liée : on peut supprimer l'un des deux vecteurs sans que cela change l'espace engendré. Par contre, si $x \neq 0$, alors la famille composée du seul vecteur x est libre : si on enlève le vecteur, l'espace engendré est $\{0\}$ et non plus la droite.
On cherchera autant que possible à travailler avec des familles libres pour éviter les informations redondantes.

Définition 7.1 *(Famille libre et famille liée)*

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille est **liée**, si un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
- On dit que la famille est **libre** si elle n'est pas liée. Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Définition 7.2 *(Partie libre-liée)*

Soit $X=\{x_i\}_{i\in I}$ une partie de E.
X est une **partie libre** de E si, et seulement si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre dans E.
Sinon, la partie est liée.

Exemple

Deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas colinéaires.
Trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$ forment une famille libre s'ils ne sont pas coplanaires.

Exemple

Deux vecteurs forment une famille libre si, et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.

Exemple

Dans $E=\mathbf{R}^3$, on définit les vecteurs $u=(2,3,5)$, $v=(3,4,0)$ et $w=(5,7,5)$.
Montrer que la famille (u,v,w) est liée, mais que la famille (u,v) est libre.
Solution :
On remarque que $w=u+v$, ainsi w peut s'écrire comme combinaison linéaire de u et de v. La famille est donc liée.
Par contre, u et v ne sont pas colinéaires et ils forment donc une famille libre.

Théorème 7.3 *(Caractérisation des familles liées et libres)*

$(x_i)_{i\in I}$ est une **famille libre** si et seulement si

$$\forall(\lambda_i)\in\mathbf{K}^{(I)},\quad \sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0_E \quad\Rightarrow\quad \forall i\in I,\ \lambda_i=0.$$

$(x_i)_{i\in I}$ est une **famille liée**, si et seulement si

il existe $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbf{K}^{(I)}$ **non tous nuls** tel que $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0_E$.

Remarque : pour la famille libre, on a même l'équivalence, mais la réciproque n'apporte rien car elle est toujours vraie.

Preuve

On prouve pour la famille liée. La famille libre est simplement sa négation.
(*sens direct*) Si la famille est liée, alors un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres. Par exemple $x_{i_0}=\sum_{i\neq i_0}\lambda_i x_i$.
Donc en posant $\lambda_{i_0}=-1$, on trouve $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$ et les λ_i sont non tous nuls.

(*sens réciproque*) Soient $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbf{K}^{(I)}$ non tous nuls tels que $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0_E$.

Il existe donc un λ_{i_0} non nul et on peut écrire $x_{i_0}=\sum_{i\neq i_0}-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}x_i$.

Donc x_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs : la famille est liée. ∎

Méthode

- Pour montrer qu'une famille $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ est **libre**,
  on suppose n scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ dans $\mathbf{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0$,
  et on montre que tous les λ_k sont nécessairement nuls.
- Pour montrer qu'une famille $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ est **liée**,
  on cherche une combinaison linéaire qui donne 0_E.

Idem pour une famille infinie, mais en prenant soin de prendre une famille de coefficients presque nulle.

Exemple *(méthode)*

Montrer que les trois vecteurs $u=(0,0,-1,1)$, $v=(0,9,-3,1)$ et $w=(2,5,8,0)$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^4$.
Solution :
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbf{R}^3$, on suppose que $\lambda_1u+\lambda_2v+\lambda_3w=0_{\mathbf{R}^4}$.
Ainsi :

$$\lambda_1(0,0,-1,1)+\lambda_2(0,9,-3,1)+\lambda_3(2,5,8,0)=(0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow(0\lambda_1+0\lambda_2+2\lambda_3,0\lambda_1+9\lambda_2+5\lambda_3,-\lambda_1-3\lambda_2+8\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+0\lambda_3)=(0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\lambda_1 & +0\lambda_2 & +2\lambda_3 & =0\\ 0\lambda_1 & +9\lambda_2 & +5\lambda_3 & =0\\ -\lambda_1 & -3\lambda_2 & +8\lambda_3 & =0\\ \lambda_1 & +\lambda_2 & +0\lambda_3 & =0\end{cases}$$

Le système a été obtenu en identifiant coordonnée par coordonnée dans le 4-uplet.
On voit qu'étudier la linéarité d'une famille de p vecteurs de $\mathbf{R}^n$ revient à résoudre un système linéaire homogène à p inconnues et n équations.
On sait que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ est toujours solution (le système est homogène). La question est de savoir si c'est la seule solution ou s'il y en a d'autres.

→ C'est la seule solution si et seulement si le système admet autant de pivots que d'inconnues, c'est-à-dire autant d'inconnues que de colonnes (nombre de vecteurs).

Ici, la matrice associée au système homogène est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que cette matrice peut être obtenue en plaçant les vecteurs u, v et w sous forme de colonne dans la matrice.
Ainsi, la famille est libre si et seulement si, la matrice ainsi obtenue admet autant de pivots que de colonnes : c'est ce que nous formalisons dans le théorème 7.4 qui suit.
Pour revenir à l'exercice présent, la solution est triviale :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ 5\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0 \\ 8\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ainsi la famille est libre.
Ici, le système est déjà sous forme échelonnée avec 3 pivots (quitte à changer l'ordre des lignes).

Il faut se souvenir de cette méthode qui permet de comprendre et justifier le théorème suivant (écrit dans le cas général) :

Théorème 7.4 *(Caractérisation des familles libres de $\mathbf{K}^n$)*

Une famille finie de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est libre, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de **colonnes**.

Exemple

Montrer que les trois vecteurs $u = (1,2,3)$, $v = (3,1,2)$ et $w = (2,3,1)$ forment une famille libre de $\mathbf{R}^3$.
Solution :
On écrit la matrice avec les trois vecteurs écrit sous forme de matrice colonne. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
On cherche le rang par le pivot de Gauss :

$$A \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

Quitte à changer l'ordre des vecteurs en u, w, v (ce qui revient à échanger les deux dernières colonnes), on obtient une forme échelonnée à 3 pivots.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Il y a autant de pivots que de colonnes, donc la famille est libre.

Théorème 7.5 *(Interprétation de la liberté)*

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille **libre** de E, si et seulement si tout vecteur de $\text{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$ s'exprime de manière *unique* comme combinaison linéaire des x_i.

Preuve

- **sens direct :** on suppose que la famille est libre et on décompose un vecteur $x \in \text{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$ de deux manières différentes : $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$.
Montrons que $\forall i \in I,\ \lambda_i = \mu_i$ (la décomposition est unique).
Si on fait la différence, on obtient : $0_E = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i - \sum_{i\in I} \mu_i x_i = \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i)\, x_i$.
Or, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre et $\{i \in I,\ \lambda_i - \mu_i \neq 0\}$ est fini.
On obtient donc une combinaison linéaire des vecteurs d'une famille libre qui donne 0, ce qui impose que ses coefficients soient tous nuls. Donc $\forall i \in I,\ \lambda_i - \mu_i = 0$, donc $\lambda_i = \mu_i$.
- **sens réciproque :** on suppose que la décomposition est unique pour tout vecteur de l'espace engendré. C'est donc vrai en particulier pour le vecteur 0 :
$\sum_{i\in I}^{n} \lambda_i x_i = 0_E = \sum_{i\in I} 0 \cdot x_i \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$. Donc la famille est bien libre. ∎

Explications

Quel est l'intérêt d'une famille libre ?
Si un vecteur x peut être décomposé comme combinaison linéaire des éléments de cette famille, alors, cette décomposition est unique : on pourra donc raisonner par identification :

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si leur décomposition sur la famille libre est identique.

Le théorème suivant sert à construire des familles libres par ajouts successifs de vecteurs. On l'utilise dans des raisonnements par récurrence (pour les familles avec un nombre fini de vecteurs).
Il traduit une intuition géométrique forte qu'il faut comprendre :
Si on veut ajouter un vecteur qui donne une « information » supplémentaire, il faut (et il suffit) qu'il n'appartienne pas à l'espace déjà engendré par les premiers vecteurs.

Théorème 7.6 *(Ajout d'un vecteur à une famille libre)*

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre de E et $y \in E$,
alors la famille obtenue à partir de $(x_i)_{i\in I}$ complétée par y est libre si et seulement si

$$y \notin \text{Vect}\,(x_i)_{i\in I}\,.$$

Remarque : On peut remplacer la famille $(x_i)_{i\in I}$, par une partie libre $A \subset E$.

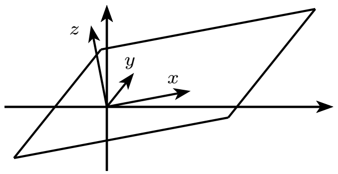
Preuve

(sens direct) par contraposée.

Si $y \in \text{Vect}\left(\{x_i\}_{i\in I}\right)$, alors y s'écrit comme combinaison linéaire des (u_i), donc la nouvelle famille est liée.
(sens réciproque) par contraposée.
Si la famille obtenue est liée, alors on peut trouver des coefficients (non tous nuls) tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \lambda y = 0_E$.
Si $\lambda = 0$, alors la famille des x_i serait liée, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc en divisant par λ, on montre que $y \in \text{Vect}\left(\{x_i\}_{i\in I}\right)$. ■

Exemple

Si x et y sont deux vecteurs non colinéaires (famille libre), alors Vect (x, y) est un plan.
Pour que la famille (x, y, z) soit libre, il faut (et il suffit) que les vecteurs soient non coplanaires, c'est-à-dire que z n'appartienne pas au plan engendré par x et y.



Propriété 7.7 *(Famille extraite)*

Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
Toute sous-partie d'une partie libre est libre.

Explications

Si dans une famille de vecteurs, chaque vecteur porte une information qui lui est propre et ne peut pas s'obtenir avec les autres vecteurs de la famille, alors, c'est « encore plus vrai » si on ne prend qu'une partie de cette famille :

Preuve

On suppose que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre.
On en extrait une sous famille (c'est-à-dire que l'on ne prend qu'une partie des x_i) et on écrit qu'une combinaison linéaire de ces vecteurs est égale à 0_E.
Or, c'est également une combinaison linéaire de la famille initiale (on rajoute $\lambda_j = 0$ pour les indices non présents dans la sous-famille).
Donc, par liberté de la famille initiale, tous les scalaires sont nécessairement nuls.
Ils le sont donc pour la sous famille : elle est libre. ■

Exemple

Soit X une partie liée et Y une partie contenant X.
Montrer que Y est une partie liée.
Solution :
Si Y était libre, alors, tout sous-partie serait aussi libre, donc X serait libre ce qui est absurde.

B Familles génératrices

La notion de famille génératrice est très simple dans son principe : par définition, une famille est génératrice de l'espace qu'elle engendre.
Ainsi, pour savoir si une famille est génératrice de E, il faut voir si la famille engendre l'espace E.

Définition 7.8 *(Famille génératrice)*

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille génératrice** de E, si

$$E = \text{Vect}\ (x_i)_{i\in I}\,.$$

Cette notion nous assure que l'on ne travaille pas dans un espace « trop gros » et que tout vecteur de E peut être décomposé dans la famille $(x_i)_{i\in I}$.
Si ce n'était pas le cas, alors, il faudrait, soit travailler dans un espace plus petit, soit ajouter des vecteurs dans la famille.

Définition 7.9 *(Partie génératrice)*

La partie $X \subset E$ est une **partie génératrice** de E, si

$$E = \text{Vect}\ (X)\,.$$

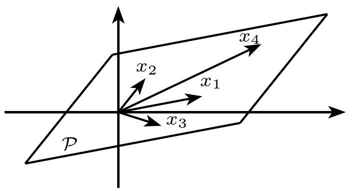
Si $X = \{x_i\}_{i\in I}$, le caractère générateur de X est équivalent à celui de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Théorème 7.10 *(Caractérisation)*

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille **génératrice** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des x_i.

Exemple

Une famille de $\mathbf{R}^3$ génératrice d'un plan doit contenir deux vecteurs non colinéaires.
Dans la figure ci-contre,
(x_1, x_2, x_3, x_4) est une famille génératrice du plan $\mathcal{P}$.
(on pourrait générer le même plan avec moins de vecteurs)



Exemple *(Trouver une famille génératrice)*

Soit F le sous espace de $\mathbf{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x+y+z, x-3y+4z, y-z, -x+2z)\,,\quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\right\}.$$

Donner une famille génératrice de F.
Solution :
Pour cela on écrit le vecteur sous forme de somme à partir des paramètres x, y, z.

$$\begin{aligned}
&(t,u,v,w) \in F \\
&\iff \exists (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que } (t,u,v,w) = (x+y+z, x-3y+4z, y-z, -x+2y) \\
&\qquad\qquad = x(1,1,0,-1) + y(1,-3,1,0) + z(1,4,-1,0)
\end{aligned}$$

Ainsi, tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de $(1,1,0,-1)\,,\,(1,-3,1,0)$

et $(1,4,-1,0)$.

Donc la famille $\big((1,1,0,-1)\,,\,(1,-3,1,0)\,,\,(1,4,-1,0)\big)$ est génératrice de F

Remarque : on peut aussi montrer que cette famille est libre.

Exemple

La famille des polynômes unitaires de $\mathbf{K}[X]$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}[X]$ (mais non libre).

Méthode *(Montrer qu'une famille finie est génératrice)*

Cas général :
Pour montrer que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice de E, on pose $x \in E$ quelconque, et on cherche

$$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

$\to$ résolution d'équation.
Dans $\mathbf{K}^n$:
Cela revient à résoudre un système linéaire : chaque équation correspond à une coordonnée.

Exemple *(méthode)*

Montrer que $e_1 = (1,1,1)\,, e_2 = (1,2,3), e_3 = (2,3,4), e_4 = (3,2,3)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. La famille est-elle libre ?
Solution :
Soit $u \in \mathbf{R}^3$ quelconque. Il existe $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $u = (x,y,z)$.

$$\begin{aligned}
& u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 \\
\iff & \left\{\begin{array}{lllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x \\ \lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & +2\lambda_4 & = y \\ \lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & +3\lambda_4 & = z \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{llllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x & \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = -x+y & \leftarrow L_2 - L_1 \\ & 2\lambda_2 & +2\lambda_3 & & = -x+z & \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{llllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x & \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = -x+y & \\ & & & 2\lambda_4 & = x - 2y + z & \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le système n'a pas de pivots dans le second membre : il est compatible.
Ainsi, il existe (au moins) une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ au système.

Dans l'exemple précédent, on observe que la famille est génératrice si et seulement si le système admet une solution quelque soit le second membre.

Propriété 7.11 *(Caractérisation des familles finies génératrices de $\mathbf{K}^n$)*

Une famille finie de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est génératrice de $\mathbf{K}^n$, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de **lignes**.

⚠ Ne pas être génératrice de $\mathbf{K}^n$ n'empêche pas d'être génératrice d'un sous espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.
On obtient donc la règle suivante dans $\mathbf{K}^n$

- **libre :** autant de pivots que de colonnes,
- **génératrice :** autant de pivots que de lignes.

Propriété 7.12 *(Famille complétée)*

Tout famille génératrice de E complétée d'un ou plusieurs vecteurs de E est génératrice de E.
De façon équivalente :
Si X est partie génératrice de E et si $X \subset Y \subset E$, alors Y est aussi une partie génératrice de E.

Remarque : On peut remplacer la famille $(x_i)_{i\in I}$, par une partie libre $A \subset E$.

Preuve

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E que l'on complète avec $(y_j)_{j\in J} \in E^J$, alors tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire comme combinaison des $(x_i)_{i\in I}$ Ainsi il existe $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ tel que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.
En posant $\forall j \in J$, $\mu_j = 0$, alors on a également $u = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i + \sum\limits_{j\in J} \mu_j x_j$.

Or, la famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in J}$ à laquelle on adjoint la famille nulle $(\mu_i)_{i\in J}$ est encore une famille presque nulle, donc la famille complétée est une famille génératrice de E. ■

C Bases

Ce qui nous intéresse, c'est de pouvoir générer un espace avec le nombre minimal de vecteurs.
Pour cela, il faut donc que la famille de vecteurs soit génératrice.
Mais en général, une famille génératrice contient plus de vecteurs que nécessaire. On impose donc également à la famille d'être libre.

Définition 7.13 *(Base)*

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une **base** de E, si elle est libre et génératrice de E.

Théorème 7.14 *(Caractérisation)*

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une **base** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de façon *unique* comme une combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$.
Les coefficients de la combinaison linéaire sont alors appelés les **coordonnées** du vecteur dans la base.

Preuve

Tout vecteur de E peut se décomposer dans la famille car elle est génératrice de E et l'écriture est unique car la famille est libre. ∎

Exemple

Montrer que $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
On dit que c'est la **base canonique** de $\mathbf{K}_n[X]$.
Solution :
Remarquons au préalable que tous les vecteurs de la famille $\mathscr{C}$ sont bien dans $\mathbf{K}_n[X]$ (qui est un espace vectoriel de référence).

- Montrons que la famille est génératrice.
  Par définition, on peut écrire P sous la forme
  $$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$
  avec $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$.
  Ainsi P s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{C}$.
  Donc $\mathscr{C}$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}_n[X]$.

- La famille est également libre car les coefficients d'un polynôme son définis de manière unique (principe d'identification).

La famille $\mathscr{C}$ est donc une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exemple

$\left(X^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est la **base canonique** de $\mathbf{K}[X]$.
Solution :
La famille est évidemment génératrice.
Elle est libre car toute sous famille finie peut être extraite d'une famille du type $(1,\ X,\ \cdots X^n)$ qui est elle-même libre (exemple précédent).
C'est donc bien une base de $\mathbf{K}[X]$.

Exemple

Pour tout $(i,\ j) \in [\![1,\ n]\!] \times [\![1,\ p]\!]$ on note $E_{i,\,j} \in \mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$ la matrice ayant des 0 partout sauf au coefficient $(i,\ j)$ où il vaut 1.
$E_{i,\,j} = (\delta_{i,\,k}\delta_{j,\,\ell})_{(k,\,\ell)}$.
La famille $(E_{i,\,j})_{(i,\,j)\in[\![1,\,n]\!]\times[\![1,\,p]\!]}$ est la **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,\,p}(\mathbf{K})$.

Exemple

- Les vecteurs $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ forment une base de $\mathbf{K}^2$.
- De même, dans $\mathbf{K}^n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $e_1 = (0, 0, \cdots, \underbrace{1}_{i}, 0, ..)$ le vecteur dont toutes les coordonnées valent 0, sauf la coordonnée i qui vaut 1, alors $\mathscr{C} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathbf{K}^n$ appelée **base canonique** de $\mathbf{K}^n$.

Exemple

On définit l'ensemble E comme l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$y'' + 2y' + y = 0.$$
On a déjà vu que E est un espace vectoriel à la page 7. Donner une base de E.
Solution :
L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est
$$x^2 + 2x + 1 = 0.$$
Cette équation admet une solution double $x = -1$.a D'après le cours sur les équations différentielle, on sait que
$$E = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-x} + \mu x\,\mathrm{e}^{-x}\right\}.$$
Ainsi, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $\varphi_1 :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et de $\varphi_2 :\ x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$.
Ces deux vecteurs forment donc une famille génératrice de E.
Or, ils ne sont pas colinéaires (les fonctions φ_1 et φ_2 ne sont pas proportionnelles), donc ils forment une famille libre.
Ainsi $\mathscr{B} = (\varphi_1, \varphi_2)$ est une base de E.

Exemple

Donner une base de $\mathbf{R}^2$, autre que la base canonique.
Solution :
Il suffit d'obtenir deux vecteurs avec lesquels on peut former un repère de $\mathbf{R}^2$. On a l'embarra du choix ! Tout choix de deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ non colinéaires fera l'affaire.
Par exemple si on pose $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, 0)$, montrons que l'on obtient une base :
Soit $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$. Essayons de décomposer u dans la famille (e_1, e_2).
$$\begin{aligned} u = \lambda e_1 + \mu e_2 &\iff \lambda(1,1) + \mu(1,0) = (x,y) \\ &\iff \begin{cases} \lambda + \mu &= x \\ \lambda &= y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu = x - y \\ \lambda = x \end{cases} \end{aligned}$$
Donc, il existe bien $(\lambda, \mu) = (x, x-y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $u = \lambda e_1 + \mu e_2$.
→ la famille est génératrice.
Et ces scalaires sont définis de manière unique, donc la famille est aussi libre.
(*sinon, on pouvait aussi dire que les vecteurs n'étaient pas colinéaires.*)

Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ et dans cette base, les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y)$ sont $(x, x - y)$.

Exemple *(Décomposer un vecteur dans une base de $\mathbf{K}^n$)*

Dans $\mathbf{K}^3$, on définit les vecteurs $e_1 = (1, 5, 2)$, $e_2 = (0, 2, -2)$ et $e_3 = (1, 3, 2)$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{K}^3$ donner les coordonnées de $u = (x, y, z)$ dans cette base.

Solution :

On répond aux deux questions par un seul calcul. Pour $u = (x, y, z)$ quelconque dans $\mathbf{K}^3$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{K}^3$ tel que $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ et on montre que ces scalaires sont uniques.
Cela revient à montrer que le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{cases} \lambda_1 & & +\lambda_3 & = x \\ 5\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & = y \\ 2\lambda_1 & -2\lambda_2 & +2\lambda_3 & = z \end{cases}$$

Pour changer, utilisons la méthode avec la matrice augmentée :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 5 & 2 & 3 & y \\ 2 & -2 & 2 & z \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & -5x + y \\ 0 & -2 & 0 & -2x + z \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 2 & -2 & -5x + y \\ 0 & 0 & -2 & -7x + y + z \end{array}\right)$$

On voit que le système admet 3 pivots, la solution existe donc est elle est unique.
Cela montre que la famille est une base.
Il suffit de finir la résolution pour trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ qui sont les coordonnées de u dans cette base.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 2 & -2 & -5x + y \\ 0 & 0 & -2 & -7x + y + z \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6x + y + z \\ 0 & 2 & 0 & 2x - z \\ 0 & 0 & -2 & -7x + y + z \end{array}\right)$$

On note $\mathrm{mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -6x + y + z \\ x - \frac{z}{2} \\ \frac{7x - y - z}{2} \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de (x, y, z) dans la base (e_1, e_2, e_3).

Méthode *(Extraire une base dans $\mathbf{K}^n$)*

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$, alors on peut en extraire une base avec la méthode suivante :

1. on écrit la matrice composée des vecteurs $(x_1, \cdots, x_p)$ écrits sous forme de colonne.
2. on effectue la méthode du pivot sur les lignes, jusqu'à obtenir n pivots.
(pas besoin d'aller jusqu'à la forme échelonnée réduite)
3. on sélectionne les x_i, dont la colonne a donné un pivot.

Exemple *(Extraire une base)*

Montrer que $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$, $e_3 = (2, 3, 4)$, $e_4 = (3, 2, 3)$ forment une famille génératrice de $\mathbf{K}^3$.
En extraire une base.

Solution :

On a déjà vu à l'exemple de la page 15 que la famille est génératrice.
On avait obtenu la matrice échelonnée :
(on l'avait écrit sous forme de système ce qui revient au même, et on avait réalisé les calculs avec un second membre que l'on ne considère pas ici)

$$\begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = x \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & -\lambda_4 & = -x + y \\ & & & 2\lambda_4 & = x - 2y + z & \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient des pivots aux colonnes 1, 2 et 4.
Si on ne garde que ces colonnes, c'est-à-dire la famille (e_1, e_2, e_4), alors les mêmes opérations sur les lignes donnent la matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En effet, les opérations sur les lignes agissent indépendamment sur chaque colonne et le fait d'enlever certaines colonnes à la matrice initiale revient à enlever ces mêmes colonnes à la matrice finale, sans avoir à modifier le reste.
La matrice obtenue contient autant de pivots que de lignes : la famille est génératrice.
De plus, la matrice contient autant de pivots que de colonnes, donc la famille est libre.
(e_1, e_2, e_4) est une base de $\mathbf{K}^3$.
Remarque : ce n'est pas la seule base extraite possible.

8 Espace vectoriel de dimension finie

A Approche intuitive

On parle naturellement d'un espace à 1, 2 ou 3 voire 4 dimensions dans la vie quotidienne. C'est ce que nous allons généraliser. On peut interpréter la dimension d'un espaces de deux façons complémentaires :

- *La dimension est le nombre de directions indépendantes selon lesquelles on peut se diriger au sein de l'espace.*
  - Par exemple, $\{0\}$ est un singleton. Si mon monde se réduisait à ce seul point, alors je serais nécessairement immobile : je ne pourrais pas changer de point et n'aurais donc aucun mouvement possible.
    $\{0\}$ est de dimension 0. C'est le seul espace de dimension 0.
  - $\mathbf{R}$ est une droite : une ligne. Si mon monde se réduisait à cette ligne, je n'aurais qu'une direction possible pour mes mouvements le long de cette droite : l'espace est de dimension 1.
    Réciproquement, tout espace de dimension 1 est une droite.

  - $\mathbf{R}^2$ est un plan. Je peux donc m'orienter suivant deux directions : avant/arrière et gauche/droite. L'espace est de dimension 2.
    Réciproquement, tout espace de dimension 2 est un plan.
  - Pour $\mathbf{R}^3$, j'ajoute une direction supplémentaire : haut/bas.
  - Un espace de dimension 4 est plus difficile à représenter, mais il comporte à son tour encore une direction de mouvement supplémentaire. On a coutume d'ajouter le temps que l'on pourrait faire défiler à notre guise : se déplacer dans le temps pour désigner cette dimension supplémentaire.
  - Et ainsi de suite. Pour chaque dimension supplémentaire, on ajoute une nouvelle direction possible pour un mouvement.

- *La dimension d'un espace est le nombre minimal d'informations qu'il faut pour pouvoir décrire parfaitement et sans ambigüité chaque vecteur de cet espace.*
  - Pour l'espace $\{0\}$, on n'a besoin d'aucune information pour décrire le vecteur considéré car on n'a pas le choix : il n'y a que le vecteur 0 possible.
    Ainsi $\{0\}$ est de dimension 0.
  - Pour l'espace $\mathbf{R}$ (ou toute droite linéaire), il suffit d'avoir l'abscisse pour connaître le vecteur considéré : une information donc de dimension 1.
  - Pour $\mathbf{R}^2$, il faut deux informations. Un vecteur du plan est décrit par un couple (abscisse, ordonnée). L'espace est de dimension 2.

  C'est cette deuxième approche qui nous servira à formaliser mathématiquement la notion de dimension.

Exemple

- Dans l'exemple introductif nous avions considéré des paniers de légumes composés de courgettes et d'aubergines. L'espace était de dimension 2.
- Si on rajoutait un autre type de légume à notre panier, alors, on aurait un espace de dimension 3 et chaque panier serait décrit par un triplet (x, y, z).

Intérêt de la base :
On voit donc que chaque nouvelle information indépendante donne une nouvelle direction, c'est-à-dire augmente la dimension de 1.
Ainsi, tout vecteur d'un espace de dimension n peut être décrit de façon unique par n informations.

La question est donc de traduire ces informations (des nombres) en vecteurs de l'espace.
Par exemple, avec les paniers de courgettes et aubergines, on peut traduire $(5, 3)$ par le panier « 5 courgettes et 3 aubergines ». Mais on pourrait aussi le traduire par « 3 courgettes et 5 aubergines ».
Il faut donc donner une clef de lecture pour comprendre que le 5 désigne le nombre d'aubergines et le 3, le nombre de courgettes. Cette « clef de lecture » est ce qui permet de transformer nos informations numériques en vecteurs de l'espace : on appelle cela une **base**.
Dans l'exemple en question, la base est simplement composée de deux vecteurs (ici des paniers) :

- $e_1 =$ « 1 aubergine et 0 courgettes »,
- $e_2 =$ « 0 aubergine et 1 courgettes ».

Ainsi, écrire $(5, 3)$ revient à faire $5e_1 + 3e_2 =$ « 5 courgettes et 3 aubergines ».
(e_1, e_2) est la base choisie pour l'espace (on pourrait en choisir d'autres).

La base sert de *repère*[3] dans l'espace considéré.
Par exemple, en dimension 1, la description de la droite suppose d'avoir choisi un vecteur directeur u (qui sert de base). Ainsi tout autre vecteur de la droite s'écrit $v = \lambda u$. λ est « l'information » qui donne v sans ambigüité.

La dimension de l'espace est égal au nombre de vecteurs qu'il faut pour constituer une base de l'espace.

Une fois cette base fixée, la connaissance des coordonnées du vecteur dans cette base permet de décrire exactement ce vecteur par un uplet.

Pourquoi une base et pas un autre type de famille ?
On voit bien que la famille qui doit servir de repère doit être génératrice pour que l'on puisse décrire *tous* les vecteurs de l'espace grâce à elle.
De plus, on ne veut pas qu'elle porte d'informations redondantes et qu'elle permettre de décrire chaque vecteur de façon *unique*. Elle doit donc être libre.
Cela correspond exactement à la définition d'une base.

D'un point de vue formel, pour que tout ceci fonctionne, il faut s'assurer

1. que les espaces considérés possèdent tous au moins une base avec un nombre fini de vecteurs,
2. que pour un espace fixé, toutes les bases aient le même nombre de vecteurs (sinon un espace aurait plusieurs dimensions...)

Définition 8.1 *(Dimension intuitive)*

Un espace vectoriel E est de dimension finie $n \in \mathbf{N}$ s'il admet une base avec n vecteurs.
Dans ce cas, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

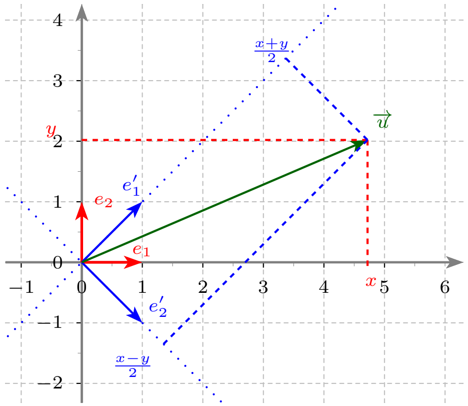
3. La différence avec le repère vu en géométrie est qu'il n'est pas ici nécessaire de préciser l'origine car on choisit toujours l'origine O que l'on sait faire partie de l'espace.

⚠ Certains espaces n'admettent pas de base avec un nombre fini de vecteurs, ils ne sont donc pas de dimension finie.

Une fois cette base fixée, la connaissance des coordonnées du vecteur dans cette base permet de décrire exactement ce vecteur par un uplet.

Exemple

Le plan $\mathbf{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension 2. Pour connaître un vecteur, il me faut au minimum deux informations. Par exemple l'abscisse et l'ordonnée.
On peut donc choisir la base canonique (e_1, e_2), telle que e_1 serve à donner l'abscisse : $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, l'ordonnée.
Un vecteur (x, y) du plan est alors décrit par $xe_1 + ye_2$.
On peut aussi choisir une autre base (cela revient à changer de repère). Par exemple, prendre $e_1' = (1, 1)$ et $e_2 = (1, -1)$. Le vecteur (x, y) s'écrit dans cette base $(x, y) = \frac{x+y}{2}e_1' + \frac{x-y}{2}e_2'$



Méthode *(Déterminer la dimension d'un espace)*

En général, pour déterminer la dimension d'un espace, on lui trouve une base.
Il faut alors montrer qu'elle est à la fois libre et génératrice.

Il reste néanmoins encore une question : la définition 8.1 de la dimension suppose que toutes les bases d'un même espace vectoriel aient le même nombre d'éléments. En effet, si un espace pouvait avoir des bases avec des nombres différents de vecteurs, alors, il aurait plusieurs dimensions possibles.
La partie qui suit propose donc de construire rigoureusement la notion de dimension et d'établir son unicité.

B Dimension finie - construction formelle

Définition 8.2

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Remarque : Certains espaces ne sont pas de dimension finie.
Par exemple l'ensemble des suites réelles est de dimension infinie[4] car il n'admet aucune famille génératrice avec un nombre fini d'éléments. Il faut un nombre infini d'informations pour décrire une suite quelconque (il faut tout ses termes).
Si un espace admet une famille génératrice finie, alors on peut décrire chaque vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. Et donc avec un nombre fini d'informations.
Le problème est, qu'en général, l'écriture du vecteur n'est pas unique. Pour éviter cet écueil, on veut donc que la famille soit aussi libre : une base.
Justifions donc que l'on peut en trouver une.

Théorème 8.3 *(Théorème de la base extraite)*

De toute famille génératrice finie d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (non réduit à 0), on peut extraire une base de E.
Donc tout espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base (finie).

⚠ Cette base n'est pas unique.

Preuve

Idée : on part d'une famille génératrice et on enlève un à un les vecteurs « redondants » jusqu'à obtenir une famille libre (sans changer l'espace généré). La *méthode de la descente infinie*, nous assure que le processus se termine.
Soit $\mathscr{G} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille génératrice de E.
Si la famille est libre, alors c'est une base de E.
Si la famille est liée, alors un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres : par exemple $x_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k$.
Alors la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})$ est génératrice.
On réitère ce processus en enlevant 1 à 1 les éléments surabondants de la famille jusqu'à obtenir une famille libre. Par construction cette famille est à la fois libre et génératrice : c'est donc une base.
(Le processus aboutit bien à un certain rang, car le nombre d'éléments dans la famille décroît strictement et une famille à un seul élément non nul est toujours libre.) *Pour le démontrer formellement, on peut rédiger une récurrence sur p.* ■

Maintenant que l'on sait que tout espace de dimension finie admet une base, il reste à démontrer que toutes ses bases ont le même nombre d'éléments pour pouvoir définir la dimension.

Théorème 8.4 *(Lemme de Steinitz)*

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Autre formulation : Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice finie de E et $\mathscr{F}$ une famille libre de E, alors
$$\operatorname{Card} \mathscr{F} \leqslant \operatorname{Card} \mathscr{G}.$$

4. Ce sera plus facile à démontrer lorsque nous disposerons des applications linéaires.

Explications

Ce théorème est assez intuitif. Il énonce simplement que si on peut exprimer $(n+1)$ vecteurs à partir de n vecteurs différents, alors les $n+1$ vecteurs ne peuvent pas être linéairement indépendants.

Preuve

Par récurrence sur n. Pour $n=0$, l'espace est nul est le résultat trivial.
Pour $n=1$, le résultat est trivial (deux vecteurs d'une même droite vectorielle sont colinéaires).
En effet, si y engendre E, et $(x_1,x_2)\in E^2$.
Alors $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbf{K}^2$, tels que $\lambda_1 y=x_1$ et $\lambda_2 y=x_2$.
Si $x_1=x_2=0$, c'est évident, sinon, par exemple $x_1\neq 0$ donc $\lambda_1\neq 0$, donc $x_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_2}x_1$.

On suppose le résultat vrai au rang n, et on cherche à le montrer au rang $n+1$.
Soit $\mathscr{F}=(x_1,x_2,...,x_{n+2})$ une famille à $n+2$ éléments et $\mathscr{G}=(y_1,y_2,...,y_{n+1})$ une famille génératrice à $n+1$ éléments.
Montrons que $\mathscr{F}$ est une famille liée.
Si $x_{n+2}=0$ alors la famille est liée, et c'est terminé.
Supposons donc à présent $x_{n+2}\neq 0$.
Le but est d'utiliser x_{n+2} pour exprimer les $(x_i)_{i\in[\![1,\,n+1]\!]}$ en fonction de n éléments de la famille génératrice uniquement. On se sert donc de x_{n+2} pour retirer la composante des x_i suivant y_{n+1} par exemple.
Tout élément de $\mathscr{F}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{G}$. C'est-à-dire

$$\forall i\in[\![1,n+1]\!],\exists(\lambda_{i,1},\lambda_{i,1},...,\lambda_{i,n})\text{ tel que }x_i=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_{i,k}y_k.$$

Comme x_{n+2} est non nul, il existe un des coefficients $\lambda_{n+2,k}$ qui est non nul. Par exemple $\lambda_{n+2,n+1}$ (quitte à réordonner les éléments).
Pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$, on pose

$$f_i=x_i-\frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}x_{n+2}.$$

$$\begin{aligned}\text{Alors }\forall i\in[\![1,n+1]\!],\ f_i&=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_{i,k}y_k-\frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}x_{n+2}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_{i,k}y_k-\frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_{n+2,k}y_k\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\lambda_{i,k}-\frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}\lambda_{n+2,k}\right)y_k=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{i,k}y_k.\end{aligned}$$

Et le coefficient de y_{n+1} dans la combinaison est nul :

$$\alpha_{i,n+1}=\lambda_{i,n+1}-\frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}\lambda_{n+2,n+1}=0.$$

Donc $(f_1,f_2,\cdots,f_{n+1})$ forme une famille à $n+1$ éléments du sous espace vectoriel $E'=\mathrm{Vect}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.
Ainsi, par application de l'hypothèse de récurrence $(f_i)_{i\in[\![1,\,n+1]\!]}$ est liée, donc il existe $(\mu_1,\cdots,\mu_{n+1})$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i f_i=0$. On obtient alors

$$\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i\left(x_i-\frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}x_{n+2}\right)=0,$$

$$\text{ie}\quad\left(\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i x_i\right)-\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}}x_{n+2}=0.$$

Donc la famille $(x_i)_{i\in[\![1,\,n+2]\!]}$ est aussi liée.
Par principe de récurrence, le résultat est donc démontré pour tout $n\in\mathbf{N}$. ∎

Exemple

Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ forme un espace vectoriel de dimension infinie (pas finie).

Solution :

Il suffit de trouver une famille libre avec un nombre infini d'éléments, ainsi, d'après le lemme de Steinitz, toute famille génératrice aura nécessairement un nombre infini d'éléments, ce qui nous indique que l'espace ne peut être de dimension finie.
Par exemple, on considère la famille $\left(x\mapsto \mathrm{e}^{kx}\right)_{k\in\mathbf{Z}}$, montrons que cette famille est libre.
Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ une famille de scalaires (réels) presque nulle telle que $x\mapsto\sum_{k\in I}\lambda_k\,\mathrm{e}^{kx}=0$.
La famille étant presque nulle, supposons par l'absurde qu'elle contiennent des scalaires non nuls.
Alors, en particulier elle contient un scalaire non nul, d'indice maximal k_0.
En factorisant par l'exponentielle correspondante, on trouve donc $\forall x\in\mathbf{R}\sum_{k\in I}\lambda_k\,\mathrm{e}^{(k-k_0)x}=0$.
En particulier pour $x\to+\infty$ ce qui donne $\lambda_{k_0}=0$, ce qui est absurde.
Donc tous les scalaires sont nuls et la famille est bien libre.

Théorème 8.5 *(Dimension)*

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé **la dimension** de l'espace.
Par convention, l'espace vectoriel nul : $\{0_E\}$ est de dimension 0 (on ne parle pas de base pour cet espace).

Preuve

Si E admet une base à n éléments. Cette base est une famille génératrice, donc toute famille libre de E admettra au plus n éléments.
Donc toutes les autres bases admettent au plus n éléments.
Si on suppose qu'il existe une autre base admettant strictement moins que n éléments, alors en échangeant les rôles, on voit que la première base qui contient n éléments ne peut pas être libre. C'est absurde. ∎

Corollaire 8.6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit $\mathscr{F}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie.

$$\operatorname{Card} \mathscr{F} \leqslant n \leqslant \operatorname{Card} \mathscr{G}.$$

Explications

La base est un ensemble de vecteurs de E, à partir desquels, on peut exprimer tous les autres *de façon unique*.

- Le fait que l'on puisse exprimer tous les autres vecteurs à partir de ceux de la base traduit que la base est une famille génératrice.
- Le fait que cette expression soit unique, traduit que la base est une famille libre.

Intuitivement : Lorsqu'on dispose d'une famille génératrice, si elle n'est pas libre, c'est qu'il y a une redondance d'information entre ces éléments. On peut donc en supprimer certains tout en restant générateur. Lorsqu'on ne peut plus en supprimer, c'est que la famille est une base : elle est aussi libre.
→ théorème de la base extraite (voir ci-dessus le théorème 8.3).

De même, si une famille est libre, et qu'il manque des informations pour pouvoir exprimer tous les vecteurs, alors on peut compléter cette famille pour obtenir une base.
→ théorème de la base incomplète (voir ci-dessous le théorème 8.7).

Théorème 8.7 *(Théorème de la base incomplète)*

En dimension finie, toute famille libre peut-être complétée en une base de E.
Les vecteurs pour compléter la famille peuvent être choisis dans une famille génératrice finie quelconque.

Preuve

Soit $\mathscr{F} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille libre de E.
On suppose que l'on possède une famille génératrice finie quelconque $\mathscr{G} = (y_1, y_2, \cdots, y_q)$ (existe car E est de dimension finie).

- Si tout élément de $\mathscr{G}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{F}$, alors $\mathscr{F}$ est génératrice.
  En effet, si $\forall i \in [\![1, q]\!], \exists (\lambda_{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ tels que $y_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{i,k} x_k$.
  Comme $\mathscr{G}$ est génératrice, $\forall x \in E, \exists (\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$,
  alors $x = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \mu_i \lambda_{i,k} x_k$. $\mathscr{F}$ est génératrice, c'est donc une base.
- Sinon, il existe un élément de $\mathscr{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i : par exemple y_1 (quitte à réordonner). Alors $(x_1, x_2, ..., x_p, y_1)$ est une famille libre.

On réitère le processus en ajoutant 1 à 1 les éléments de $\mathscr{G}$ jusqu'à obtenir une famille génératrice. Alors, par construction elle sera aussi libre. Ce sera donc une base.

(Le processus s'arrête nécessairement au plus tard quand tous les éléments de $\mathscr{G}$ ont été intégrés à $\mathscr{F}$). ■

Pour se souvenir

$$\textbf{Famille libre} \xrightarrow[\text{ajoute des vecteurs}]{\text{Th. base incomplète}} \textbf{Base} \xleftarrow[\text{retire des vecteurs}]{\text{Th. base extraite}} \textbf{Famille génératrice}$$

Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale.

Exemple

- L'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficient continu est de dimension 1.
  En effet pour $y' = ay$ avec a continue sur I, les solutions s'écrivent $t \mapsto \lambda \, \mathrm{e}^{A(t)}$ avec A une primitive de a sur I.
  On peut donc écrire $\mathscr{S} = \operatorname{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}\right)$ qui est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur non nul $t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}$.
- L'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants est de dimension 2.
- L'ensemble des suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un espace de dimension 2.

Théorème 8.8 *(Caractérisation des bases)*

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, et $\mathscr{F}$ une famille de n **vecteurs** de E,
alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathscr{F}$ est une base de E,
2. $\mathscr{F}$ est génératrice de E,
3. $\mathscr{F}$ est libre.

Preuve

- Si $\mathscr{F}$ est une base, alors elle est génératrice.
- Si $\mathscr{F}$ est génératrice. Si elle était liée, alors on pourrait lui enlever un vecteur et elle resterait génératrice. C'est absurde car alors il existerait une famille génératrice à $n-1$ éléments (qui est moins que le nombre d'éléments de la base qui forme une famille libre). Donc $\mathscr{F}$ est libre.
- Si $\mathscr{F}$ est libre. Si ce n'était pas une base, alors il existerait $y \in E$ tel que $y \notin \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. D'après la propriété 7.6, la famille $\mathscr{F}$ complétée par y serait libre et aurait plus d'éléments qu'une base (qui est génératrice). C'est impossible d'après la propriété 8.6. Donc la famille $\mathscr{F}$ est génératrice : c'est une base.

■

Méthode *(Montrer qu'une famille est une base)*

Lorsque l'on travaille dans un espace E dont on connaît la dimension n.
Pour montrer que $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base, il suffit de vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs, et de prouver qu'elle est **soit** libre, **soit** génératrice.
En général, le plus simple est de montrer qu'elle est **libre**.

C Sous espaces vectoriels en dimension finie

Les propriétés qui suivent ressemblent beaucoup à celles vues avec les ensembles finis. La différence est que l'on raisonne avec la dimension au lieu de compter le nombre d'éléments.
Comme la base permet de décrire parfaitement l'espace vectoriel, compter les éléments de la base revient intuitivement à compter les éléments de l'espace (au nombre d'éléments du corps près - certes infini dans ce chapitre).
⚠ Sauf pour l'espace $\{0\}$, tous les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels possèdent un nombre infini de vecteurs (il ne faut donc pas parler de cardinal).

Propriété 8.9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si F est un sous espace vectoriel de E,
alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$,
de plus,

$$\dim E = \dim F \iff E = F.$$

Preuve

Si $F = \{0_E\}$ c'est terminé,
Sinon, une famille libre de F est également libre dans E, donc toutes les familles libres de F ont au plus n vecteurs. Si on note p le nombre maximum de vecteurs que peut contenir une famille libre de F, alors $p \leqslant \dim E$.
On considère une famille libre de F à p vecteurs : $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.
Si, par l'absurde, cette famille n'est pas génératrice de F, alors il existe $y \in F$ tel que $y \notin \mathrm{Vect}\,(e_1, \cdots, e_p)$. La famille complétée $(e_1, \cdots, e_p, y)$ est donc une famille libre de F avec $(p+1)$ vecteurs (d'après la propriété 7.6). C'est contradictoire avec la définition de p (cardinal maximal d'une famille libre).
Donc $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre et génératrice de F, donc c'est une base de F.
Ainsi F est de dimension finie, et $\dim F = p \leqslant \dim E$.
Cas d'égalité :
On pose $n = \dim E$ et on suppose que $\dim F = \dim E = n$.
F possède donc une base de la forme $\mathscr{F} = (e_1, \cdots, e_n)$. Cette famille est libre dans F, donc également dans E et son cardinal est égal à la dimension de E.
D'après la propriété 8.8, c'est donc une base de E.
Ainsi $F = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F}) = E$. Donc les espaces sont égaux. ■

Méthode *(Égalité de deux espaces vectoriels)*

Pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont égaux, il suffit de montrer que $F \subset E$ et que $\dim F \geqslant \dim E$.

L'égalité des dimensions remplace la deuxième inclusion d'un raisonnement par double inclusion.

Définition 8.10 *(Nature de sous espaces particuliers)*

Soit E un espace de dimension finie n et F un sous espace de E,

- Si $\dim F = 1$, alors F est une **droite vectorielle.**
- Si $\dim F = 2$, alors F est un **plan vectoriel.**
- Si $\dim F = n - 1$, alors F est un **hyperplan vectoriel.**

D Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^2$ et $\mathbf{K}^3$

Par définition, un espace vectoriel contient le vecteur nul et il est stable par combinaison linéaire. Les droites de $\mathbf{K}^2$ sont des espaces vectoriels si, et seulement si elles passent par 0.
Pour décrire une droite vectorielle, il suffit donc d'avoir un vecteur directeur (dit aussi *générateur*). Un point par lequel passe la droite est une information inutile car on sait que l'on peut choisir l'origine. De même, un plan vectoriel est décrit par deux vecteurs générateurs (au moins) et passe par l'origine.

Théorème 8.11 *(Espaces vectoriels de $\mathbf{K}^2$)*

Les espaces vectoriels de $\mathbf{K}^2$ sont :

- Le singleton $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. C'est le « plus petit » espace vectoriel qui soit ; il ne contient qu'un seul vecteur. L'espace est de **dimension** 0 car on n'a pas besoin de vecteur générateur pour le décrire.
- Les droites qui passent par l'origine. Elles sont décrites par un vecteur générateur non nul. Ce sont les espaces de **dimension** 1 (besoin d'un vecteur générateur pour les décrire).
- Le plan $\mathbf{K}^2$ tout entier. Il est décrit par deux vecteurs générateurs. C'est un espace de **dimension** 2.

Ce sont les seuls espaces vectoriels de $\mathbf{K}^2$.

Théorème 8.12 *(Espaces vectoriels de $\mathbf{K}^3$)*

Dans $\mathbf{K}^3$, les espaces vectoriels sont :

- Le singleton $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. C'est l'espace de **dimension** 0.
- Les droites qui passent par l'origine. Ce sont les espaces de **dimension** 1.
- Les plans qui passent par l'origine. Ils sont décrits par deux vecteurs générateurs. Ce sont les espaces de **dimension** 2.
- L'espace $\mathbf{K}^3$ tout entier. C'est un espace de **dimension** 3.

Ce sont les seuls espaces vectoriels de $\mathbf{K}^3$.

E Calcul des dimensions

Voici quelques résultats sur la dimension. Nous reverrons cela au moment de l'étude des applications linéaires qui donnent une approche très riche des espaces vectoriels et permettent des calculs de dimension souvent plus élégants que ce que nous allons faire ici.

Théorème 8.13 *(Dimension d'un produit cartésien)*

Soient E et F deux espaces de dimension finie.
$E \times F$ est alors de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Pour F_1, F_2, $\cdots$, F_p, p espaces vectoriels de dimension finie, $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ est de dimension finie et

$$\dim(F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p) = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_p.$$

$\forall p \in \mathbf{N}^*$, $\dim(E^p) = p \times \dim(E)$

Preuve

On note $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E, et $(f_1, f_2, ..., f_q)$ une base de F.
Alors on pose pour $i \leqslant p, b_i = (e_i, 0_F)$ et pour $p+1 \leqslant i \leqslant p+q, b_i = (0_E, f_{q-i})$.
$(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+q}$ est une base de $E \times F$.
Les autres cas, se généralisent simplement par récurrence. ∎

F Somme directe en dimension finie

Théorème 8.14 *(Supplémentaire d'un sous-espace)*

Tout sous-espace vectoriel de E, admet un supplémentaire dans E.

Preuve

Soit $F \subset E$. On note $\mathscr{F} = (f_1, f_2, ..., f_p)$ une base de F. Alors $\mathscr{F}$ est une famille libre de E et peut donc être complétée en une base de E : $(f_1, f_2, ..., f_p, e_{p+1}, ..., e_n)$.
En posant $G = \text{Vect}(e_{p+1}, ..., e_n)$ on a $F \oplus G = E$ (trivial) ∎

Définition 8.15 *(Base adaptée à une somme directe)*

Soit la somme directe $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$.
Si $\mathscr{C}_1$ est une base de F_1, $\mathscr{C}_2$ est une base de F_2,... $\mathscr{C}_p$ est une base de F_p,
alors la concaténation de toutes ces bases donne une base de la somme directe, appelée **base adaptée à la somme directe.**

⚠ Cette base adaptée n'est pas unique (car chacune des bases $\mathscr{C}_i$ ne l'est pas).

Preuve

La somme montre que la famille est génératrice et son caractère direct montre qu'elle est libre. ∎

Théorème 8.16 *(Supplémentaires d'un sous-espace)*

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie E.
Tous les supplémentaires de F dans E ont la même dimension (qui vaut $\dim E - \dim F$).

Preuve

Soit G un supplémentaire de F dans E.
Soit $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ une base de F, et $(g_1, g_2, \cdots, g_q)$ une base de G.
Alors $(f_1, f_2, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ est une base de E. Donc $p + q = n$.
Donc $\dim G = \dim E - \dim F$. ∎

Théorème 8.17 *(Caractérisation du supplémentaire)*

Soient F et G deux sous-espaces de E,

$$F \oplus G = E \iff \begin{cases} \bullet \quad F \cap G = \{0\} \\ \bullet \quad \dim F + \dim G = \dim E. \end{cases}$$

Preuve

(sens direct) théorèmes précédents (6.4 et 8.16).
(sens reciproque) Le théorème 6.4 indique que la somme est directe grâce à l'intersection réduite à $\{0\}$.
De plus, si on considère une base de G, et qu'on la concatène avec une base de F, alors la famille reste libre (somme directe) et d'après l'égalité des dimensions, elle est aussi génératrice de E (8.8), donc c'est une base de E ce qui montre que la somme est égale à E. ∎

Théorème 8.18 *(Formule de Grassmann)*

Soient F et G deux sous-espaces de E,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Explications

Rappelez-vous qu'avec les espaces vectoriels, l'addition $F+G$ correspond au plus petit espace vectoriel qui contient l'union $F \cup G$. C'est donc bien le même théorème qu'avec les ensembles finis.

Preuve

La preuve est identique à celle des ensembles finis, si ce n'est que l'on utilise les opérations sur les espaces vectoriels au lieu des opérations ensemblistes.
On pose F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. On a alors $\dim F = \dim F' + \dim(F \cap G)$.
On veut montrer que $\dim F = (\dim(F+G) - \dim G) + \dim(F \cap G)$.
Pour cela il suffit de montrer que F' est un supplémentaire de G dans $F+G$.
On montre déjà que $F'+G = F+G$ (tout élément de $F+G$ s'écrit comme somme d'un élément de F' et d'un élément de G),
Puis on montre que $F' \cap G = 0_E$. ■

Exemple

$\dim(F+G) = \dim F + \dim G$ si, et seulement si $F+G = F \oplus G$.

Exemple

Somme de deux plans dans $\mathbf{R}^3$, somme d'un plan et d'une droite.

Théorème 8.19 *(Dimension de la somme)*

Soient $(F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_p)$, p sous espaces vectoriels de E, tous de dimension finie. $\sum_{k=1}^{p} F_k = F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k),$$

Preuve

La dimension finie de la somme et l'inégalité se montrent facilement par récurrence sur p en utilisant la concaténation de familles génératrices. ■

9 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 9.1 *(Rang d'une famille finie de vecteurs)*

Le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré

$$\operatorname{rg}\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = \dim \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_n).$$

Méthode *(Calcul du rang par le pivot)*

Le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbf{K}^n$ est égal au nombre de pivot de la matrice formée des vecteurs colonne correspondants.

Exemple *(exercice récapitulatif)*

Dans $\mathbf{R}^4$, on définit les vecteurs

$$v_1 = (1,2,1,0) \qquad v_2 = (-1,1,1,0) \qquad v_3 = (1,5,3,0)$$
$$v_4 = (3,3,1,0) \qquad v_5 = (0,1,0,1) \qquad v_6 = (-1,3,3,-1)$$

On note $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

1. Dire sans calculs si la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est libre.
2. Extraire de cette famille, une sous famille de rang maximal que l'on noter $\mathscr{E}$. Quelle est la dimension de F ?
3. Compléter $\mathscr{E}$ en une base de $\mathbf{R}^4$. On notera cette base $\mathscr{B}$.
4. Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ dans la base $\mathscr{B}$.

Solution :

1. La famille contient 6 vecteurs dans un espace de dimension 4, elle est donc nécessairement liée (lemme de Steinitz).
2. Une sous famille libre de rang maximal sera une base de l'espace vectoriel engendré. En effet, la famille est génératrice de F, mais elle est liée. On peut donc en extraire une base qui sera libre et génératrice (et aura autant d'éléments que la dimension de F). Ce sera une famille de rang maximal, car s'il existait une sous famille libre de rang supérieure, cela contredirait le lemme de Steinitz dans F.
   Pour trouver cette sous famille, on effectue le pivot de Gauss sur les matrices colonne correspondants au vecteurs de la famille.
   En effet, résoudre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 + \lambda_6 v_6 = (0,0,0,0)$, cela revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_6$ ont été écrit sous forme de matrices colonne et accolés. Pour que la famille soit libre, il faut que le système n'ait qu'une seule solution : que ce soit un système de Cramer en ayant autant de pivots que d'inconnues.
On effectue donc la méthode du pivot de Gauss en opérant sur les lignes[5]

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système a trois pivots, il est de rang 3, F est un sous espace de $\mathbf{R}^4$ de dimension 3. Pour obtenir une famille libre de cardinal maximal, on peut prendre les trois vecteurs qui donnent des pivots dans la matrice échelonnée : v_1, v_2, v_5.

3. (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de F, donc de $\mathbf{R}^4$. On peut donc la compléter en une base de $\mathbf{R}^4$.
Comme $\mathbf{R}^4$ est de dimension 3, il suffit de rajouter un quatrième vecteur qui n'appartient pas à F. Cela formera alors une famille libre à 4 éléments dans un espace de dimension 4 : c'est une base.
On cherche donc un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ qui n'appartienne pas à F. Pour cela on reprend la matrice précédente (on ne garde que les colonnes des v_1, v_2 et v_5) et on fait les mêmes opérations sur les lignes que précédemment en ajoutant le second membre (x, y, z, t).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 3 & 1 & -2x + y \\ 0 & 2 & 0 & -x + z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 3 & 1 & -2x + y \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z + t \end{pmatrix}$$

Ainsi, le vecteur n'appartient pas à l'espace si et seulement si on a un pivot à la dernière colonne. On peut donc prendre le vecteur $v_7 = (0, 0, 0, 1)$ par exemple.
Ainsi, mis, dans la matrice, cela donne 4 pivots : c'est une base de $\mathbf{R}^4$.

4. Pour exprimer un vecteur (x, y, z, t) comme combinaison linéaire des éléments de la base $\mathscr{B}$, on cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^4$ tel que $(x, y, z, t) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_5 v_5 + \lambda_7 v_7$.
On a donc un nouveau système linéaire à résoudre, que l'on obtient directement avec les mêmes calculs que précédemment :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z + t \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x - y + \frac{3}{2}z + t \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour le premier vecteur de la base canonique $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, on prend $x = 1$, et $y = z = t = 0$. On trouve donc $e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_5 + \frac{1}{2}v_7$.
On note

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10 Sous-espaces affines

Un espace vectoriel passe toujours par 0, mais en géométrie, on est souvent amené à translater de tels espaces pour étudier des plans ou des droites qui ne passent pas par l'origine.
Ainsi, nous avons décrit une droite *affine* par un point et un vecteur directeur.
Un sous-espace affine sera alors décrit par un point (qui correspond à une translation par rapport à l'origine) et une *direction* qui est un espace vectoriel.

5. Il existe une méthode duale qui consiste à travailler sur les colonnes, mais dans le cadre de notre cours, nous avons préféré concentrer toutes nos manipulations sur les lignes des matrices correspondants.

Définition 10.1 *(Sous-espace affine)*

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
Un **sous-espace affine** de E et une partie $\mathscr{F}$ de E de la forme

$$\mathscr{F} = x + F = \{x + f,\, f \in F\}$$

avec $x \in E$ (le point) et F un sous-espace vectoriel de E (la **direction**).

Propriété 10.2

La direction d'un sous-espace affine est unique.

Remarque : Par contre, le point x qui définit la translation ne l'est pas.

Preuve

Supposons que $\mathscr{F} = x + F = x' + F'$.
$0 \in F$, donc $x - x' \in F'$.
Pour $f \in F$, il existe $f' \in F'$ tel que $x + f = x' + f'$, donc $f = f' - (x - x')$. Or $f' \in F'$ et $(x - x') \in F'$, donc par stabilité par combinaison linéaire $f \in F'$, donc $F \subset F'$.
Et par symétrie des rôles $F' \subset F$, donc $F = F'$. ∎

Exemple

Quand on décrit une droite sous la forme paramétrique $(d) = \{A + t\overrightarrow{u}\}$, Vect $\overrightarrow{u}$ représente la direction de la droite.
(d) est simplement l'espace vectoriel Vect $\overrightarrow{u}$ translaté du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

$$\begin{aligned} B \in (d) &\iff \exists t \in \mathbf{K},\, B = A + t\overrightarrow{u} \\ &\iff \exists t \in \mathbf{K},\, \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{u} \\ &\iff \overrightarrow{AB} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right). \end{aligned}$$

Méthode *(Obtenir la direction vectorielle)*

Lorsque le sous-espace est défini par une représentation cartésienne, la direction est obtenue par l'équation homogène (sans second membre).

Explications

C'est ce que nous avons fait en géométrie pour retrouver une représentation paramétrique à partir d'une représentation cartésienne.
En effet, la structure des solutions est donnée par

Solutions $=$ solution particulière « $+$ » solutions de l'équation homogène.

La solution particulière correspond au point (par unique) et les solutions de l'équation homogène donnent la direction.

Exemple

Donner la direction de la droite affine (d) de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x - z + 2 = 1. \end{cases}$$

Solution :
On peut chercher une solution particulière, par exemple $x = 0; z = 1$ et $y = 4$.
On voit alors que $(x - 0)$, $(y - 4)$, $(z - 1)$ est solution de l'équation homogène.
On résout donc cette équation et on trouve, en fonction du paramètre x,

$$\begin{cases} y_h &= -4x_h \\ z_h &= 3x_h. \end{cases}$$

Les solutions s'écrivent donc

$$(d) = (0,\, 4,\, 1) + \operatorname{Vect}\left((1,\, -4,\, 3)\right).$$

On retrouve ce qu'on avait fait en géométrie.

Exemple

L'ensemble des équations différentielles linéaires forment un sous-espace affine de l'ensemble des fonctions dérivables.
Leur direction est donnée par les solutions de l'équation homogène.

Théorème 10.3 *(Égalité de deux sous-espaces affines)*

$\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux sous-espaces affines de E.
$\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont égaux si, et seulement s'ils ont même direction et un point commun.

Preuve

Le sens direct est trivial.
Pour le sens réciproque, on peut donc écrire $\mathscr{F} = x + F$ et $\mathscr{G} = x' + F$ avec F la direction commune et x et x' deux vecteurs de E.
Comme $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont un point commun, alors il existe $(f_1,\, f_2) \in F^2$ tel que $x + f_1 = x' + f_2$, donc $x - x' = f_1 - f_2 \in F$.
On peut donc écrire $\mathscr{G} = x' + F = x' + (x - x') + F = x + F = \mathscr{F}$ car $F = (x - x') + F$ (immédiat pour $x - x' \in F$). ∎

Corollaire 10.4 *(Description d'un sous-espace affine)*

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F.
Pour tout point $A \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F} = A + F$.

Preuve

Si on note $\mathscr{F}$ le sous-espace affine et $\mathscr{G} = A + F$, alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ ont la même direction vectorielle F et ont un point commun A. Donc ils sont égaux. ∎

Théorème 10.5 *(Intersection de sous-espaces affines)*

Soient $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de E.

$\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E.

Pour tout $i \in I$, on note F_i la direction du sous-espace affine $\mathscr{F}_i$.
Si $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est un sous-espace affine de E, alors il est de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$.

Remarque : Pour que l'intersection soit un sous-espace affine, il faut que tous les sous-espaces affines soient *concourants* (ou sécants) dans leur ensemble.

Preuve

Si les sous-espaces sont concourants, on note $A \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$.

Pour tout $M \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$, on a donc pour tout $i \in I$, $(A, M) \in (\mathscr{F}_i)^2$, donc $\overrightarrow{AM} \in F_i$.

Ainsi $\overrightarrow{AM} \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

La réciproque est évidente, donc $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i = A + \bigcap_{i\in I} F_i$. ■