Suites récurrentes définies par une fonction

Plus qu'un complément de cours, ce petit chapitre donne quelques méthodes et reflexes à avoir face à des suites récurrentes faisant intervenir des fonctions.
Toutes ces méthodes doivent pouvoir être redémontrées si cela est demandé.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et A un intervalle ou une réunion finie d'intervalles.
$f : A \to \mathbf{R}$ est une application.

1 Définition

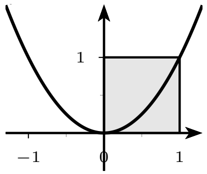
Pour pouvoir calculer $f(u_n)$, il faut s'assurer que u_n reste dans le domaine de définition de f pour tout $n \in \mathbf{N}$. Voire même, que u_n reste dans un domaine sur lequel f possèderait des propriétés qui rendent l'étude plus simple.
C'est l'objet de la définition suivante : trouver un domaine stable par la fonction. Intuitivement, si un point est dans ce domaine, on peut lui appliquer f autant de fois que l'on veut, l'image reste dans ce domaine. Ainsi, on peut restreindre f à ce domaine, appelé A ici.

Définition 1.1

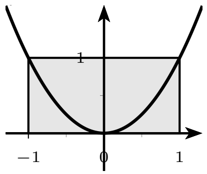
On dit que la partie $A \subset \mathbf{R}$ est **stable** par f, si $f(A) \subset A$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$. Montrer que $[0, 1]$ est stable par f.
$[-1, 1]$ est-il également stable ?
Solution :



f est croissante sur $[0, 1]$, donc $\forall x \in [0, 1]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire $f(x) \in [0, 1]$.
Donc $[0, 1]$ est stable par f.
Visuellement, les images par f de $[0, 1]$ sont également dans le segment $[0, 1]$: la courbe reste dans le rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$.



f est décroissante sur $[-1, 0]$,
donc $\forall x \in [-1, 0]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(-1)$, c'est-à-dire $f(x) \in [0, 1]$.
Ainsi, avec la question précédente,

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) \in [0, 1] \subset [-1, 1]$$

Donc $[-1, 1]$ est stable par f.

Définition 1.2

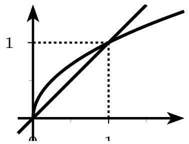
Un point $x_0 \in A$ est un **point fixe** de f si $f(x_0) = x_0$.

Un point fixe est un point qui n'est pas modifié par f : son image est égale à lui-même.
Une fois sur le point fixe, on « ne bouge plus ».
Géométriquement, un point fixe correspond à un point d'intersection entre la courbe de f et la courbe $y = x$.

Exemple

Chercher les points fixes de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Solution :
Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = x$, on trouve $x = 1$ et $x = 0$ comme seules solutions.
f admet deux points fixes 0 et 1.



Propriété 1.3

Si A *stable* par f, alors les relations $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ définissent une unique suite.
Dans ce cas, $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = f^n(u_0)$ où f^n désigne la composée n-ième de f.

Preuve

Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in A$. Ainsi la suite est bien définie (et de façon unique). L'expression en fonction des composées s'obtient par la récurrence. ∎

Exemple

Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

1. Montrer que $\forall u_0 > 0$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ définit une unique suite.
2. Montrer que les valeurs interdites pour u_0 peuvent être décrites par les termes d'une suite récurrente (v_n) de premier terme $v_0 = -1$.

Solution :

1. On montre que $\mathbf{R}_+^*$ est stable par f. En effet, $\forall x > 0$, $x + 1 > 0$, donc $f(x) > 0$.
   Ainsi $f(\mathbf{R}_+^*) \subset \mathbf{R}_+^*$.
   Or $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$, donc la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ et de façon unique.
2. La suite u n'est pas définie $\iff \exists n \in \mathbf{N},$ tel que $u_n = -1$
   $$\iff \exists n \in \mathbf{N}, \text{ tel que } f^n(u_0) = -1.$$
   Or, on remarque que f est bijective de $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbf{R}^*$.
   En effet, $\forall x \neq -1$, $f(x) \neq 0$, et $\forall y \neq 0$, $f(x) = y \iff \frac{1}{x+1} = y$
   $$\iff x + 1 = \frac{1}{y} \qquad (\text{car } y \neq 0)$$
   $$\iff x = \frac{1}{y} - 1.$$
   Donc f réalise une bijection de $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbf{R}^*$, et pour tout $x \neq 0$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$.
   Ainsi $\exists n \in \mathbf{N}$, tel que $f^n(u_0) = -1 \iff \exists n \in \mathbf{N}$, tel que $u_0 = \left(f^{-1}\right)^n(-1)$
   Donc les valeurs interdites sont décrites par les termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$.

2 Monotonie de la suite

A Comparer la position par rapport à la bissectrice

Méthode

La monotonie de la suite u dépend de la position de la courbe de f par rapport à la bissectrice $y = x$.

1. Si la courbe de f est au dessus de la bissectrice $y = x$, alors la suite est croissante.
2. Si la courbe de f est en dessous de la bissectrice $y = x$, alors la suite est décroissante.

On essaie de trouver un intervalle **stable** sur lequel la courbe est toujours du même côté de la bissectrice : la suite est alors monotone.

Si la suite oscille entre deux intervalles : l'un où $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe, et l'un où $\mathscr{C}_f$ est en dessous, on peut étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et essayer de montrer qu'elles sont adjacentes par exemple.

Preuve

$u_{n+1} > u_n \iff f(u_n) > u_n$.
Cela correspond à $f(x) > x$ pour $x = u_n$. ∎

Exemple

Voir les exercices.

B Utilisation de la monotonie de f

Théorème 2.1

Soit f une fonction croissante sur une partie A de $\mathbf{R}$ stable par f.
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in A$ et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Alors (u_n) est monotone et

- (u_n) est croissante si $u_1 > u_0$,
- (u_n) est décroissante si $u_1 < u_0$,
- (u_n) est constante si $u_1 = u_0$.

Preuve

Par récurrence, une fonction croissante conserve le sens des inégalité :

$$u_{n+1} > u_n \iff f(u_{n+1}) > f(u_n) \iff u_{n+2} > u_{n+1}.$$

∎

Théorème 2.2

Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.

Preuve

Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante.
Donc d'après le théorème 2.1, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
Supposons que (u_{2n}) soit croissante, alors $u_2 > u_0$, et par décroissance de f : $u_3 = f(u_2) < u_1 = f(u_0)$.
Donc (u_{2n+1}) est décroissante.
De même, si (u_{2n}) est décroissante, alors (u_{2n+1}) est croissante.
Et si l'une est constante, l'autre aussi. ■

⚠

- f croissante n'implique **pas** que (u_n) soit croissante, mais qu'elle est monotone.
  f décroissante n'implique **pas** que (u_n) soit décroissante.

- Penser à vérifier que le domaine sur lequel f est monotone est **stable** par f.

3 Utilisation de la continuité de f

Théorème 3.1

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}$, *continue* sur une partie $A \subset \mathbf{R}$ stable par f.
On définit une suite (u_n) par $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in A$, alors ℓ est un point fixe de f.

Preuve

Par continuité : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(\ell)$.
Par égalité des limites on en déduit : $f(\ell) = \ell$. ■

⚠ La réciproque est fausse : une fonction peut avoir un point fixe sans que la suite soit convergente.

Méthode *(Montrer que la suite diverge)*

Pour f continue.
Pour montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$ diverge, on peut

- Montrer que f n'admet pas de point fixe (ou pas de point fixe atteignable).
- Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas vers la même limite.

Exemple

Soit $u_0 \in \mathbf{R}$, et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2$.
Étudier la suite.

Solution :

On pose $f : x \mapsto x^2$. Comme f est définie sur $\mathbf{R}$, la suite est définie de façon unique.
Si $u_0 \leqslant 0$, alors $u_1 \geqslant 0$, donc quitte à décaler la suite d'un rang, on peut supposer $u_0 \geqslant 0$.
Or $f(\mathbf{R}_+) \subset \mathbf{R}_+$ ($\mathbf{R}_+$ est stable par f), donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant 0$.

- si $u_0 \in [0, 1[$ alors par récurrence immédiate, on montre que la suite est décroissante (la courbe de f est en dessous de la bissectrice $y = x$),
  Et la suite est minorée par 0, donc elle converge.
  Comme f est continue, alors (u_n) converge vers un point fixe de f.
  Or 0 est le seul point fixe de f inférieur à u_0.
  Donc (u_n) converge vers 0.
- si $u_0 = 1$, alors la suite est constante égale à 1.
- si $u_0 > 0$, alors par par récurrence immédiate, (u_n) est croissante.
  si la suite converge, alors elle converge vers un point fixe de f.
  Or f n'admet par de point fixe supérieur à $u_0 > 1$.
  Donc (u_n) diverge et tend vers $+\infty$.

4 Utilisation du théorème des accroissements finis

Méthode

L'inégalité des accroissements finis est très utile pour donner des encadrements et prouver des convergences pour les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.
Après avoir vérifié les hypothèses, si ℓ est un point fixe de f,

$$|u_{n+2} - \ell| = |f(u_{n+1}) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_{n+1} - \ell|\,.$$

Et par récurrence immédiate :

$$|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|.$$

Si $k < 1$, alors $k^n \to 0$ et on peut appliquer le théorème d'encadrement : $u_n \to \ell$.

⚠ Ne pas négliger la vérification des hypothèses :

- Il faut travailler sur un intervalle stable $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in [a, b]$.
  éventuellement qu'à partir d'un certain rang, quitte à ne pas faire la récurrence à partir de u_0.
- $\ell \in [a, b]$ avec $f(\ell) = \ell$.
- f est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$.
- $\forall x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leqslant k$.

Ceci n'est intéressant que pour $k < 1$. (inégalité stricte).
Il en découle le théorème suivant.

Théorème 4.1 *(⋆ Théorème du point fixe de Banach-Picard)*

(Hors programme)
Soit I un intervalle. On considère une application $f : I \to \mathbf{R}$, k-lipschitzienne sur I, avec I **stable** par f.
On suppose $k < 1$ (on dit que f est **contractante**).
Alors

- f admet un unique point fixe x^* sur I,
- la suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x^* (quelque soit $x_0 \in I$).

Le théorème en tant que tel est hors programme, mais le fait de connaître ce résultat peut aider à traiter des cas particuliers dans des exercices (pour lesquelles, il faudra réaliser une preuve complète).

Preuve

Aucune preuve générale n'est donnée ici. Voir l'exercice dans la feuille de TD. ■

Exemple

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(u_n).$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2}\cos(\ell)$.
   Montrer que $\ell \in [0; 1]$.
2. Montrer que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. On pose $f\ : x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x)$ et $g\ : x \mapsto f(x) - x$. $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(1) < 0$.
   Or g est continue sur $[0,\, 1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x^* \in [0,\, 1]$ tel que $g(x^*) = 0$, c'est-à-dire $f(x^*) = x^*$.
   De plus, g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) - 1 < 0.$$
   Donc g est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ (donc injective), donc le point fixe est unique.
2. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbf{R},\ \left|f'(x)\right| = \frac{1}{2}\left|\sin(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$
   D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc pour tout $n \in \mathbf{N}$:
   $$\left|u_{n+1} - x^*\right| = \left|f(u_n) - f(x^*)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - x^*\right|.$$
   Donc par récurrence immédiate :
   $$\left|u_n - x^*\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|u_0 - x^*\right|.$$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et $\left|u_0 - x^*\right|$ est une constante qui ne dépend pas de n, donc par encadrement
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = x^*.$$