Applications linéaires

« La règle de trois est la première, la plus utile et la plus belle de toutes les règles d'arithmétique.
Car toutes les autres ont besoin d'elle, et de toutes elle se passe. »
L'arithmétique nouvellement composée
par Estienne de La Roche (1470-1530)

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avons étudié les objets de façon *statique* à l'instar de ce qui a été fait avec les ensembles finis.
À présent, nous nous penchons sur l'étude *dynamique* des espaces vectoriels grâce aux applications qui agissent sur ces espaces. Par leur action, elles permettent la mise en relation de différents espaces, leur déformation géométrique...
Cela donnera également un éclairage nouveau sur les matrices en offrant un cadre géométrique adapté à leur interprétation.

Le cours sur les applications linéaires est scindé en deux chapitres indissociables :

- Le premier, sur ce document traite davantage des aspects géométriques *intrinsèques*. Il est plus formel et théorique, mais permet une compréhension fine des objets, à la fois en dimension finie et infinie.
- Le second chapitre, s'intéressera à l'approche calculatoire *matricielle*.
  Bien qu'uniquement valable en dimension finie, cette vision permet de ramener de nombreux problèmes à de simples exercices calculatoires.
  Et réciproquement, elle permettra, d'interpréter les matrices et calculs matriciels à l'aide des applications linéaires et de leur faire bénéficier de l'approche géométrique.

Attention, ces chapitres sont assez longs et comprennent beaucoup de théorèmes. Cependant cette abondance de théorèmes est plutôt une bonne nouvelle : cela veut dire qu'il existe souvent un théorème pas loin de ce que l'on cherche, et qu'il n'est donc pas nécessaire de faire de grands raisonnements pour s'y raccrocher.

Notations : Dans tout le chapitre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Définitions

Les applications étudiées ici ne sont pas quelconques. Au contraire, nous allons nous concentrer sur des applications qui respectent la structure de l'espace vectoriel.
En d'autres termes, toute opération faite dans l'espace de départ, doit se retrouver, à l'identique, dans l'espace d'arrivée.

Par exemple, si on multiplie un vecteur par un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ dans l'espace de départ E, alors, cela doit revenir à multiplier son image par le même scalaire λ. De même, additionner deux vecteurs dans l'espace de départ, doit revenir à additionner leurs images dans l'espace d'arrivée.

Ces propriétés très restrictives permettent de *transporter* notre travail entre deux espaces. Ainsi, il est possible d'effectuer toutes sortes d'opérations sur un espace source E et elles sont alors appliquées, de facto, sur l'autre espace F par l'intermédiaire de l'application.

En algèbre *générale*, les applications qui respectent la structure de l'ensemble sont appelées *morphismes* : elles préservent la forme. Dans le cas particulier des espaces vectoriels, on parle davantage d'applications linéaires : la raison apparaît clairement avec les exemples et la définition qui suit.

Exemple

On définit l'espace vectoriel E correspondant aux paniers de courses possibles de votre professeur préféré le vendredi soir.
Pour simplifier, on ne comptabilise que les courgettes, les aubergines et les litrons de rouge qui constituent l'essentiel du panier. On modélise donc le panier par un triplet $(c, a, r) \in \mathbf{R}^3$ où c représente le poids de courgettes, a, le poids d'aubergines et r le litrage de rouge.
Pour avoir une structure d'espace vectoriel, on accepte les valeurs négatives (denrées rendues au commerçant).

On munit donc $E = \mathbf{R}^3$ de sa structure d'espace vectoriel usuelle et on définit l'application f qui donne le prix du panier ainsi composé. On s'aide des prix unitaires suivants (supposés invariables d'un vendredi sur l'autre) :

- les courgettes valent 3 €/kg,
- les aubergines valent $4,5$ €/kg,
- le litron de rouge vaut $2,5$ €.

On a donc $\quad \forall (c, a, r) \in \mathbf{R}^3, \quad u(c, a, r) = 3\,c + 4,5\,a + 2,5\,r.$
On remarque que les commerçants sont durs en affaires et ne font aucune réduction lors des achats en grande quantité. Ainsi, le prix du panier suit une règle de proportionnalité selon la quantité de denrées qui le composent : par exemple, si on double la quantité de chacune des trois denrées, alors le prix du panier est également doublé : $u(2\,c, 2\,a, 2\,r) = 2\,u(c, a, r)$.

Plus généralement, pour toute multiplication des quantités par $\lambda \in \mathbf{R}$, le prix est aussi multiplié par λ :

$$\forall (c,a,r) \in \mathbf{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\ u(\lambda c, \lambda a, \lambda r) = \lambda u(c,a,r)$$

Si on note $x = (c,a,r)$ le panier considéré, alors $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.
De même, si on note x, le panier de vendredi dernier et y celui de cette semaine. Le prix des deux paniers mis ensemble est égal à la somme des prix des deux paniers considérés séparément : $u(x+y) = u(x) + u(y)$.
Ces deux propriétés définissent une application linéaire.

Ce n'est pas plus difficile que cela : ce chapitre reprend l'étude de la proportionnalité vue au collège.

Exemple

Dans l'exemple précédent, l'application était à valeurs dans $\mathbf{R}$.
On peut tout aussi bien créer une application à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ si l'image est le couple « (prix, volume) ».
On définit[1] alors $u : (c,a,r) \mapsto (3\,c + 4,5\,a - 2,5\,r\ ;\ c + a + r)$ qui est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$: on note $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$.
Tout ce qu'il faut pour que l'application soit linéaire, c'est que les quantités image (ici le prix et le volume) suivent la règle de proportionnalité par rapport aux données source (ici les denrées).

Définition 1.1 *(L'espace des applications linéaires)*

Soient E et F, deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbf{K}$.
Une application $u : E \to F$ est dite $\mathbf{K}-$linéaire si elle vérifie **une** des assertions suivantes (équivalentes) :

- $\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2,\ \ u(x+y) = u(x) + u(y) \\ \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \forall x \in E,\ u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases}$.
- $\forall \lambda \in \mathbf{K},\ \ \forall (x,y) \in E^2,\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2,\ \ \forall (x,y) \in E^2,\ u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Ainsi, les applications linéaires respectent les deux opérations des espaces vectoriels : l'addition et la multiplication externe.

une application linéaire traduit un rapport de proportionnalité.

Remarque : lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur le choix de $\mathbf{K}$, on parle d'application linéaire au lieu de $\mathbf{K}-$linéaire.

1. On suppose que les trois aliments ont la même densité, ce qui n'est pas tout à fait réaliste, mais même si on prend en compte les différences de densité, on obtient une application linéaire.

Exemple

L'application $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est-elle une application $\mathbf{R}-$linéaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$?
Solution :
u n'est clairement pas linéaire : elle ne traduit pas un rapport de proportionnalité.
Un contre-exemple suffit pour le montrer : $u(1) = \mathrm{e}$, mais $u(0 \times 1) = 1 \neq 0 \times u(1)$.

Exemple

Donner l'ensemble des applications $\mathbf{R}-$linéaires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Solution :
Ce sont les applications de proportionnalité : c'est-à-dire les applications $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbf{R}$ (ce n'est pas pour rien si elles s'appellent « *linéaires* »).
On peut le démontrer par analyse-synthèse :
Analyse : si on suppose que $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une application $\mathbf{R}-$linéaire, alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ u(x) = u(x \times 1) = x\,u(1).$$

Si on note $a = u(1)$, alors $\forall x \in \mathbf{R},\ u(x) = ax$.
Synthèse : si $a \in \mathbf{R}$, et $u : x \mapsto ax$, alors u est bien linéaire. En effet,

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbf{R},\quad u(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda a x + a y = \lambda u(x) + u(y).$$

Conclusion :
$u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{R}-$linéaire si et seulement s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u : x \mapsto ax$.

Propriété 1.2 *(Action d'une application linéaire)*

- Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $u(0_E) = 0_F$.
- L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.
- L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.
- La restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel est encore une application linéaire.

Explications

À nouveau, ces propriétés traduisent le fait que l'application linéaire respecte la structure d'espace vectoriel. En particulier, si la stabilité est vérifiée dans l'espace de départ, alors elle se trouve naturellement vérifiée dans l'image : l'image est un espace vectoriel.

Preuve

- $u(0_E) = u(0_{\mathbf{K}} \cdot 0_E) = 0_{\mathbf{K}} \cdot u(0_E) = 0_F$.
- Soit G un sous-espace vectoriel de E, montrons que $u(G)$ est un sous espace vectoriel de F.
  - $0_E \in G$ (car G est un sev de E), et donc $0_F = u(0_E) \in u(G)$.

– Soit $(y,y') \in (u(G))^2$, et $\lambda \in \mathbf{K}$,
il existe $(x,x') \in G^2$ tel que $y = u(x)$ et $y' = u(x')$ (définition de l'image directe).
Or $y + \lambda y' = u(x) + \lambda u(x') = u(x + \lambda x')$. On peut donc poser $z = x + \lambda x'$.
G est stable par combinaison linéaire, donc $z \in G$, ainsi $y + \lambda y' = u(z) \in u(G)$.

Donc $u(G)$ non vide et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée F.

- Soit F' un sous-espace vectoriel de F.
Montrons que $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E. Tout d'abord $u(0_E) = 0_F \in F'$ car F' est un espace vectoriel.
Donc $0_E \in u^{-1}(F')$.
Soit $(x,\, x') \in u^{-1}(F')$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Par définition de x et x' il existe $(y,\, y') \in F'$ tel que $u(x) = y$ et $u(x') = y'$.
Donc $u\,(x + \lambda x') = u(x) + \lambda u(x') = y + \lambda y'$.
Or F' est stable par combinaison linaire, donc $y + \lambda y' \in F'$, donc $x + \lambda x' \in u^{-1}(F')$.
Ainsi $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Soit G un sous-espace vectoriel de E. On note $u_{|G}$ la restriction de u à G.
Alors $\forall (x,x') \in G$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$,
$u_{|G}\,(x + \lambda x') = u\,(x + \lambda x') = u(x) + \lambda u(x') = u_{|G}(x) + \lambda u_{|G}(x')$.
Donc $u_{|G}$ est linéaire.

■

Exemple

L'application $u : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, y-1, y) \end{cases}$ est-elle linéaire ?

Solution :
$u(0,0,0) = (0,-1,0) \neq (0,0,0)$.
D'après la propriété 1.2, l'application u n'est pas linéaire.

Méthode

Quand on demande de vérifier si une application u est linéaire, la première chose à faire est de calculer $u(0)$.

Propriété 1.3

u est une application linéaire de E dans F si, et seulement si l'image de toute combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.
C'est-à-dire

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in E^I,\ \forall\,(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)},\ u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(x_i).$$

Preuve

Le sens réciproque est évident (la définition en est un cas particulier).
On prouve le sens directe par une récurrence sur le nombre d'éléments (fini) de la combinaison linéaire. ■

Définition 1.4 *(Applications particulières)*

- On appelle **endomorphisme** de E toute application linéaire de E dans E.
On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On appelle **morphisme identité**, l'endomorphisme $x \mapsto x$ de E dans E.
On le note Id_E.
- On appelle **isomorphisme** toute application linéaire bijective.
- On appelle **automorphisme** tout endomorphisme bijectif.
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- On appelle **forme linéaire** toute application linéaire à valeurs dans $\mathbf{K}$.
- On appelle **dual** d'un espace vectoriel E l'ensemble des formes linéaires sur E.
On le note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$.

⚠ Il ne faut pas confondre le dual E^* avec l'ensemble $E \setminus \{0\}$.
Nous verrons que le dual de E est un espace vectoriel.

Exemple

L'application $u : \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ définie par $u(f) = f(0)$ est une forme linéaire.
L'application $v : \mathscr{C}^0([a,b], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par $v(f) = \int_a^b f$ est une forme linéaire.

Explications

Le morphisme identité ne *fait rien*. Il reste dans le même espace et ne modifie pas l'objet qu'il prend en argument. Nous verrons qu'il joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition entre endomorphismes.
Un isomorphisme, est un morphisme qui agit de façon réversible : il existe une application réciproque qui fait le travail inverse. En particulier, il ne perd, ni n'ajoute aucune information au vecteur sur lequel il agit. Nous verrons qu'un isomorphisme transforme un espace vectoriel en un autre de même nature géométrique : une droite en une autre droite, un plan en un plan...
Un automorphisme est un isomorphisme qui agit au sein du même espace vectoriel : l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes. Géométriquement, il déforme l'espace de façon réversible. Par exemple, les rotations sont des automorphismes du plan.

Exemple

L'application qui donne le couple (prix, volume) en fonction du panier de courses (exemples précédents) est une application linéaire non bijective. Ce n'est pas un isomorphisme. La connaissance du couple (prix, volume) ne me permet pas de retrouver la composition exacte du panier (pas injectif).

Exemple

- L'application nulle de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ est un endomorphisme non bijectif.
- $u : \begin{cases} \mathbf{K}^2 & \to \mathbf{K}_1[X] \\ (a_0, a_1) & \mapsto a_0 + a_1 X \end{cases}$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}^2$ dans $\mathbf{K}_1[X]$.
  En effet, l'application est linéaire et elle est bijective car pour tout polynôme $P \in \mathbf{K}_1[X]$, il existe un unique couple $(a_0, a_1) \in \mathbf{K}^2$ tel que $P = a_0 + a_1 X = u\,(a_0, a_1)$.
- $u : \begin{cases} \mathbf{C}^2 & \to \mathbf{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto (y, x) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbf{C}^2$.
- Les homothéties de rapport non nul sont des automorphismes : pour $n \geqslant 1$ et $\lambda \neq 0$, $u : \begin{cases} \mathbf{K}^n & \to \mathbf{K}^n \\ x & \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}$.

Définition 1.5

S'il existe un isomorphisme $f \in \mathscr{L}(E, F)$,
alors on dit que les deux espaces E et F sont **isomorphes**.

On verra que cela revient à avoir la même nature géométrique.
Savoir que deux espaces sont isomorphes est très pratique. Cela veut dire que toutes les opérations et propriétés (liées à la structure d'espace vectoriel) que l'on aura démontré pour l'un pourront être transposées à l'autre par l'intermédiaire de l'isomorphisme. Ces deux espaces se comportent donc comme s'il s'agissait de deux images déformées du même espace.

Exemple

$\mathbf{K}^2$ et $\mathbf{K}_1[X]$ sont isomorphes (avec l'application de l'exemple précédent).
Ainsi travailler les polynômes ou sur les listes de leurs coefficients revient au même (uniquement pour la somme et le produit par un scalaire, pas pour le produit de polynômes entre eux qui ne fait pas partie de la structure d'espace vectoriel).

Exemple

Montrer qu'un espace vectoriel E est toujours isomorphe à lui-même.
Solution :
On prend l'application identité qui est un automorphisme de E.

Ici, nous avons défini les applications linéaires *individuellement* : chacune de leur côté. Mais si on prend un peu de recul, on peut s'apercevoir qu'il existe une harmonie entre elles. Ou pour parler plus mathématiquement, que l'on peut doter l'ensemble des applications linéaires de structures algébriques.
Ainsi, nous allons voir que $(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$ est lui-même un espace vectoriel.

Propriété 1.6 *(Opérations sur les applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels

- La somme de deux applications linéaires de $\mathscr{L}(E, F)$ est une application linéaire.
  $\longrightarrow$ $\mathscr{L}(E, F)$ est stable par somme.
- Toute combinaison linéaire d'applications linéaires de $\mathscr{L}(E, F)$ est une application linéaire de $\mathscr{L}(E, F)$.
  $\longrightarrow$ $\mathscr{L}(E, F)$ est stable par combinaison linéaire.

$$(\mathscr{L}(E,\ F), +, \cdot) \text{ est un espace vectoriel,}$$
$$(\mathscr{L}(E),\ +,\ \cdot) \text{ est un espace vectoriel,}$$
$$(E^*,\ +,\ \cdot) \text{ est un espace vectoriel.}$$

En outre :

- La composée[2] de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.

Preuve

- Soient u et v deux applications linéaires de $\mathscr{L}(E, F)$. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}$,
  $$\begin{aligned}(u+v)\,(\lambda x + y) = u\,(x + \lambda y) + v\,(x + \lambda y) &= u(x) + \lambda u(y) + v(x) + \lambda v(y) \\ &= (u+v)\,(x) + \lambda\,(u+v)\,(y).\end{aligned}$$
  Donc $u + v$ est linéaire : $u + v \in \mathscr{L}(E, F)$.
- Il ne reste qu'à montrer le produit par un scalaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mu \in \mathbf{K}$.
  $$\begin{aligned}\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad (\mu u)\,(\lambda x + y) = \mu u\,(x + \lambda y) &= \mu u(x) + \mu \lambda u(y) \\ &= (\mu u)\,(x) + \lambda\,(\mu u)\,(y).\end{aligned}$$
  Donc $(\mathscr{L}(E,\ F),\ +,\ \cdot)$ est un espace vectoriel.
  $\mathscr{L}(E)$, et E^* sont des cas particuliers avec F valant respectivement E et $\mathbf{K}$.
- Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. ⚠ $v \notin \mathscr{L}(E, F)$ pour que la composée existe.
  $$\begin{aligned}\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad (v \circ u)\,(\lambda x + y) &= v\,(u\,(x + \lambda y)) \quad \text{(linéarité de } u\text{)} \\ &= v\,(u(x) + \lambda u(y)) \\ &= v\,(u(x)) + \lambda v\,(u(y)) \quad \text{(linéarité de } v\text{)} \\ &= (v \circ u)\,(x) + \lambda\,(v \circ u)\,(y).\end{aligned}$$
  Donc $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.

2. Sous réserve que les espaces de départ et d'arrivée correspondent pour que la composition soit possible.

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective, alors u admet une réciproque u^{-1}, mais rien ne dit a priori que u^{-1} est aussi linéaire.
  Soient $(y,y') \in F$, $\lambda \in \mathbf{K}$, on pose $x = u^{-1}(y)$ et $x' = u^{-1}(y')$.
  $$\begin{aligned} u^{-1}\left(y+\lambda y'\right) = u^{-1}\left(u(x)+\lambda u(x')\right) &= u^{-1}\left(u\left(x+\lambda x'\right)\right) \quad \text{(linéarité de } u\text{)} \\ &= x+\lambda x' \quad (\text{car } u^{-1}\circ u = \mathrm{Id}_E) \\ &= u^{-1}(y)+\lambda u^{-1}(y'). \end{aligned}$$
  Donc $u^{-1} \in \mathscr{L}(E,F)$.

■

Corollaire 1.7 *(Anneau des endomorphismes)*

$$(\mathscr{L}(E),\, +,\, \circ) \ \text{ est un anneau.}$$

On pourra noter $u\circ v = uv$ pour la composition.

Remarque : Cet anneau n'est pas commutatif pour $\dim(E) \geqslant 2$.

Exemple

Soit $u\ : (x,\, y) \mapsto (x+y,\, x)$, $v\ : (x,\, y) \mapsto (-x,\, y)$.
u et v sont des endomorphismes de $\mathscr{L}(\mathbf{K}^2)$ qui ne commutent pas.
En effet $uv(x,\, y) = u(-x,\, y) = (-x+y,\, -x)$ et $vu(x,\, y) = v(x+y,\, x) = (-x-y,\, x)$.
Par exemple pour $x = 1$, les images sont différentes.

Exemple

Montrer qu'en dimension nulle ou en dimension 1, $(\mathscr{L}(E),\, +,\, \circ)$ est commutatif.

Solution :
En dimension nulle, la seule application est l'application nulle qui commute avec elle-même.
En dimension 1, on peut identifier les applications avec les scalaires (« coefficients directeurs ») et la commutativité des applications est simplement la commutativité du produit dans $\mathbf{K}$.

Corollaire 1.8

Soit E un espace vectoriel,

- $\mathrm{GL}(E)$ est stable par composition,
- si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $u^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

$$(\mathrm{GL}(E),\, \circ) \text{ est un groupe.}$$

Remarque : Sauf pour $\dim(E) \leqslant 1$, le groupe n'est pas commutatif.

Preuve

- La composée de deux applications linéaires est encore linéaires, et la composition de deux bijections est une bijection.
- Nous avons vu que u^{-1} est linéaire. De plus, elle est bijective de réciproque u. Ainsi $u \in \mathrm{GL}(E)$.
- L'associativité est immédiate.
  L'élément neutre est Id_E.

■

Exemple

Montrer que l'application $u : (x,y,z) \mapsto (x+y,z,x-z)$ est un automorphisme de $\mathbf{K}^3$ et donner son application réciproque.

Solution :
Pour montrer que u est linéaire, il suffit de remarquer que l'image de (x,y,z) par u est obtenue par combinaison linéaire des coefficients du vecteur (x,y,z). Cela suffit.
Si on veut le montrer avec la définition (ce qu'il faut aussi savoir faire) :
Soient $(a,a') \in \left(\mathbf{K}^3\right)^2$, et $\lambda \in \mathbf{K}$, on note $a = (x,y,z)$ et $a' = (x',y',z')$.
$$\begin{aligned} u\left(a+\lambda a'\right) &= u\left(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z'\right) \\ &= \left(x+\lambda x'+y+\lambda y', z+\lambda z', x+\lambda x' - \left(z+\lambda z'\right)\right) \\ &= \left(x+y+\lambda(x'+y'), z+\lambda z', x-z+\lambda(x'-z')\right) \\ &= (x+y,z,x-z)+\lambda\left(x'+y',z',x'-z'\right) \\ &= u\left(x,y,z\right)+\lambda u\left(x',y',z'\right) \\ &= u(a)+\lambda u\left(a'\right) \end{aligned}$$
Donc u est bien linéaire.
Pour montrer que c'est un isomorphisme, il faut donc montrer qu'elle est bijective, c'est-à-dire que pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{K}^3$, il existe un unique antécédent (x,y,z) par u.
Cela revient donc à résoudre $u(x,y,z) = (\alpha,\beta,\gamma)$, ce qui permettra de trouver l'application réciproque en même temps.
$$\begin{aligned} u(x,y,z) = (\alpha,\beta,\gamma) &\iff (x+y,z,x-z) = (\alpha,\beta,\gamma) \\ &\iff \left\{\begin{array}{rrl} x+y & & =\alpha \\ & z & =\beta \\ x & -z & =\gamma \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x & =\beta+\gamma \\ y & =\alpha-\beta-\gamma \\ z & =\beta \end{array}\right. \end{aligned}$$
Donc u est un isomorphisme d'application réciproque
$$u^{-1} : (\alpha,\beta,\gamma) \mapsto (\beta+\gamma, \alpha-\beta-\gamma, \beta)\,.$$

Propriété 1.9 *(Bilinéarité de la composition)*

La composition est bilinéaire.

- Elle est linéaire à droite :
  $$\forall (u,\, u') \in (\mathscr{L}(E,\, F))^2\,,\, \forall v \in \mathscr{L}(F,\, G),\, \forall \lambda \in \mathbf{K},\, v\circ(u+\lambda u') = v\circ u + \lambda v\circ u'.$$
- Elle est linéaire à gauche :
  $$\forall u \in \mathscr{L}(E,\, F),\, \forall (v,\, v') \in (\mathscr{L}(F,\, G))^2\,,\, \forall \lambda \in \mathbf{K},\, (v+\lambda v')\circ u = v\circ u + \lambda v'\circ u.$$

2 Image et noyau

E et F désignent deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Définition 2.1

L'**image** de u est l'image directe de E par u.

$$\mathrm{Im}\,(u) = u\,(E) = \{u(x),\ x \in E\}.$$

Le **noyau** de f est l'ensemble des antécédents de 0_F par f.

$$\mathrm{Ker}\,(u) = u^{-1}\,(\{0_F\}) = \{x \in E, u(x) = 0_F\}.$$

Propriété 2.2

$\mathrm{Im}\,(u)$ est un sous espace vectoriel de F. $\mathrm{Ker}\,(u)$ est un sous espace vectoriel de E.

Preuve

On utilise la propriété 1.2 avec l'image directe et réciproque. ■

Exemple

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4,\ \text{tel que } x + y - 3z = 0 \text{ et } z = y + t\}$.
Interpréter E comme le noyau d'une application linéaire.

Solution :

On pose $u : (x, y, z, t) \mapsto (x+y-3z,\ z-y-t)$. u est clairement une application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^2$ et $E = \ker(u)$. Il en découle que E est un espace vectoriel.

Exemple

Soit $u : (x, y) \mapsto (x, x + y, 2x - y)$. Donner une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\,(u)$.

Solution :

On résout $u(x, y) = (a, b, c)$ pour voir à quelle condition sur (a, b, c) il y a des solutions.

$$u(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x = a \\ x+y = b \\ 2x-y = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = -a+b \\ 2x-y = c \end{cases}$$

Le système admet des solutions si et seulement si

$$2x - y = c \iff 2a - (-a + b) = c \iff 3a - b = c$$

Donc $\mathrm{Im}\, u = \{(a, b, 3a - b), (a, b) \in \mathbf{K}^2\} = \{a(1, 0, 3) + b(0, 1, -1),\ (a, b) \in \mathbf{K}^2\}$.

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\,((1, 0, 3)\,, (0, 1, -1))\,.$$

C'est un plan de $\mathbf{R}^3$.

Théorème 2.3 *(Caractérisation des applications injectives et surjectives)*

1. u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0_E\}$.
2. u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(u) = F$.

Explications

C'est la caractérisation des applications injectives qui servira le plus (pour la surjectivité, c'est simplement la définition qui est rappelée ici). Dès que l'on demande de montrer qu'une application est injective, il faut penser à étudier son noyau.
Cette caractérisation traduit bien la rigidité d'une application linéaire : pour étudier l'unicité de l'antécédent de n'importe quelle image, il suffit de le faire pour 0 et cela donne le résultat pour tout le reste de l'espace vectoriel !
Cette propriété doit rappeler ce qui a été vu pour les familles libres ou les sommes directes où l'unicité d'une décomposition pour un vecteur quelconque, n'avait besoin d'être vérifiée que pour 0.

Preuve

1. - *(sens direct)* $u(0_E) = 0_F$ car u est linéaire (cf propriété 1.2).
     Et par unicité de l'antécédent, $\ker(u) = \{0_E\}$.
   - *(sens réciproque)*
     On suppose $\ker(u) = \{0_E\}$ et on cherche à montrer que u est injective.
     Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $u(x) = u(x')$.
     Alors $u(x) - u(x') = 0_F$ et par linéarité, $u(x - x') = 0_F$.
     Ainsi $x - x' \in \mathrm{Ker}\,(u)$, et d'après notre hypothèse : $x - x' = 0_E$.
     Donc $x = x'$ et l'application est injective.
2. C'est la définition d'une application surjective : rien de spectaculaire.

■

Exemple

Soit $u : (x, y, z, t) \mapsto (x + 2y - z + t, x + y, -z - t)$.
L'application u est-elle injective ?

Solution :

u est clairement linéaire de $\mathbf{K}^4$ dans $\mathbf{K}^3$ car les coordonnées de l'image s'écrivent comme combinaison linéaire des coefficients du vecteur (x, y, z, t).
Pour étudier l'injectivité, il suffit de chercher le noyau :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}\,(u) &\iff u\,(x,y,z,t) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+2y-z+t = 0 \\ x+y = 0 \\ x+y-z-t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y = 0 & \leftarrow L_2 \\ y-z+t = 0 & \leftarrow L_1 - L_2 \\ -z-t = 0 & \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}\end{aligned}$$

Le système a trois pivots x, y, z et un paramètre t : il admet donc une infinité de solutions. Donc $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$, ainsi u n'est pas injective.

☝ On remarque que s'il y a plus d'équations que d'inconnues, alors le système admet nécessairement au moins un paramètre : l'application n'est pas injective.
Ceci permet de voir qu'une application de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ ne peut pas être injective si $n \geqslant p$. Nous reverrons ce théorème un peu plus loin.

3 Décomposition d'une application sur une somme directe

Théorème 3.1 *(Décomposition d'une application sur une somme directe)*

Soient $E_1, E_2, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n.$$

Soient $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, ..., $u_n \in \mathscr{L}(E_n, F)$.
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_{|E_i} = u_i$.

Preuve

unicité : $\forall x \in E$, on peut décomposer x de façon unique sur la somme directe :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

avec $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E_i$.
Alors, on a nécessairement $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_{|E_i}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$.
Ce qui montre bien que u est définie de manière unique.
existence : On définit u comme vu au point précédent :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i)$$

où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ sur la somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
On vérifie alors aisément que $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et que ses restrictions aux E_i sont bien égales à u_i. ■

4 Image d'une famille de vecteurs

A Cas général

Théorème 4.1 *(Image d'une famille génératrice)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E alors $(u(x_i))_{i\in I}$ est génératrice de $u(E)$.
Autrement dit :

$$E = \text{Vect}\ (x_i)_{i\in I} \Rightarrow u\,(E) = \text{Vect}\ (u(x_i))_{i\in I}.$$

L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image.

Explications

Ce résultat est très intuitif : si on arrive à construire entièrement l'espace de départ à partir d'une famille de vecteurs (génératrice), alors tous les vecteurs $u(E)$ qui s'obtiennent comme images des vecteurs de E, pourront également être obtenus à partir de cette famille, via l'application linéaire.

Preuve

Soit $y \in \text{Im}\,(u)$, alors par définition de l'image, il existe un antécédent x : $u(x) = y$.
Or x peut être décomposé dans la famille génératrice $(x_i)_{i\in I}$: $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.
avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$. Donc $y = u(x) = u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right)$.
Par linéarité de u,

$$y = \sum_{i\in I} \lambda_i u(x_i).$$

Ainsi, tout $y \in \text{Im}\,(u)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(u(x_i))_{i\in I}$.
Donc $(u(x_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\text{Im}\,(u)$. ■

Corollaire 4.2

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E.
u est surjective si, et seulement si $F = \text{Vect}\ (u(x_i))_{i\in I}$.

Si la famille, en plus d'être génératrice est également libre, alors on dispose d'une base et chaque vecteur de E peut se décomposer de façon unique dans cette famille. Cela permettra donc de caractériser l'application linéaire à partir des images de ces vecteurs : il suffit de connaître les images des éléments de la base pour connaître complètement l'application linéaire.

Théorème 4.3 *(Caractérisation par l'image d'une base)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{E} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E.
u est décrite de manière unique par son action sur la base : $(u(e_i))_{i\in I}$.
Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\text{si} \quad x = \sum_{j\in I} x_j e_j, \quad \text{alors} \quad u(x) = \sum_{j\in J} x_j u(e_j)$$

(avec $(x_j)_{j\in J}$ à support fini).

Exemple

Si on reprend l'exemple du panier de courses vu plus haut, il suffit de connaître les prix unitaires des produits de *base* pour connaître le prix de n'importe quel panier.

Preuve

Trivial d'après les points précédents. ∎

Théorème 4.4

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E,

- u est injective de E dans F
  si et seulement si $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F.
- u est surjective de E sur F
  si et seulement si $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
- u est un isomorphisme de E dans F
  si et seulement si $(u(e_i))$ est une base de F.

Explications

Injectivité et liberté sont deux façons d'exprimer l'unicité d'une écriture.

Preuve

- *(sens direct)* On suppose u injective.
  Soit $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i) = 0$, alors $u\left(\sum_{i\in I} \lambda_i u_i\right) = 0$.
  Ainsi $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker}(u)$ et on sait que u est injective, c'est-à-dire que $\ker(u) = \{0\}$.
  Donc $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0$.
  Or (e_i) est une base, la famille est donc libre. Donc tous les λ_i sont nuls.
  Donc la famille $(u(e_i))_{i\in I}$ est libre.
  (sens réciproque) On suppose que la famille est libre.
  Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
  $x \in E$ et on peut le décomposer sur la base $(e_i)_{i\in I}$:

$$\exists (\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)} \text{ tel que } x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

  Ainsi $0_F = u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i u(e_i)$ (par linéarité).
  Or la famille des $(u(e_i))_{i\in I}$ est supposée libre, donc tous les λ_i sont nuls.
  Donc $x = 0$.
  Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et u est injective.
- u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.
  Or $(u(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.
  u est donc surjective, si et seulement si c'est une famille génératrice de F.
- Conséquence des deux points précédents.

∎

Se souvenir :

Un isomorphisme est une application qui transforme une base en une autre.

En particulier, l'image d'une base de E par un isomorphisme est une base de F.

B Cas particulier de la dimension finie

Théorème 4.5 *(En dimension finie)*

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement s'ils ont même dimension.
En particulier, si $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ est un isomorphisme, alors $n = p$.

⚠ La réciproque du cas particulier est fausse, trouver un contre-exemple.

Solution :

L'application nulle est une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans lui-même, mais elle n'est pas bijective.

Remarque : Dans le cadre des applications linéaires entre $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$, les isomorphismes sont exactement les automorphismes (car l'espace de départ est alors égal à l'espace d'arrivée).

Explications

Pour pouvoir « revenir » en arrière (avoir un isomorphisme), il faut avoir autant d'informations à l'arrivée qu'au départ.
Si on reprend l'image du panier de courses, même avec les deux informations prix et volume, on ne peut pas deviner la composition du panier. Par contre, si on ajoutait une troisième information indépendante (par exemple, la quantité de courgettes), alors on pourrait retrouver la composition du panier à partir de ces trois informations en résolvant un système.

Lien avec les systèmes linéaires :

On voit ici que l'on retrouve l'idée des systèmes linéaires : pour qu'un système soit inversible (c'est-à-dire, que le second membre puisse nous donner de façon unique la valeur des inconnues), alors, il est nécessaire d'avoir exactement autant d'équations que d'inconnues.

- S'il y a moins d'équations que d'inconnues $n < p$, alors le système est à paramètre :

il existe plusieurs solutions pour un même second membre ; le système n'est pas injectif.

- S'il y a plus d'équations que d'inconnues $n > p$, alors nécessairement certaines équations sont redondantes entre-elles et il n'est pas possible de choisir le second membre de façon arbitraire. Pour certains seconds membres, il n'existe pas de solution (pivot dans le second membre) ; ce système n'est pas surjectif.
- Dans le cas où il y a autant d'équations que d'inconnues $n = p$, le système peut être bijectif mais ce n'est pas toujours le cas (par exemple, si une même équation est répétée plusieurs fois).

Dans le chapitre qui suit, nous allons utiliser les bases (en dimension finie), pour décrire complètement les vecteurs et caractériser les applications linéaires. Cela fera le lien avec les systèmes linéaires dont il vient d'être question.
Cette démarche a l'avantage (et l'inconvénient) d'être moins abstraite et permettra de réaliser de nombreuses démonstrations de façon exclusivement calculatoire.
C'est ce que nous avons appelé l'approche *matricielle* en introduction.

5 Endomorphismes particuliers

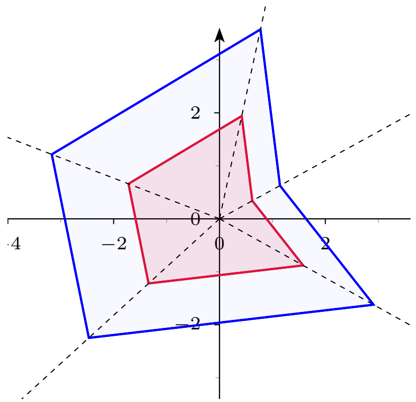
E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

A Homothéties

Définition 5.1 *(Homothéties)*

Pour $\lambda \in \mathbf{K}$,
on appelle **homothétie** de E de rapport λ l'endomorphisme

$$\lambda \mathrm{Id}_E : x \mapsto \lambda x$$



Pour passer d'un polygone à l'autre dans la figure, on a appliqué une homothétie (de rapport supérieur à 1 pour agrandir le polygone) ou sa réciproque.

Preuve

On vérifie aisément que c'est une application linéaire. ∎

Explications

L'homothétie correspond exactement à la transformation géométrique du même nom. Comme nous travaillons sur les espaces vectoriels le point invariant est 0 et le rapport λ . Cette transformation vue dans le plan ou l'espace correspond à multiplier toutes les longueurs par λ.

Propriété 5.2

1. Pour $\lambda \neq 0$, l'homothétie de rapport λ est un automorphisme de E.
   Sa réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$.
2. La composée de deux homothéties de rapports λ_1, λ_2, est une homothétie de rapport $\lambda_1\lambda_2$.
3. Les homothéties commutent entre elles.

Corollaire 5.3

L'ensemble des homothéties de E munies de la loi de composition $\circ$ forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Il est commutatif.

Preuve

Cela découle des propriétés énoncées précédemment. Id_E est l'élément neutre du groupe. ∎

B Projecteurs et symétries

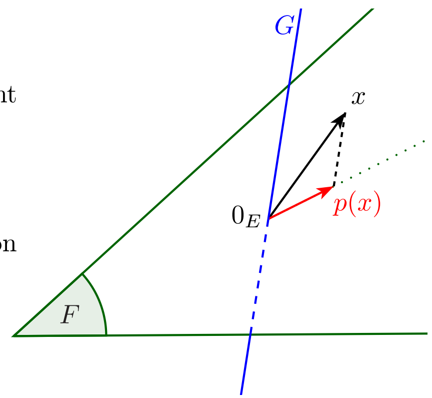
Soient F et G deux espaces **supplémentaires** dans E.

Définition 5.4 *(Projecteur)*

On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application $p \in \mathscr{L}(E)$ telle que

$$\forall x \in E, \quad p(x) = p(x_F + x_G) = x_F$$

où $x = x_F + x_G$ est l'unique décomposition de x sur $F \oplus G$.
F s'appelle la base, et G la direction de p.



Preuve

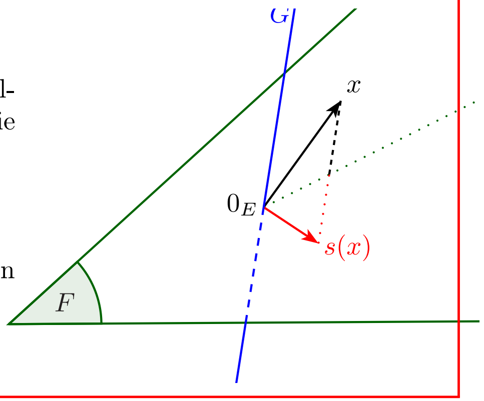
On remarque bien qu'une telle application est bien définie (caractère unique de la décomposition) et qu'elle est linéaire. ∎

Définition 5.5 *(Symétrie)*

On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application $s \in \mathscr{L}(E)$ définie par

$$\forall x \in E, \quad s(x) = s(x_F + x_G) = x_F - x_G,$$

où $x = x_F + x_G$ est l'unique décomposition de x sur $F \oplus G$.



Propriété 5.6 *(Lien symétrie-projecteur)*

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G.
et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Alors

$$p = \frac{s + \mathrm{Id}}{2} \qquad \text{et} \qquad s = 2p - \mathrm{Id}.$$

Cette propriété 5.6 n'est pas à savoir par cœur, mais il est bon d'être capable de la retrouver rapidement.

Preuve

$\forall x \in E$, $\dfrac{s + \mathrm{Id}}{2}(x) = \dfrac{1}{2}(s(x) + \mathrm{Id}(x)) = \dfrac{1}{2}(x_F - x_G + x_F + x_G) = x_F$.
$\forall x \in E$, $(2p - \mathrm{Id}2)(x) = 2p(x) - \mathrm{Id}(x) = 2x_F - x_F - x_G = x_F - x_G$. ■

Propriété 5.7 *(Image d'un projecteur)*

Soit p un projecteur sur F parallèlement à G.

$$x \in F \iff p(x) = x.$$

Preuve

Immédiat. $x \in F$ si, et seulement si sa décomposition sur la somme directe $F \oplus G$ s'écrit $x = x + 0$, c'est-à-dire $p(x) = x$. ■

Théorème 5.8 *(Caractérisation d'un projecteur)*

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$,
p est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$ (p est *idempotent*).
Dans ce cas, p est un projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$ (qui sont donc supplémentaires).

Preuve

Sens réciproque, on suppose que $p \circ p = p$.
On montre d'abord que $\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p) = E$.

1. Soit $x \in E$, $p(x - p(x)) = p(x) - p(x) = 0$. Donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\,(p)$.
   Donc x s'écrit $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\,(p)$. (l'autre inclusion est évidente)
2. Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Im}\,(p)$.
   $y \in \mathrm{Im}\,(p)$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
   Donc $p(y) = p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x) = y$
   Or $y \in \mathrm{Ker}\,(p)$, donc $p(y) = 0$, donc $y = 0$.
   Donc $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(p) = \{0\}$

Donc $\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p) = E$.
$\forall x \in E$, $x = x_I + x_K$. Alors $p(x) = p(x_I) + p(x_K) = x_I$.
Donc p est un projeteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$.
Sens direct :

$$(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(x_F) = x_F = p(x).$$

D'après le « sens réciproque » on a donc p projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$
■

Théorème 5.9 *(Caractérisation d'une symétrie)*

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$,
s est une symétrie de E si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
Dans ce cas,
s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - s)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} + s)$ (qui sont supplémentaires).

On peut penser à la conjugaison complexe pour illustrer ce théorème.
Cette conjugaison est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (des réels) sur $\mathbf{C}$ vu comme $\mathbf{R}-$espace vectoriel.
On remarque que la projection associé est la fonction « partie réelle » (qui est bien un projecteur).
La base du projecteur est l'axe des réels, c'est-à-dire l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que $\mathfrak{Im}\,(z) = 0$, ou encore $\frac{z - \overline{z}}{2i} = 0$.
On reconnaît alors la formule $F = \ker\,(\mathrm{Id} - s)$.
De même, G correspond à l'axe des imaginaires purs, solutions de $\frac{z + \overline{z}}{2} = 0$ ce qui donne $G = \ker\,(\mathrm{Id} + s)$.
Le lien entre le projecteur et la symétrie est immédiat : $p(z) = \mathfrak{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{(z)}}{2} = \frac{\mathrm{Id} + s}{2}(z)$.

Preuve

Preuve 1 : on utilise la preuve précédente :
(sens réciproque)
On pose $p = \frac{s + \mathrm{Id}_E}{2}$. $p \in \mathscr{L}(E)$.

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s + \mathrm{Id}_E)(s + \mathrm{Id}_E) = \frac{1}{4}\left(s^2 + 2s + \mathrm{Id}_E\right) = \frac{1}{4}(2s + 2\mathrm{Id}_E) = p.$$

Donc p est un projecteur.

$$\mathrm{Ker}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(p) = \{x \in E, p(x) = x\} &= \{x \in E, s(x) + Id(x) = 2x\} \\ &= \{x \in E, s(x) - \mathrm{Id}(x) = 0_E\} = \mathrm{Ker}\,(s - Id_E).\end{aligned}$$

Le sens direct est évident.
Preuve 2 : on adapte la preuve du projecteur. ■

Exemple

On donne $u = (1, 0, 3)$, $v = (-1, 1, -1)$ et $w = (0, 1, -1)$.
Déterminer l'image de (x, y, z) par la projection sur le plan engendré par u et v et parallèlement à la droite définie par w.
Solution :
On note p le projecteur considéré.
On remarque d'abord que les trois vecteurs forment une base de $\mathbf{R}^3$. En effet, si $\alpha u+\beta v+\gamma w = (0,\,0,\,0)$, alors la première coordonnée donne $\alpha = \beta$ et la seconde donne $\beta = -\gamma$. Avec la troisième coordonnée, on trouve alors $0 = 3\alpha-\beta-\gamma = 3\alpha$, d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille est donc bien libre et comme elle contient trois vecteurs, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.
Pour obtenir l'image de $a = (x,\,y,\,z)$ par p on peut décomposer a dans la base $(u,\,v,\,w)$ et ne garder que les deux premières composantes.
On obtient la décomposition en réalisant un pivot de Gauss.
Néanmoins, on peut remarquer qu'il suffit de trouver la composante suivant w.
En effet, dès lors que l'on a $a = a_1+\alpha w$, avec $a_1 \in \mathrm{Vect}\,(u,\,v)$ alors on sait que $p(a) = a_1$. Il n'est donc pas nécessaire de faire le pivot complètement, et il suffit d'obtenir le coefficient devant w.
Le pivot s'écrit sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 3 & -1 & -1 & z \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 2 & -1 & -3x+z \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -3 & -3x-2y+z \end{array}\right)$$

On obtient donc $\alpha = \frac{1}{3}(3x + 2y - z)$. Ainsi

$$p(x,\,y,\,z) = (x,\,y,\,z) - \frac{1}{3}(3x+2y-z)w = \frac{1}{3}(3x,\,-3x+y+z,\,3x+2y+2z).$$

Exemple

Avec les notations de l'exemple précédent, déterminer l'image de (x, y, z) par la projection sur la droite engendrée par w et parallèlement au plan engendré par u et v.
Solution :
On note p' le projecteur considéré.
En utilisant les résultats de l'exemple précédent, on voit simplement que pour $a \in \mathbf{R}^3$, on peut écrire $a = p(a) + \gamma w$ qui correspond à la décomposition sur la somme directe $\mathrm{Vect}\,(u,\,v) \oplus (\mathbf{K}w)$.
Ainsi $p'(a) = \gamma w = a - p(a)$. On obtient donc

$$p'(x,\,y,\,z) = \frac{1}{3}(3x+2y-z)w.$$

Exemple

On note $E = \mathbf{R}^4$, et on considère $u : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R} \\ (x,\,y,\,z,\,t) & \mapsto & x+y+z-t \end{array}\right.$ et $w = (1,\,0,\,0,\,0)$.
On pose $F = \ker(u)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(w)$.
Montrer que $F \oplus G = E$ et donner l'expression de la projection de $(x,\,y,\,z,\,t)$ sur F parallèlement à G.
Solution :

- On voit que $u(w) = 1 \neq 0$, donc $x_0 \notin F$, donc $F + G = F \oplus G$.
  (en effet, si $x \in F \cap G$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $x = \lambda w$ car $x \in G$, et $u(x) = \lambda u(w) = \lambda = 0$ (car $x \in F$) donc $x = 0$.)
  Pour montrer que la somme directe est égale à E, on pourra bientôt utiliser le théorème du rang, mais à défaut de l'avoir à disposition en ce point du cours, on rédige de façon explicite.
  On remarque que F est défini par une équation cartésienne, dont les solutions peuvent être exprimées à l'aide des trois inconnues principales $(x,\,y,\,z)$ et de l'inconnue secondaire t.
  Ainsi $\dim(F) = 3$. En effet, on trouve bien $F = \mathrm{Vect}\,((1,\,0,\,0,\,1),\,(0,\,1,\,0,\,1),\,(0,\,0,\,0,\,1))$ et la famille est évidemment libre).
  Donc $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbf{R}^4)$, donc $F \oplus G = \mathbf{R}^4$: les deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.
- Soit $a \in \mathbf{R}^4$, on peut décomposer $a = a_F + a_G = a_F + \alpha w$ sur la somme directe.
  Alors $p(a) = a_F = a - \alpha w$.
  Il suffit donc de trouver α. Pour cela on remarque que $a_F \in \ker(u)$, donc cela revient à chercher α tel que $u(a - \alpha w) = 0$, c'est-à-dire $u(a) = \alpha u(w)$.
  Avec $a = (x,\,y,\,z)$, on sait que $u(w) = 1$, donc on obtient $\alpha = x + y + z - t$.
  Ainsi

$$u(x,\,y,\,z,\,t) = (x,\,y,\,z,\,t) - (x+y+z-t)\cdot(1,\,0,\,0,\,0) = (-y-z+t,\,y,\,z,\,t).$$

C Endomorphismes nilpotents

Définition 5.10 *(Endomorphisme nilpotent)*

Un endomorphisme u est **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exemple

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$, défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad u\,(x, y, z)) = (-2x - z, -2x - y - z, 6x + y + 3z).$$

1. Montrer que u est nilpotent.
2. Donner son noyau et son image.

6 Rang d'une application linéaire

A Définition

Définition 6.1 *(Rang d'une application linéaire)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\mathrm{Im}\,(u)$ est de dimension finie, alors on définit le **rang** de u par

$$\mathrm{rg}\,(u) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(u)\right).$$

Propriété 6.2

Si E ou F est de dimension finie, alors u admet un rang fini.
Dans ce cas et ce rang est inférieur à cette dimension.

$$\mathrm{rg}\,(u) \leqslant \min(\dim E, \dim F).$$

Convention : Dans la dernière inégalité, si l'un des deux espaces n'est pas de dimension finie, alors on note sa dimension : $+\infty$. Dans ce cas, on utilise la règle :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \min\,(x,\ +\infty) = \min\,(+\infty,\ x) = x.$$

Preuve

- Si F est de dimension finie, $\mathrm{Im}\,(u) \subset F$, donc $\mathrm{rg}\,(u) \leqslant \dim F$.
- Si E est de dimension finie, alors on peut considérer une de ses bases avec un nombre fini d'éléments.
  L'image de cette famille par u est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(u)$ avec un nombre fini d'éléments.
  Donc $\mathrm{Im}\,(u)$ est de dimension finie et inférieure ou égale à $\dim(E)$.

■

⚠ On peut avoir un rang même si E et F sont de dimension infinie.

Théorème 6.3 *(Rang et composition)*

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, avec u ou v de rang fini.
$v \circ u$ est alors de rang fini et

$$\mathrm{rg}\,(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, u, \mathrm{rg}\, v).$$

Remarque : On a utilisé la même convention que précédemment dans le cas où l'une des deux applications n'est pas de rang fini.

Preuve

- Si v est de rang fini, alors $\mathrm{Im}\ (v)$ est de dimension finie.
  Or $\mathrm{Im}\ (v \circ u) \subset \mathrm{Im}\ (v)$ donc $\mathrm{Im}\ (v \circ u)$ est de dimension finie inférieure ou égale à celle de $\mathrm{Im}\,(v)$.
- Si u et de rang fini, alors $\mathrm{Im}\ (u)$ est de dimension finie.
  Or $\mathrm{Im}\,(v \circ u) = (v \circ u)(E) = v\,(\mathrm{Im}\, u)$.
  Ainsi, d'après la propriété 6.2, $\mathrm{rg}\ (v \circ u) \leqslant \dim \mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$.

■

Propriété 6.4 *(Composition avec un isomorphisme)*

Le rang est invariant par composition (à gauche ou a droite) par un isomorphisme.
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit φ_1 et φ_2 deux isomorphismes, avec $\varphi_1 \in \mathscr{L}(E',\ E)$ et $\varphi_2 \in \mathscr{L}(F,\ F')$. Si u est de rang fini, alors $u \circ \varphi_1$, $\varphi_2 \circ u$ et $\varphi_2 \circ u \circ \varphi_1$ sont aussi de rang fini avec :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\, u &= \mathrm{rg}\,(u \circ \varphi_1)\\ &= \mathrm{rg}\,(\varphi_2 \circ u)\\ &= \mathrm{rg}\,(\varphi_2 \circ u \circ \varphi_1).\end{aligned}$$

Si u n'est pas de rang fini, alors les composées avec les isomorphisme non plus.

Remarque : Les hypothèses de ce théorème sont trop fortes : il suffit d'avoir φ_1 surjective et φ_2 injective pour avoir l'égalité.

Preuve

- Composition à droite par ϕ_1. $\mathrm{Im}\ (\varphi_1) = E$ car φ_1 est bijective (donc surjective).
  Ainsi $u\,(\mathrm{Im}\ (\varphi_1)) = \mathrm{Im}\,(u)$.
  $$\mathrm{rg}\ (u \circ \varphi_1) = \mathrm{rg}\, u.$$
- Composition à gauche par φ_2.
  Si u est de rang fini, alors φ_2 induit une bijection de $\mathrm{Im}\,(u)$ sur $\varphi_2\,(\mathrm{Im}\,(u))$.
  $\mathrm{Im}\,(u)$ étant de dimension finie, $\varphi_2(\mathrm{Im}\,(u))$ est donc également de dimension finie égale à celle de $\mathrm{Im}\,(u)$ et
  $$\mathrm{rg}\ (\varphi_2 \circ u) = \dim\,(\varphi_2(\mathrm{Im}\,(u)) = \dim \mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{rg}\, u.$$

■

B En dimension finie

Dans cette partie, E et F désignent des espaces vectoriels de **dimension finie** sur $\mathbf{K}$.

Propriété 6.5 *(Rang et surjectivité)*

Si F est de dimension finie, alors
u surjective si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(u) = \dim F$.

Preuve

Trivial. ■

Propriété 6.6

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors

- u injective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E$,
- u surjective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim F$,
- u bijective $\iff$ $\operatorname{rg} u = \dim E = \dim F$.

Preuve

Soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E.

- *preuve intrinsèque :* u injective si et seulement si elle est bijective sur son image.
  preuve équivalente qui utilise les bases :
  $(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.
  u est injective si et seulement si elle est libre dans $\operatorname{Im} u$ (propriété 4.4).
  u est donc injective si, et seulement si c'est une base de $\operatorname{Im} u$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = p$.
- u est un surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.
  si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F = n$ (car l'inclusion $\operatorname{Im} u \subset F$ est toujours vérifiée).
- Conséquence des deux points précédents. ■

Explications

Il faut se rappeler qu'**une application linéaire ne peut pas *dilater* l'espace** : elle ne peut pas augmenter la dimension : $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u) \leqslant \dim F$.
La dimension de l'image ne peut être plus grande que celle de l'espace de départ.
Le conséquence immédiate est que, si $\dim F > \dim E$, alors u ne peut pas être surjective, elle ne peut pas « remplir » F tout entier à partir d'un espace de dimension plus petite E.
De même, si la dimension de l'espace d'arrivée est strictement plus petite que celle de l'espace de départ, cela veut dire que u doit perdre de l'information en chemin : elle ne peut pas être injective.

Corollaire 6.7

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$,

- $\dim E > \dim F \Rightarrow u$ n'est pas injective,
- $\dim E < \dim F \Rightarrow u$ n'est pas surjective.

Explications

Voici une image pour se souvenir de ce résultat.
Réaliser une injection, c'est injecter un espace dans un autre. Ceci n'est donc possible que si l'espace d'arrivée est « plus grand » que l'espace de départ qu'on lui « injecte dedans ». Formellement, la dimension de l'espace d'arrivée doit être plus grande que celle de l'espace de départ pour qu'il soit possible de réaliser un injection.
De même, réaliser une surjection, c'est « recouvrir » l'espace d'arrivée, par l'espace de départ. Il faut donc au contraire que l'espace de départ soit « plus grand » que l'espace d'arrivée pour pouvoir le recouvrir intégralement. Si la dimension de l'espace d'arrivée est plus grande que celle de l'espace de départ, alors il n'est pas possible de réaliser une surjection.

Exemple

$$u : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, x-y, 2x-y) \end{cases}$$ est-elle surjective ?

Solution :

Sans aucun calcul, on sait que cette application n'est pas surjective car la dimension de l'espace d'arrivée est supérieure à la dimension de l'espace de départ : $\operatorname{rg} u \leqslant 2$.

Corollaire 6.8

En **dimension finie**, si $u \in \mathscr{L}(E,\, F)$, avec $\dim E = \dim F$, alors

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ surjective.}$$

En particulier, cela est vrai pour tout endomorphisme en dimension finie.

Explications

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels, nous avions vu que si une famille est composée d'autant de vecteurs que la dimension de l'espace, alors il y a équivalence entre le fait que ce soit une base, qu'elle soit libre ou qu'elle soit génératrice.
Il s'agit du même théorème pour les applications linéaires. Ainsi, la bijectivité, l'injectivité et la surjectivité correspondent respectivement au fait que l'image d'une base est : une base, une famille libre ou une famille génératrice.

Méthode *(Prouver que u est un isomorphisme)*

Pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de dimensions finies est un isomorphisme, on peut successivement :

1. Montrer que les deux espaces ont la même dimension.
2. Montrer que l'application est injective (noyau réduit à 0).

C'est souvent l'injectivité d'une application qui est la plus simple à démontrer (montrer que si $x \in \operatorname{Ker}(u)$, alors $x = 0$).
Lorsque les espaces sont de même dimension, cela peut donc permettre de montrer la surjectivité (qui est en général plus dure à montrer directement).

Théorème 6.9 *(Inversibilité)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E,\, F)$ deux espaces de dimension **finie** avec $\dim E = \dim F$.
u est inversible si, et seulement si u est inversible à gauche ou à droite. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u \quad \text{inversible} &\iff (\exists v \in \mathscr{L}(F,E) \text{ tel que } u \circ v = \mathrm{Id}_F) \\ &\iff (\exists v \in \mathscr{L}(F,E) \text{ tel que } v \circ u = \mathrm{Id}_E)\,. \end{aligned}$$

⚠ En général, le résultat est faux en dimension infinie ou si les deux espaces n'ont pas la même dimension.

Preuve

Les sens directs sont immédiats.
Montrons les sens réciproques :

- Si u est inversible à droite.
  Soit $v \in \mathscr{L}(F,\, E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$.
  Montrons alors que u est surjective.
  En effet, $\forall x \in E$, $x = u \circ v(x) = u\,(v(x))$ donc $v(x)$ est un antécédent de x dans F, donc u est surjective.
  Or les deux espaces E et F sont de même dimension.
  D'après le corollaire précédent, on a donc u inversible (isomorphisme).
- Si u est inversible à gauche.
  Soit $v \in \mathscr{L}(F,\, E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{Id}_F$.
  Montrons alors que u est injective.
  $\forall x \in \ker(u)$, $u(x) = 0$, donc $x = v \circ u(x) = 0$ donc u est injective.
  Par le même corollaire, que précédemment, on peut donc affirmer que u est un isomorphisme.

■

Exemple

Montrer, en dimension quelconque, que si u admet à la fois un inverse à gauche et un inverse à droite, alors il est inversible et que l'inverse à gauche et à droite sont égaux.
Solution :
On a vu dans la preuve (sans utiliser la dimension finie) que l'inversibilité à gauche donne l'injectivité, et que l'inversibilité à droite donne la surjectivité.
On obtient donc bien la bijectivité.
Dans ce cas, on peut écrire

$$u^{-1} = u^{-1} \circ \mathrm{Id}_F = u^{-1} \circ u \circ v = v.$$

De même pour l'inverse à gauche.

Exemple

On note T_n^+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Soit M une matrice triangulaire supérieure inversible.
En s'aidant de l'application

$$\phi\ :\begin{cases} T_n^+ & \to T_n^+ \\ A \mapsto AM \end{cases}$$

montrer que l'inverse de M est aussi triangulaire supérieure.
Solution :
L'application est un endomorphisme sur un espace de dimension finie.
Il est clair que son noyau est réduit à 0, car $AM = 0 \iff A = 0$ par inversibilité de M.
Donc l'application est injective, donc c'est un isomorphisme.
Donc elle est surjective, donc il existe $M \in T_n^+$ tel que $AM = I_n$.

C Théorème du rang

Propriété 6.10

Soit $u \in \mathscr{L}(E,\, F)$.
Si S un sous-espace vectoriel de E tel que $E = \ker(u) \oplus S$,
alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\,(u)$.

Explications

Intuitivement :
En considérant le supplémentaire S, on a « supprimé » le noyau pour obtenir l'injectivité.

Preuve

$u_{|S} \in \mathscr{L}(S,\, F)$.
Montrons que cette application est injective.
Soit $x \in \ker\left(u_{|S}\right)$, alors $u(x) = 0$, donc $x \in \ker(u)$.
Or S et $\ker(u)$ sont en somme directe, donc leur intersection est réduite à $\{0\}$ donc $x = 0$.
Ainsi $u_{|S}$ est injective.
Montrons qu'elle est surjective sur $\mathrm{Im}\,(u)$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
On peut décomposer x sur la somme directe : $x = x_K + x_S$ avec $x_K \in \ker(u)$ et $x_S \in S$.
Alors

$$u_{|S}(x_S) = u\,(x_S) = u\,(x_S) + 0 = u\,(x_S) + u\,(x_K) = u(x) = y.$$

D'où la surjectivité. ■

Théorème 6.11 *(Théorème du rang)*

Soient E un espace de dimension finie, et F un espace vectoriel quelconque.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$,

$$\dim \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{rg}\, u = \dim E.$$

Preuve

E étant de dimension finie, $\ker(u)$ admet un supplémentaire S dans E.
D'après la propriété précédente $u_{|S}$ induit alors une bijection de S sur $\mathrm{Im}\,(u)$.
Or S est de dimension finie, donc $\mathrm{Im}\,(u)$ est également de dimension finie égale à celle de S.
Mais, d'après la somme directe $\dim S + \dim \ker(u) = \dim(E)$.
Donc en remplaçant $\dim S$ par $\dim \mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$, on obtient la formule voulue. ■

Exemple

Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

7 Formes linéaires et hyperplans

Rappels :

On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbf{K}$.
L'ensemble des formes linéaires est noté E^* et forme un espace vectoriel.

Définition 7.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(e_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$ une base de E.
Pour tout $i \in [\![1,\,n]\!]$ on définit la forme linéaire $e_i^* \in E^*$ tel que $\forall j \in [\![1,\,n]\!]$

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,\,j}.$$

(*Une application linéaire est caractérisée par son action sur une base*).
e_i^* s'appelle la i-ème **forme coordonnée** relativement à la base $(e_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$. $(e_i^*)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$ forme une base de E^*.
On l'appelle **base duale** de la base $(e_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]}$.

Preuve

Les e_i^* sont clairement des formes linéaires sur E.
Liberté : Montrons que la famille des formes coordonnées est libre.
Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,\,n]\!]} \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$\sum_{i\in[\![1,\,n]\!]} \lambda_i e_i^* = 0.$$

Alors, si par l'absurde, il existe $i_0 \in [\![1,\,n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, on peut évaluer la combinaison linéaire en e_{i_0} et on trouve $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui est absurde.
Donc $\forall i \in [\![1,\,n]\!]$, $\lambda_i = 0$ donc la famille est libre.
Générateur : Si pour $u \in \mathscr{L}(E,\,\mathbf{K})$, on pose $v = \sum\limits_{i=1}^{n} u(e_i)e_i^*$, alors $v \in E^*$ et pour tout $i \in I$ on a $v(e_i) = u(e_i)$.
Donc $u = v$ ce qui prouve bien le caractère générateur. ■

Ceci prouve également que $\dim(E^*) = \dim(E)$. On verra que c'est un cas particulier du calcul des dimensions des espaces d'applications linéaires.

Théorème 7.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles sur E.

Preuve

Les noyaux des formes linéaires sont des hyperplans d'après le théorème du rang.
Montrons la réciproque.
On considère H un hyperplan de E. On peut donc lui trouver un supplémentaire (qui est nécessairement une droite vectorielle d'après les dimensions).
On note donc $E = H \oplus (\mathbf{K}a)$ avec $a \neq 0$.
On pose l'application linéaire u définie par

$$\forall x \in H,\ u(x) = 0, \quad \text{et} u(a) = 1.$$

u est bien définie (caractérisation par son action sur des espaces supplémentaires) et $u \in E^*$. On voit que par construction $H = \ker(u)$. ■

Explications

Dans $\mathbf{K}^n$ un hyperplan sera donc défini par une unique équation linéaire homogène.
On retrouve ainsi qu'une droite est définie par une unique équation en dimension 2, et de même pour un plan en dimension 3.
Lorsque l'équation n'est pas homogène, on obtient un hyperplan affine.
Nous avions vu ce résultat *intuitivement* lors du chapitre sur les systèmes linéaires.
Continuons cette reprise :

Propriété 7.3

Si E est un espace de dimension finie n, alors l'intersection de p hyperplans de E et de dimension au moins $n-p$.
Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$, alors F est l'intersection de p hyperplans.

Explications

Chaque hyperplan est le noyau d'une forme linéaire et correspond donc à une équation dans un système linéaire.
L'énoncé dit donc simplement qu'un système de p équations à n inconnues donne comme solution un espace de dimension au moins $n-p$.
En d'autre termes, chaque équation « enlève » au plus une dimension.
Le cas d'égalité s'obtient lorsque les équations sont indépendantes, c'est-à-dire lorsque les hyperplans sont en somme directe, c'est-à-dire lorsque les formes linéaires associées forment une famille libre.

Preuve

- On note $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ les p formes linéaires sur E, et pour tout $i \in [\![1,\,p]\!]$, $H_i = \ker(\varphi_i)$.
  On considère
  $$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbf{K}^p \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x)). \end{array} \right.$$
  On remarque que ϕ est linéaire et que $\ker\phi = \bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$.
  Alors, par application du théorème du rang on a bien :
  $$\dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i = n - \operatorname{rg}\phi \geqslant n-p$$
  (car $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbf{K}^p$).
  (On peut aussi faire la preuve par récurrence en appliquant la formule de Grassmann).

- Si F est de dimension $n-m$, alors on peut écrire $E = G \oplus F$ avec G de dimension m.
  On note $(e_1, \cdots, e_m, \cdots e_n)$ une base adaptée à la somme directe.
  Alors $F = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(e_i^*)$.
  En effet, $x \in F$, en décomposant x dans la base adaptée on voit immédiatement que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^*(x) = 0$, donc $x \in \bigcap_{i=1}^{m} \ker(e_i^*)$.
  Ainsi $F \subset \bigcap_{i=1}^{m} \ker(e_i^*)$.
  Réciproquement, si $x \in \bigcap_{i=1}^{m} \ker(e_i^*)$, alors en décomposant x dans la base, on voit que seules les coordonnées au delà de m sont non nulles, donc $x \in F$.

■

Le théorème 7.2 permet de généraliser la notion hyperplan à un espace qui n'est pas nécessairement de dimension finie.

Définition 7.4 *(Hyperplan en dimension infinie)*

Pour E, pas nécessairement de dimension finie, un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Théorème 7.5

Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non incluse dans H on a

$$E = H \oplus D.$$

Réciproquement, si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $E = H \oplus D$ avec D une droite, alors H est un hyperplan de E.

Preuve

- On écrit $H = \ker \varphi$, avec $\varphi \in E^*$.
  On note $D = \mathbf{K}a$ et on a $\varphi(a) \neq 0$ (sinon $D \subset \ker \varphi$).
  Soit $x \in E$, on pose $z = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$. (on rappelle que $\varphi(x)$ et $\varphi(a)$ sont des éléments de $\mathbf{K}$ sur lequel la division existe).
  Alors $\varphi(z) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \varphi(a) = 0$.
  Donc $z \in \ker \varphi$.
  Ainsi, on a décomposé x sous la forme $x = z + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$, ce qui montre que $E = H + D$.
  L'intersection des deux espaces est évidemment réduite à $\{0\}$ (sinon, elle contiendrait au moins une droite, donc D tout entier).
  Donc $E = H \oplus D$.
- Comme on l'a fait pour la preuve en dimension finie, on définit la forme linéaire à partir de la somme directe.

■

Propriété 7.6

Deux formes linéaires définissent le même hyperplan si, et seulement si elles sont proportionnelles (de rapport non nul).
Ainsi, deux équations définissent le même hyperplan si, et seulement si elles sont proportionnelles (de rapport non nul).

Preuve

La réciproque est évidente.
Pour le sens direct, on considère φ_1 et φ_2 qui définissent le même hyperplan H.
On note alors $E = H \oplus D$ avec $D = \mathbf{K}a$.
$\varphi_{1|H} = \varphi_{2|H} = 0$.
$\varphi_1(a) \in \mathbf{K}^*$ et $\varphi_2(a) \in \mathbf{K}^*$ donc en posant le rapport de proportionnalité $\dfrac{\varphi_1(a)}{\varphi_2(a)}$, on obtient le résultat voulu. ■