Séries numériques

« Si je devais me réveiller après avoir dormi pendant mille ans, ma première question serait : l'hypothèse de Riemann a-t-elle été démontrée ? »
David Hilbert

Une suite écrite sous la forme d'une somme dont on ajoute les termes un à un.

Un exemple fondamental est l'étude des sommes de la forme

$$\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}.$$

Lorsque cette somme converge pour $n \to +\infty$, on note $\zeta(s)$ sa limite. La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ est appelée la *fonction zêta de Riemann.*
Pour $s = 1$, c'est la série harmonique qui diverge (la fonction ζ n'est pas définie en 1).
Pour $s = 2$, on retrouve la fameuse somme

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'hypothèse de Riemann[1] énoncée en 1859 porte sur des caractéristiques de ζ. C'est l'une des plus importantes conjectures mathématiques à ce jour. Elle fait partie des 23 problèmes présentés par Hilbert en 1900 et qui devaient marquer le cours des mathématiques du XX$^{\text{e}}$ siècle. Elle n'est toujours pas démontrée à ce jour.
C'est un des sept problèmes à un million de dollars de l'Institut Clay (un seul à été résolu).

1. Les zéros dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ de la fonction ont tous une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

1 Généralités

Définition 1.1 *(Série numérique)*

Soit une suite $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
On appelle **somme partielle** de terme général u_n, la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La **série numérique** de terme général u_n désigne la suite (S_n) des sommes partielles.
On note cette série $\sum u_n$. u_n est le **terme général** de la série.

Remarque : Lorsque (u_n) est définie à partir de n_0, on peut définir la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$.

Définition 1.2 *(Nature de la série)*

La série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

Dans la cas contraire, la série **diverge**.
La **nature** d'une série désigne sa convergence ou sa divergence.

Théorème 1.3

Lorsqu'une série converge, on note sa limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

⚠ La somme infinie est la notation d'une limite. Elle ne se comporte donc pas comme une somme « habituelle ». Il ne faut donc pas hésiter à repasser aux sommes partielles, puis à prendre la limite.

Exemple

Étudier la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

Solution :

On étudie la suite des sommes partielles (S_n) et on fait apparaître une somme télescopique.
$\forall n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

La série converge et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Définition 1.4 *(Reste d'ordre n)*

Soit $\sum u_n$ une série *convergente*. Le **reste** d'ordre n de la série est défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

⚠ Pour le reste d'ordre n, la somme commence à $n+1$.
Ceci n'a de sens que si la série converge.

Exemple

Donner le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solution :

Pour $n \geqslant 1$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Propriété 1.5

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Preuve

Si on note n_0 l'indice du dernier terme modifié entre u et v et $a = \sum_{k=0}^{n_0}(u_k - v_k)$, alors, on a pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + a.$$

Ainsi, les deux suites des sommes partielles ne diffèrent que d'une constante pour $n \geqslant n_0$. Donc elles sont de même nature (et leur limite, si elle est finie, diffère de la valeur a). ∎

Théorème 1.6 *(Condition nécessaire de convergence)*

Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) converge vers 0.

La réciproque est **FAUSSE**.

Contraposée : Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit qu'elle diverge *grossièrement*.

Preuve

On suppose que la série converge.
Si on note (S_n) la suite des sommes partielles, alors il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $S_n \to \ell$.
Ainsi, par opération sur les limites, $u_n = S_n - S_{n-1} \to 0$. ∎

Méthode

Si on demande la nature d'une série, commencer par étudier la limite de son terme général.

Exemple

Montrer que $\sum \sin n$ diverge.

Solution :

Si $\sin(n)$ tendait vers 0, alors $\sin(n+1)$ aussi.
Or $\sin(n+1) = \cos n \sin 1 + \cos 1 \sin n$.
Donc par opérations sur les limites, $\cos n \to 0$ (car $\sin 1 \neq 0$).
Or $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$. C'est absurde.
Donc $\sin n \not\to 0$, donc $\sum \sin n$ diverge grossièrement.

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = n^2\left(e^{\frac{1}{n+1}} - e^{\frac{1}{n}}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

Solution :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2\left(e^{\frac{1}{n+1}} - e^{\frac{1}{n}}\right)\\ &= n^2 e^{\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} - 1\right)\\ &= n^2 e^{\frac{1}{n}}\left(e^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)\\ &\sim -\frac{n^2 e^{\frac{1}{n}}}{n(n+1)} \sim -1.\end{aligned}$$

Donc $u_n \to -1$, la série diverge grossièrement.

2 Liens suites - séries

« Suites et séries : même combat ! »

Toute série peut s'étudier comme une suite : la suite des sommes partielles.
Réciproquement toute suite, peut également s'écrire sous la forme d'une série avec les sommes télescopiques.

Méthode *(Série télescopique)*

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$,
la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Exemple

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution :

$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = n$.
En sommant, on trouve donc $\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k$.
C'est-à-dire $u_n - u_0 = \frac{n(n-1)}{2}$.
Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Méthode *(Retrouver le terme général)*

Si (S_n) est une suite de sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, alors,

$$u_0 = S_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Exemple

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 2^n$.
Déterminer u_n en fonction de n.

Solution :

au brouillon :
On cherche une suite auxiliaire $v_n = \alpha_n u_n$ qui permet de se ramener à une situation similaire à celle de l'exemple précédent.
$\alpha_{n+1}u_{n+1} = 2\alpha_{n+1}u_n + 2^n\alpha_{n+1}$.
On prend la suite telle que $2\alpha_{n+1} = \alpha_n$. Par exemple, $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$.
rédaction :
Soit v_n la suite définie pour tout n par $v_n = \frac{1}{2^n}u_n$.
Alors $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}u_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(2u_n + 2^n) = v_n + \frac{1}{2}.$$

On retrouve alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = v_0 + \frac{n}{2}$, donc

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 2^n u_0 + 2^{n-1}n.$$

3 Opérations sur les séries convergentes

Théorème 3.1 *(Produit par une constante)*

Si (u_n) est une suite et $\lambda \in \mathbf{C}$ **non nul**, alors $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature.
Et si elles convergent, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k) = \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}u_k.$$

Remarque : Si $\lambda = 0$, alors la série $\sum \lambda u_n$ est simplement nulle et converge toujours vers 0.

Théorème 3.2 *(Somme des limites)*

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty}u_k + \sum_{k=0}^{+\infty}v_k.$$

La réciproque est fausse. On peut avoir la convergence de $\sum(u_n + v_n)$ sans avoir la convergence de $\sum u_n$ ni de $\sum v_n$.

Preuve

Par opération sur les limites des sommes partielles. ∎

Exemple

Montrer que si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

Solution :

Si par l'absurde $\sum u_n + v_n$ converge, alors, d'après la convergence de $\sum u_n$, la série $\sum u_n - \sum u_n - v_n$ converge.
Or, on reconnaît ici la série de terme général v_n qui diverge.
C'est donc absurde et $\sum u_n + v_n$ diverge.

Exemple

Donner l'exemple de deux séries divergentes dont la somme converge.

Solution :

Il suffit de prendre le terme général et son opposé.
Par exemple $u_n = n$ et $v_n = -n$ (les deux séries divergent grossièrement, mais la suite des sommes partielles de $u_n + v_n$ est stationnaire à 0).

Méthode *(Changements d'indices)*

Les changements d'indices du type $j = j + p$, avec p une constante fixée, se réalisent de la même façon sur les sommes des séries **convergentes** que sur les sommes finies (mais la borne $+\infty$ ne change pas).
Par exemple, si $\sum u_n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}u_{n-1}.$$

Preuve

Par passage aux limites sur les sommes partielles. ∎

4 Séries usuelles

A Séries géométriques

Définition 4.1 *(Série géométrique)*

On appelle **série géométrique**, toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Théorème 4.2 *(Critère de convergence des séries géométriques)*

La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve

Trivial, $q^n \to 0$ sinon, la série diverge grossièrement. ■

Propriété 4.3

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{1}{1-q}.$$

Exemple *(Paradoxe de Zénon ou Achille et la Tortue)*

« C'est chose incompréhensible pour l'esprit humain que la continuité absolue du mouvement. L'homme, ne saisit les lois de n'importe quel mouvement que lorsqu'il en examine des unités arbitrairement découpées. Mais en même temps c'est de cette division arbitraire de mouvement continu en unités discontinues que naissent la plus grande partie des erreurs humaines.
Chacun connaît le "sophisme" des Anciens selon lequel Achille ne rattrapera jamais la tortue qui va devant lui, quoique son allure soit dix fois plus rapide. Quand Achille aura franchi la distance qui le sépare de la tortue, celle-ci se trouvera avoir franchi en le dépassant, le dixième de cette distance. Pendant qu'Achille franchira ce dixième, la tortue avancera encore d'un centième, ainsi de suite à l'infini. Ce problème paraissait insoluble dans l'antiquité. L'absurdité de la conclusion (Achille ne rattrapera jamais la tortue) découlait seulement du fait qu'on admettait arbitrairement des unités discontinues de mouvement alors que le mouvement d'Achille comme celui de la tortue est continu.
Si nous prenons des unités de mouvement de plus en plus petites, nous parvenons seulement à nous approcher de la solution, mais jamais nous ne l'atteignons. Ce n'est qu'en admettant une quantité infinitésimale et sa progression ascendante jusqu'au dixième, et en faisant la somme de cette progression géométrique que nous arrivons à la solution du problème. La nouvelle branche des mathématiques, qui a découvert l'art d'opérer avec des infiniment petits, donne maintenant des réponses à des questions jugées insolubles, même dans des problèmes beaucoup plus compliqués de dynamique.
Cette branche nouvelle des mathématiques, inconnue de l'antiquité, en introduisant des infiniment petits dans l'étude de la dynamique, rétablit la condition fondamentale du mouvement, c'est-à-dire son absolue continuité, et redresse par là même l'erreur inévitable, que l'intelligence ne peut pas ne pas commettre lorsqu'elle remplace un mouvement continu pas des unités discontinues de mouvement. [...]
C'est seulement en soumettant à notre examen une unité infiniment petite, la différentielle de l'histoire, c'est-à-dire les courants homogènes de l'humanité, et en nous rendant maîtres de l'art de les intégrer (de faire la somme des infinitésimaux), que nous pouvons espérer atteindre les lois de l'histoire. »
Tolstoï, La Guerre et la Paix (traduction La Pléiade) Livre III, chapitre premier.
Trouver la solution du problème : montrer qu'Achille rejoint la tortue en un temps fini.

Solution :
À chaque étape, la distance entre Achille et la tortue est divisée par dix. Mais le temps pour parcourir l'étape est aussi divisé par dix car Achille, fortifié par Athéna, ne connait pas la fatigue et court à vitesse constante.
S'il faut un temps t pour les 100 premiers mètres, il suffit de $t/10$ pour les 10m suivants...
Ainsi, à l'étape n, la distance restante entre Achille est la tortue est $d_n = \frac{100}{10^n}$, et le temps écoulé est $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{10^k}$.
Ce n'est qu'au bout d'un nombre infini d'étapes qu'Achille rattrape la tortue.
Mais, le temps pour réaliser ces étapes est fini car la série $\sum \frac{t}{10^n}$ converge.
Ainsi, Achille rattrape la tortue au bout d'un temps

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{10^n} = \frac{t}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10t}{9}.$$

La distance qu'il aura alors parcouru sera de $\frac{1000}{9}$m.

B Séries de Riemann

Définition 4.4 *(Séries de Riemann)*

On appelle **série de Riemann**, tout série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
Pour $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n}$ s'appelle la **série harmonique**.

Théorème 4.5 *(Séries de Riemann)*

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

On donnera la preuve après le théorème de comparaison série-intégrale à la page 6. ■

C Série exponentielle

Théorème 4.6

$\forall x \in \mathbf{C}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge.
On note sa somme

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Preuve

Vue plus loin dans ce cours. ■

Explications

On peut définir ainsi la fonction exponentielle (à la fois sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$) et les autres

propriétés en découlent. Mais cela nécessite un cours plus approfondi sur les séries qui sera vu en deuxième année.
Pour $x = 0$, on retrouve bien $\mathrm{e}^0 = 1$.

5 Critères de convergence des séries à termes positifs

Dans toute cette partie, on ne traite que des séries à termes positifs qui est l'objectif central en première année. En effet, nous verrons plus loin que même lorsque la série n'est pas à termes positifs on essaiera de se ramener à cette situation.

A Théorème de la limite monotone

Théorème 5.1 *(Séries à termes positifs)*

Toute série à termes positifs admet une limite dans $[0, +\infty]$.
La série converge si, et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

⚠ Noter que l'intervalle est fermé en $+\infty$: la limite est finie ou infinie.
C'est **faux** si la série n'est pas à termes positifs.

On voit de même que toute série à termes négatifs admet une limite dans $[-\infty, 0]$.
Nous verrons dans la suite de ce chapitre que les séries à termes positifs (c'est-à-dire, telles que le terme général u_n est positif à partir d'un certain rang) jouent un rôle particulier auquel on cherchera souvent à se ramener.

Preuve

La suite des sommes partielles est croissante.
En effet, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$$

car le terme général est supposé positif.
D'après le théorème de la limite monotone, (S_n) admet une limite finie ou infinie.
La suite des sommes partielles étant positive, sa limite est nécessairement dans $[0, +\infty]$. ■

B Théorèmes de comparaison

Théorème 5.2 *(Comparaison des séries à termes positifs)*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant v_n$.

- si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$,
- si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve

$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant v_n$, donc par sommation d'inégalités de même sens : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

- Si $\sum v_n$ converge, comme la série est à termes positifs, alors toutes les sommes partielles sont majorées par la limite $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_n$. Donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.
  Donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est majorée, et la série est à termes positifs, donc $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers $+\infty$. Donc par théorème de minoration sur les suites des sommes partielles, la série $\sum v_n$ diverge.

■

Remarque : Le critère de convergence est aussi vérifié si l'inégalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0, mais alors, l'inégalité entre les limites n'est plus nécessairement vraie (il faut prendre en compte les premiers termes).

Exemple

Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^n}$ converge.
Solution :
$\forall n \geqslant 2,\ \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.
Or $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique à termes positifs convergente car $\frac{1}{2} < 1$.
$\sum \frac{1}{n^n}$ est aussi à termes positifs, donc par comparaison, $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.

Théorème 5.3 *(Domination)*

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (v_n) soit **strictement positive.**
On suppose que $u_n = O(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

Si $u_n = O(v_n)$, alors, il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant M v_n$.
Donc si $\sum v_n$ alors, $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge. ■

Remarque : Il est indispensable que (v_n) soit positive pour utiliser le critère.
Par contre, le passage par l'absolue convergence permet de considérer u quelconque, éventuellement complexe.

Théorème 5.4 *(Négligeablilité)*

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (v_n) soit **strictement positive.**
On suppose que $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

C'est un cas particulier de la domination. ■

Théorème 5.5 *(Critère avec des équivalents)*

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes à **positives**, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

⚠ Cela ne veut pas dire que les sommes partielles soient équivalentes ! En particulier, si elles convergent, la limite dépend fortement des premiers termes des suites.

Preuve

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n - v_n| = o(v_n)$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum |u_n - v_n|$ converge, donc $\sum u_n - v_n$ converge.
Or on a supposé que $\sum v_n$ converge, donc par somme, $\sum u_n$ converge aussi.
Par symétrie des rôles on a donc bien l'équivalence. ∎

Exemple

Donner la nature de la série de terme général $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$.
Solution :
$u_n \sim \frac{1}{n}$, donc la série est équivalente à la série harmonique divergente.
Ainsi $\sum u_n$ diverge.

Théorème 5.6 *(Comparaison aux séries usuelles)*

Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs**,

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbf{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, alors $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $q > 1$ tel que $(q^n u_n)$ majorée, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

Si $n^\alpha u_n$ majorée, alors on peut noter M un majorant. Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{M}{n^\alpha}$.
Or la série $\sum \frac{M}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ (série de Riemann), donc par comparaison, la série $\sum u_n$ converge.
De même pour les deux autres cas. ∎

Corollaire 5.7 *(Critère de d'Alembert)*

Soit (u_n) est une suite à termes **strictement** positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \geqslant 0$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell = 1$, ce théorème ne permet pas de conclure, il faut une autre approche.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve

- Si $\ell < 1$, alors on peut trouver $q \in \mathbf{R}$, tel que $\ell < q < 1$ (par exemple $q = \frac{\ell+1}{2}$).
  Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers ℓ, il existe un certain rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$.
  Et par récurrence immédiate, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant q^{n-n_0} u_{n_0}$.
  Donc par comparaison à une série géométrique : $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors la suite est croissante et ne tend pas vers 0.
  La série diverge donc grossièrement.
- Si $\ell = 1$, on peut avoir tous les cas : par exemple $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mais $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

∎

C Comparaison série intégrale

Théorème 5.8 *(Comparaison série intégrale)*

Soit f une fonction (continue) **positive** décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
La série $\sum f(n)$ est de même nature que la suite $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Preuve

f est décroissante, donc pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$.
Par croissance de l'intégrale,

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt \leqslant \int_n^{n+1} f \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dt = f(n).$$

En sommant des inégalités de même sens :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

La série est à termes positifs, et la suite des intégrales est croissante positive (par positivité de f).

- Si la suite des intégrales converge, alors elle est majorée par un réel $M \in \mathbf{R}$.
  Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f \leqslant M$. Donc la série est majorée : elle converge.
- Réciproquement, si la série converge, alors elle est majorée par un réel $M \in \mathbf{R}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\int_0^n f \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leqslant M$. Donc la suite des intégrales est majorée, et comme elle est croissante, alors elle converge.

Donc la série et la suite des intégrales ont la même nature. ∎

Exemple

Prouver le théorème sur la convergence/divergence des séries de Riemann.
Solution :

- Pour $\alpha \leqslant 0$, le terme général ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement.
- Pour $\alpha > 0$, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est positive décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0. On peut donc appliquer le théorème de comparaison série intégrale (ici, il faut commencer à 1 pour pouvoir calculer l'intégrale).

– Si $\alpha = 1$, alors $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n$ qui diverge. Donc la série diverge.

– Si $\alpha \neq 1$, alors $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = -\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$
qui converge pour $\alpha - 1 > 0$, c'est-à-dire pour $\alpha > 1$.

6 Convergence absolue

Voici la notion qui permet de se ramener très souvent à une étude de série à termes positifs : on étudie la série des valeurs absolues.

Définition 6.1 *(Convergence absolue)*

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 6.2

Une série absolument convergente est convergente :

« *la convergence absolue implique la convergence simple* ».

Dans ce cas, $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

⚠ la réciproque est **fausse.**

Définition 6.3

Une série qui est convergente, sans être absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Preuve *(Cas réel)*

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
u_n^+ représente la partie positive de u_n et u_n^- sa partie négative.
Ainsi, pour $u_n \geqslant 0$, $u_n = u_n^+$ et $u_n^- = 0$ et pour $u_n < 0$, $u_n = -u_n^-$ et $u_n^+ = 0$.
On obtient donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ avec (u_n^+) et u_n^- des suites positives.
$\forall n \in \mathbf{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k^+ - \sum_{k=0}^n u_k^- = S_n^+ - S_n^-$.
Supposons que la série $\sum u_n$ converge absolument, c'est-à-dire $\sum |u_n|$ converge.
La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n |u_k|\right)$ est donc croissante et majorée par $\ell \in \mathbf{R}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n^+ \leqslant |u_n|$, donc $S_n^+ \leqslant \sum_{k=0}^n |u_k| \leqslant \ell$.
La suite (S_n^+) est croissante (somme de termes positifs) et majorée par ℓ, donc elle converge.
De même, la suite (S_n^-) converge, et par opération sur les limites, (S_n) converge.
Donc $\sum u_n$ converge.
Et, par inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|\sum_{k=0}^n u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^n |u_k|$.
D'où, par passage des inégalités à la limite, $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$. ∎

Preuve *(Cas complexe)*

$|\mathfrak{Re}\,(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\mathfrak{Im}\,(u_n)| \leqslant |u_n|$, donc les deux séries associées aux parties réelles et imaginaires convergent d'après le cas réel.
Donc par linéarité $\sum u_n$ converge. ∎

Exemple

Donner la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.
Solution :
$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (car $2 > 1$).
Donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, donc elle converge.

7 Séries à termes quelconques

Quelques exemples sur les séries à termes non nécessairement positifs. On essaie d'abord d'étudier l'absolue convergence avant d'entrer dans des analyses plus fines.

Théorème 7.1

Si $\sum u_n$ est une série complexe, telle que $u_n = O(v_n)$, avec (v_n) **positive**.
Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

La série $\sum u_n$ converge absolument d'après le cas réel, donc converge. ∎

Théorème 7.2 *(critère spécial des séries alternées)*

Soit (a_n) une suite **décroissante de limite nulle.**

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

- La série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, le reste d'ordre n, R_n est du signe de son premier terme.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leqslant a_{n+1}$ (majoré par son premier terme).

On remarque en outre que $\forall n \in \mathbf{N}$ $S_1 \leqslant S_3 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots \leqslant S_2 \leqslant S_0$ et qu'en particulier S_n est du signe de son premier terme $(-1)^0 a_0 \geqslant 0$.

Preuve *(À savoir refaire)*

- On montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
En effet,
$\forall n \in \mathbf{N}$, $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$ par décroissance de (a_n).
Donc (S_{2n}) est décroissante.
De même, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geqslant 0$.
Donc (S_{2n+1}) est croissante.
On a donc bien montré que les deux suites extraites sont monotones de sens contraire.

De plus $|S_{2n+1} - S_{2n}| = a_{2n+1} \to 0$, donc les suites sont bien adjacentes.

Les deux suites extraites convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbf{R}$, donc la suite (S_n) converge vers ℓ.
Ce qui prouve que la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

- (S_{2n}) est décroissante, donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $S_{2n} \geqslant \ell$, donc $R_{2n} = \ell - S_{2n} \leqslant 0$ ce qui est le signe de $(-1)^{2n+1} a_{2n+1}$.
De même $R_{2n+1} \geqslant 0$, donc du signe de $(-1)^{2n} a_{2n}$.
- De plus $R_{2n} = \ell - S_{2n} \leqslant S_{2n+1} - S_{2n}$ car $S_{2n+1} \leqslant \ell$.
Donc $0 \leqslant R_{2n} \leqslant a_{2n+1}$.
De même, $0 \geqslant R_{2n+1} \leqslant a_{2n+2}$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.
- Pour montrer que $(S_n) \geqslant 0$, il suffit de voir $a_1 \leqslant a_0$, donc $0 \leqslant S_1 \leqslant S_0$.
Que pour n impair, la suite (S_{2n+1}) est croissante et de premier terme positif (donc positive).
$S_{2n} \geqslant S_{2n+1} \geqslant 0$.
La chaîne d'inégalité s'obtient par monotonie des suites extraites.

■

Théorème 7.3 *(Cas général)*

Soit (u_n) une suite de signes altérnés telle que $(|u_n|)$ soit **décroissante de limite nulle.**

- La série $\sum u_n$ converge.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, le reste d'ordre n, R_n est du signe de son premier terme.
- $\forall n \in \mathbf{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$ (majoré par son premier terme).

On a le même résultat avec la négligeabilité.

Preuve

On a fait un cas au dessus.
C'est la même chose par symétrie si on échange les signes (revient à tout multiplier par (-1)). ■

Exemple

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et donner le signe de sa limite.
2. La série converge-t-elle absolument ?

Remarque : On peut montrer que la série des restes est elle-même alternée, donc converge. Mais je ne détaille par car cela ne tient pas dans la marge.

Méthode *(Nature)*

Pour étudier la **nature** d'une série à termes réels ou complexes :

- **divergence grossière :** le terme général tend-il vers 0 ?
- **absolue convergence :** étude des valeurs absolues du terme général.
  - comparaison asymptotique : $\sim (v_n)$, $O(v_n)$ ou $o(v_n)$ avec $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.
  - critère de d'Alembert (si non annulation du terme général).
  - comparaison avec une série usuelle.
  - majoration « simple » par le terme général d'une série convergente, ou directement la suite des sommes partielles.
  - comparaison série-intégrale.
- **semi-convergence :**
  - Critère spécial des séries alternées.
  - Développement asymptotique.

Méthode *(Calcul de la somme)*

Si on demande de calculer une somme, les méthodes peuvent différer :

- reconnaître une somme télescopique.
- Prouver la convergence, puis trouver une équation que satisfait la limite (voir exemple plus bas).
- Prouver l'absolue convergence, puis sommer par paquets ou de façon commutative (voir partie suivante sur les familles sommables).

Exemple *(Série exponentielle)*

Pour $x \in \mathbf{C}$, on définit la **série exponentielle** par $\sum \frac{x^n}{n!}$.
Prouver que la série converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On note alors $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Solution :
Pour $x > 0$, et $n \in \mathbf{N}$, on note $u_n = \frac{x^n}{n!}$.
La suite est strictement positive et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \to 0$.
D'après le critère de d'Alembert, la série converge.
Si $x < 0$, la série converge absolument, donc converge.
Si $x = 0$, le résultat est trivial et la série converge vers 1.

Exemple *(Séries géométriques dérivées)*

La **série géométrique dérivée** $\sum nq^{n-1}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

La **série géométrique dérivée seconde** $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas,
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Solution :
$\star$ Étude de la convergence.
Si $|q| \geqslant 1$, alors le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
Si $q = 0$, le résultat est trivial.
Si $|q| < 1$ et $q \neq 0$, alors on note $u_n = nq^{n-1}$.
Ainsi pour $n \geqslant 1$, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{n}|q| \underset{n\to+\infty}{\sim} |q| < 1$. D'après le critère de d'Alembert, la série converge.

$\star$ Pour tout $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned} S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)q^k && \text{changement d'indice}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k + \sum_{k=0}^{+\infty} q^k && \text{car les deux séries convergent}\\ &= qS_1 + \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

Donc $(1-q)S_1 = \frac{1}{1-q}$, ainsi $S_1 = \frac{1}{(1-q)^2}$.
Pour la série dérivée seconde, on obtient le critère de convergence de la même façon que pour la dérivée première.
$$\begin{aligned} S_2 = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)q^{k-1} && \text{changement d'indice}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1+2)q^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2kq^{k-1} && \text{car les deux séries convergent}\\ &= q\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + 2S_1 \\ &= qS_2 + 2S_1. \end{aligned}$$
Donc $(1-q)S_2 = 2S_1 = \frac{2}{(1-q)^2}$, ainsi $S_2 = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Explications
On reconnaît à chaque fois des dérivations *formelles* par rapport à q :
« la somme des dérivées est égale à la dérivée de la somme. »
C'est ainsi qu'il faut retenir les formules — au brouillon — mais on ne peut pas (de façon simple et avec les outils dont nous disposons actuellement), les démontrer ainsi.
En effet, il ne faut pas oublier que $\sum_{k=0}^{+\infty}$ désigne une limite et non une somme finie et la linéarité de la dérivation ne s'applique donc pas.

8 Application : le développement décimal

Le premier théorème justifie que tout réel peut s'écrire sous forme décimale (éventuellement infinie) et que cette écriture est unique si on interdit les nombres du type $0,99999\cdots = 1$.

Théorème 8.1

Soit $x \in [0,1[$, alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que

- $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n \in [\![0,9]\!]$,
- la suite n'est pas stationnaire à 9,
  c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbf{N}, \exists k \geqslant n,$ tel que $a_k \neq 9$

et telle que
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}.$$
Réciproquement, toute suite de ce type définit un unique réel.

Preuve *(Non exigible)*
Unicité :
Soit $x \in [0,1[$, on suppose qu'une telle suite (a_n) existe.
Supposons qu'une autre suite (b_n) existe et vérifie les même propriétés.
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, 10^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\, 10^{-n}$$
On suppose par l'absurde que (a_n) et (b_n) sont différentes.
Alors, il existe un plus petit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$, par exemple $b_{n_0} > a_{n_0}$.
Par opération sur les limites,
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n)\, 10^{-n}\\ &= \sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n - b_n)\, 10^{-n}\\ &= 10^{-n_0}\left(a_{n_0} - b_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}(a_n - b_n)\, 10^{-(n-n_0)}\right) \end{aligned}$$
Donc
$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}(a_n - b_n)\, 10^{-(n-n_0)} = b_{n_0} - a_{n_0} \geqslant 1.$$

Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n - b_n \leqslant 9$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (a_n - b_n)\, 10^{-(n-n_0)} &\leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 9 \cdot 10^{-(n-n_0)}\\ &\leqslant 9 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 10^{-(n-n_0)}\\ &\leqslant 9 \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n} \quad \text{(changement d'indice)}\\ &\leqslant 9 \frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} \quad \text{(série géométrique)}\\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

Ces deux inégalités donnent donc

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (a_n - b_n)\, 10^{-(n-n_0)} = 1.$$

Or, la deuxième inégalité est stricte sauf dans le cas où la suite $(a_n - b_n)$ est stationnaire à 9. Ceci n'est possible que si (a_n) est stationnaire à 9 et (b_n) stationnaire à 0. C'est impossible par hypothèse : absurde. Donc la suite est définie de façon unique.

Existence :

a_n correspond à la n-ième décimale après 0, c'est-à-dire que l'on peut construire la suite par récurrence :

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}.$$

Visuellement, cela revient à tronquer x après la n-ième décimale.

Alors on définit pour $n \geqslant 1$,

$$a_n = 10^n (A_n - A_{n-1}).$$

a_n correspond bien à la n-ième décimale de x.

Montrons ces trois points :

1. que la suite (a_n) est bien à valeurs dans $[\![0, 9]\!]$,
2. que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n\, 10^{-n}$ converge vers x,
3. que la suite n'est pas stationnaire à 9.

1. Le premier point revient à montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\lfloor 10y \rfloor - 10\lfloor y \rfloor \in [\![0, 9]\!]$.

$$\left\{\begin{array}{lccc} & y-1 & < \lfloor y \rfloor & \leqslant y \\ \text{et} & 10y-1 & < \lfloor 10y \rfloor & \leqslant 10y \end{array}\right.$$
$$\text{donc} \left\{\begin{array}{lccc} & 10y-10 & < 10\lfloor y \rfloor & \leqslant 10y \\ \text{et} & 10y-1 & < \lfloor 10y \rfloor & \leqslant 10y \end{array}\right.$$
$$\text{donc} \left\{\begin{array}{lccc} & -10y & \leqslant -10\lfloor y \rfloor & < -10y+10 \\ \text{et} & 10y-1 & < \lfloor 10y \rfloor & \leqslant 10y \end{array}\right.$$

et par somme :

$$-1 < \lfloor 10y \rfloor - 10\lfloor y \rfloor < 10.$$

Comme les inégalités sont strictes et que le résultat est entier, on en déduit donc, en prenant $y = 10^n x$ que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \in [\![0, 9]\!]$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ la n-ième somme partielle.

$$x - x_n = x - \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} = x - \sum_{k=1}^{n} A_k - A_{k-1} = x - A_n + A_0 = x - A_n$$

Or $|10^n(x - A_n)| = |10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor| = 10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor < 1$.
Donc

$$\forall n \geqslant 1, \qquad |x - x_n| < 10^{-n}.$$

Donc la série converge vers x.

3. Si, par l'absurde, la suite (a_n) était stationnaire à 9 à partir d'un certain rang n_0, alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$x_n - x_{n_0} = 9 \sum_{k=n_0+1}^{n} 10^{-k} = 10^{-n_0} - 10^{-n}$$

Si $n \to +\infty$, alors on obtient $x - x_0 = 10^{-n_0}$.
Or au point 2. nous avions montré que

$$x - x_{n_0} < 10^{-n_0}.$$

C'est une inégalité stricte : impossible.
Donc la suite n'est pas stationnaire à 9.

■

Corollaire 8.2

Tout nombre $x \in \mathbf{R}_+$ admet un développement décimal unique avec la suite définie comme au théorème précédent et en ajoutant $a_0 = \lfloor x \rfloor$.
si $x \in \mathbf{R}_-$, on prend le développement de $-x$ et on remplace a_0 par $-a_0$.

Propriété 8.3 *(Développement des rationnels - Hors programme.)*

Un nombre est rationnel si, et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

Preuve

sens direct : (sans formalisme)

Par définition, un nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$.

Donc si on effectue la division euclidienne « infinie » de p, par q, on obtient une suite de décimales et des restes successifs à chaque fois compris entre 0 et $q - 1$.

Il y a donc un nombre fini de restes possibles et on doit donc nécessairement avoir deux fois un même reste dans le développement décimal infini.

Alors, les décimales entre ces deux occurrences se retrouveront exactement après la deuxième, puis on retrouvera le même reste...
sens réciproque :
En oubliant les premières décimales (quitte à multiplier par 10^n) et à enlever la partie entière, on obtient un nombre du type $x = 0, b_1 \cdots b_p b_1 b_2 \cdots$
Alors $10^p x = N + x$.
Donc

$$x = \frac{N}{10^p - 1} \in \mathbf{Q}.$$

■

9 Familles sommables à termes positifs

Les familles sommables veulent généraliser les séries pour un ensemble d'indices autre que $\mathbf{N}$, ou pour des suites dépendant de plusieurs indices.
Ces ensembles d'indices peuvent être $I = \mathbf{Z}$, $I = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ pour des sommes à deux indices, ou même $I = \mathbf{Q}$. Cela amène deux remarques :

- La somme est « discrète » : ce n'est pas une intégrale.
  Ainsi, l'ensemble d'indices constitue un ensemble infini, mais que l'on peut énumérer à l'instar des entiers naturels. On dit que l'ensemble est dénombrable.
  Par exemple, la théorie des familles sommables n'est pas valable pour $\mathbf{R}$ qui n'est pas dénombrable : intuitivement, il contient « trop » d'éléments. Dans ce cas, on fait appel à l'intégrale.
  L'intégrale de Lebesgue permet de rapprocher la notion d'intégrale et celle de somme discrète, mais ce n'est pas au programme.
  En effet, vous verrez en deuxième année qu'une famille ne peut être sommable qu'à condition que son support soit dénombrable.
- En général, l'ensemble d'indices ne contient pas de relation d'ordre totale naturelle.
  Ainsi, contrairement au cas des séries que nous avons vu précédemment, l'ordre de sommation ne doit pas avoir d'importance sur le résultat. On peut démontrer que cela exige l'absolue convergence.

A Dénombrabilité

Une présentation plus approfondie de la dénombrabilité est proposée en annexe.
On reste ici sur l'idée intuitive pour ne pas alourdir notre propos.

Explications
Un ensemble **dénombrable** est un ensemble infini, dont on peut « numéroter » les éléments sous la forme d'une suite $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ indicée par $\mathbf{N}$ ou éventuellement[2] par $\mathbf{Z}$: $\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots$.
Il existe des ensembles infinis non dénombrables. Intuitivement, ces ensembles non dénombrables ont « beaucoup plus d'éléments » que les ensembles dénombrables : ils sont trop touffus pour que l'on puisse compter les éléments un à un. $\mathbf{R}$ est un ensemble non dénombrable.

Propriété 9.1 *(Ensembles de référence)*

1. Un ensemble fini n'est pas dénombrable.
2. $\mathbf{N}$ et tous ses sous-ensembles infinis sont dénombrables.
3. $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.
4. pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{N}^k$, $\mathbf{Z}^k$, $\mathbf{Q}^k$ (et leurs parties infinies) sont dénombrables.

B Demi-droite positive achevée :

On travaille dans un premier temps avec des termes positifs, et il est donc plus confortable de ne pas mettre à part le cas où la somme tend vers $+\infty$.
On dit alors que la somme *est égale à* $+\infty$.
Cela demande de compléter $[0, +\infty[$ avec un nouveau nombre : $+\infty$.

Définition 9.2 *(demi-droite positive achevée)*

On note $[0, +\infty]$, l'ensemble $[0, +\infty[$ auquel est ajouté l'élément $+\infty$.
Il est muni d'une relation d'ordre totale naturelle qui étend celle sur $[0, +\infty[$ par : $\forall (x, y) \in [0, +\infty]^2$,

$$x \leqslant y \iff \begin{cases} \text{si} & (x, y) \in [0, +\infty[^2 \text{ et } x \leqslant y, \\ \text{ou} & y = +\infty. \end{cases}$$

En d'autres termes, $+\infty$ le maximum de $[0, +\infty]$.

Propriété 9.3

Toute partie non vide de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Explications
Ici, plus besoin d'exiger que l'ensemble soit majoré :
dans le cas non majoré, on prend $\sup(A) = +\infty$. C'est déjà ce que l'on faisait naturellement.

C Séries à termes positifs

Avant de parler de sommabilité, voyons l'usage de cette demi-droite achevée dans le cas des séries et analysons en quoi cela simplifie les notations.

2. $\mathbf{Z}$ est lui-même dénombrable : on peut numéroter ses éléments par les entiers naturels. On comprends donc que par transitivité, tout ensemble « numérotable » par $\mathbf{Z}$ l'est aussi par $\mathbf{N}$.

Théorème 9.4

Toute série à termes positifs admet une limite dans $[0, +\infty]$.
On note cette limite
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
De plus,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \sup_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k=0}^{n} u_k\\ &= \sup_J \sum_{k\in J} u_k.\end{aligned}$$
où J parcourt l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$.

La série converge si, et seulement si la suite des sommes partielles est majorée, c'est-à-dire si la somme est finie.

Preuve

La série étant à termes positifs, donc la suite des sommes partielles est croissante, et elle admet donc une limite dans $[0, +\infty]$ vers sa borne supérieure d'après le théorème de la limite monotone.
Ainsi
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sup_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$
De plus, pour toute partie finie $J \subset \mathbf{N}$, on note $N = \max J$, alors, par positivité de la suite,
$$\sum_{k\in J} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Ainsi on obtient
$$\sup_J \sum_{k\in J} u_k \leqslant \sup_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Pour $J_n = [\![1, n]\!]$, on sait par définition que $\sum_{k\in J_n} u_k \leqslant \sup_J \sum_{k\in J} u_k$, or on vient de voir que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in J_n} u_k = \sup_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k=0}^{n} u_k$.
On obtient donc par passage à la limite (qui existe) :
$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sup_J \sum_{k\in J} u_k.$$
Ains par double inégalité on trouve bien :
$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k=0}^{n} u_k = \sup_J \sum_{k\in J} u_k.$$
■

Corollaire 9.5 *(Convergence commutative)*

Pour toute permutation σ de $\mathbf{N}$ et $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite à termes positifs.
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$
En d'autres termes :

la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Preuve

Cela découle simplement de l'expression donnée au théorème précédent à partir de la borne supérieure sur les parties finies de $\mathbf{N}$ où l'ordre n'intervient pas.
Formellement on peut rédiger ainsi :
Soit σ une permutation de $\mathbf{N}$, on note $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$.
Pour tout $J \in \mathscr{F}$, $\sum_{k\in J} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in\sigma(J)} u_k$.
Or $\sigma(J) \in \mathscr{F}$, donc
$$\sum_{k\in J} u_{\sigma(k)} \leqslant \sup \sum_{i\in J} u_i.$$
En appliquant le même résultat à u_σ avec la permutation σ^{-1}, on trouve $\sum_{k\in J} u_k \leqslant \sup \sum_{i\in J} u_{\sigma(i)}$, donc par double inégalité, on a le résultat cherché. ■

D Sommes finies à termes positifs

Le résultat précédent sur les séries à termes positifs s'applique également aux sommes finies.
En effet, toute somme finie peut s'interpréter à l'aide des séries en complétant le terme général par la valeur nulle.
Par exemple, si $n \in \mathbf{N}$ et $I = [\![1, n]\!]$.
On considère une suite finie $(u_i)_{i\in I}$ à termes positifs.
On peut alors compléter I avec $I' = I \cup \{n+1, n+2, \cdots\} = \mathbf{N}^*$. en posant pour tout $i \geqslant n+1$, $u_i = 0$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i\in\mathbf{N}} u_i$, la seconde somme ayant été définie avec le formalisme des séries à termes positifs comme plus haut.

E Familles sommables à termes positifs

L'intérêt (et la faiblesse) du formalisme plus haut est qu'il ne prend pas en compte l'ordre des termes dans la somme. On peut donc le généraliser à n'importe quel ensemble d'indice dénombrable (même non ordonné) à condition que la famille soit à termes positifs.

Définition 9.6 *(Somme d'une famille)*

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une suite d'éléments de $[0,\,+\infty]$ indicée par I.
La somme de la famille est définie par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_J \left(\sum_{i\in J} u_i\right)$$

où J décrit l'ensemble des parties finies de I.
Cette somme est finie ou *infinie.*
Lorsque la somme est **finie**, on dit que la famille est **sommable.**

Exemple *(Croissance)*

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies de I muni de la relation d'ordre d'inclusion.
Montrer que $\left\{\begin{array}{ccc} (\mathscr{F},\subset) & \to & (\mathbf{R},\leqslant) \\ J & \mapsto & \sum\limits_{i\in J} u_j \end{array}\right.$ est croissante

Solution :

Soient F_1 et F_2 deux parties finies de I telles que $F_1 \subset F_2$.
alors $\sum\limits_{i\in F_2} u_i = \sum\limits_{i\in F_1} u_i + \sum\limits_{i\in F_2\setminus F_1} u_i$.
Or les termes sont positifs, donc $\sum\limits_{i\in F_2\setminus F_1} u_i \geqslant 0$, ce qui donne

$$\sum_{i\in F_1} u_i \leqslant \sum_{i\in F_2} u_i.$$

Propriété 9.7

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de termes positifs, alors pour tout σ permutation de I,

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}.$$

Preuve

C'est la même preuve que pour les séries faite un peu plus haut.. ∎

Propriété 9.8

Le changement d'un nombre fini de termes ne modifie pas la nature d'une famille.

Preuve

En exercice. ∎

Propriété 9.9

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de réels positifs.
Si $(a_i)_{i\in I}$ possède une sous-famille qui n'est pas sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Remarque : La réciproque est évidemment vraie en prenant la sous famille égale à la famille elle-même.

Preuve

S'il existe une sous-famille non sommable, alors on peut trouver une suite de sous-familles finies de celle-ci dont les sommes correspondantes divergent.
Or, ces sous-familles finies sont aussi des sous-familles de I, ce qui justifie la non-sommabilité de $(a_i)_{i\in I}$. ∎

Méthode

Pour montrer qu'une famille n'est **pas** sommable, il suffit de trouver une suite de familles finies J_n de I telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j\in J_n} u_j = +\infty$.

Exemple

Étudier successivement la sommabilité de

1. la famille $\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap[1,\,+\infty[}$,
2. Pour $a\in]0,\,1[$, la famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap]0,\,1]}$.
3. Pour $a\in]0,\,1[$, la famille $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap[1,\,+\infty[}$.

Solution :

1. On veut montrer que la première famille n'est pas sommable.
   Pour cela, il suffit de trouver une suite de parties finies $J_n\in\mathbf{Q}$ telles que les sommes $\sum\limits_{x\in J_n}\frac{1}{x}$ soient non bornées.
   Ici, comme $\mathbf{N}^*\subset\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+^*$ et que la série harmonique diverge, alors on pose pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $J_n=[\![1,\,n]\!]$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$ donc la famille $\left(\frac{1}{x}\right)_{x\in\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+^*}$ n'est pas sommable.
2. On considère le sous-ensemble d'indices $F=\left\{\frac{1}{k},\,k\geqslant 1\right\}$.
   Alors $\sum\limits_{k\in F}\frac{1}{x^2}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k^2=+\infty$, donc la famille n'est pas sommable.
3. Il existe une infinité de nombres rationnels dans l'intervalle$[1,\,2]$.
   Ainsi, on peut trouver une suite d'ensembles finis $J_n\subset\mathbf{Q}\cap[1,\,2]$ tels que $\forall n\geqslant 1$, $\mathrm{Card}\,(J_n)=n$.
   $$\sum_{x\in J_n}\frac{1}{x^2}\geqslant\sum_{x\in J_n}\frac{1}{2}=\frac{n}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty.$$

Donc la famille n'est pas sommable.

Propriété 9.10 *(Linéarité et croissance)*

Soit I un ensemble dénombrable.
Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à termes positifs.

- $\forall(\lambda,\,\mu)\in(\mathbf{R}_+)^2$, $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda a_i+\mu b_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i+\mu\sum_{i\in I}b_i$.
  En particulier, si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables alors $(\lambda a_i+\mu b_i)_{i\in I}$ l'est aussi.
- Si $\forall i\in I,\ a_i\leqslant b_i$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I}a_i\leqslant\sum_{i\in I}b_i$.
  En particulier, si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(a_i)_{i\in I}$ l'est également,
  et si $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable alors $(b_i)_{i\in I}$ ne l'est pas non plus.

Preuve

- Pour toute partie finie J de I,
$$\sum_{i\in J}(\lambda a_i+\mu b_i)=\lambda\sum_{i\in J}a_i+\mu\sum_{i\in J}b_i\leqslant\lambda\sum_{i\in I}a_i+\mu\sum_{i\in I}b_i.$$
  Donc, si les deux familles sont sommables, alors la famille obtenue par combinaison linéaire est sommable.
  On peut obtenir l'inégalité dans l'autre sens :
$$\lambda\sum_{i\in J}a_i+\mu\sum_{i\in J}b_i=\sum_{i\in J}(\lambda a_i+\mu b_i)\leqslant\sum_{i\in I}(\lambda a_i+\mu b_i)\,.$$
  Ce qui donne l'égalité par encadrement.
- Pour toute partie finie $J\subset I$, on a $\displaystyle\sum_{i\in J}a_i\leqslant\sum_{i\in J}b_i\leqslant\sum_{i\in I}b_i$.
  Donc par définition de la borne supérieure (plus petit des majorants) :
$$\sum_{i\in I}a_i\leqslant\sum_{i\in I}b_i.$$

■

Exercice

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I'}$ sont deux familles à termes positifs.
Si pour tout $i\in I'\setminus I$, on pose $a_i=0$ et pour tout $i\in I\setminus I'$ on pose $b_i=0$, alors pour tout λ, μ réels positifs,
$$\sum_{i\in I\times I'}(\lambda a_i+\mu b_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i+\mu\sum_{i\in I}b_i.$$

Théorème 9.11 *(Sommation par paquets)*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de réels positifs.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un recouvrement disjoint au plus dénombrable de I.
La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si

- $\forall n\in\mathbf{N}$, $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable,
- et $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\sum_{i\in I_n}a_i$ converge.

Dans ce cas
$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{n\geqslant0}\sum_{i\in I_n}a_i.$$

Explications

Cela veut dire qu'une famille qui est sommable, l'est suivant n'importe quel « chemin », réciproquement, pour montrer qu'une famille n'est pas sommable, il suffit de trouver un ordre de sommation qui fait diverger pour conclure.

Preuve

Admis.
Pour les curieux :
Soit J une partie finie de I. On pose pour tout $n\in\mathbf{N}$, $J_n=J\cap I_n$, on obtient alors un nombre fini de J_n non vides (et finies) et on peut écrire
$$\sum_{i\in J}a_i=\sum_{n\in\mathbf{N}}\sum_{i\in J_n}a_i.$$
Ici, la somme est finie bien qu'elle soit indicée par $n\in\mathbf{N}$.
Or, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{i\in J_n}a_i\leqslant\sum_{i\in I_n}a_i$, donc
$$\sum_{i\in I}a_i\leqslant\sum_{n\in\mathbf{N}}\sum_{i\in I_n}a_i.$$
Ceci prouve bien que si la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors l'une des familles $(a_i)_{i\in I_n}$ non plus ou la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\sum_{i\in I_n}a_i$ diverge.
On suppose à présent que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors toute sous famille $(a_i)_{i\in I_n}$ est aussi sommable.
Montrons à présent que la série indicée par n : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}}\sum_{i\in I_n}a_i$ converge.
Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on peut poser J_n une partie finie de I_n telle que
$$\sum_{i\in I_n}a_i\leqslant\sum_{i\in J_n}a_i+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$
$\forall N\in\mathbf{N}$
$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{i\in I_n}a_i\leqslant\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_n}a_i+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=\sum_{i\in\bigcup_{n=0}^{N}J_n}a_i+\varepsilon\leqslant\sum_{i\in I}a_i+\varepsilon.$$

Donc la suite des sommes partielles est majorée (et croissante), donc elle converge.
On obtient alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_i \leqslant \sum_{i \in I} a_i + \varepsilon.$$

D'après l'autre inégalité montrée plus haut, on a finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_i = \sum_{i \in I} a_i.$$

■

Remarque : Ici, on a indicé les ensembles (I_n) par les entiers naturels, mais il peut arriver qu'ils soient plus facilement indicés par d'autres ensembles au plus dénombrables comme $\mathbf{Q}$ par exemple, c'est ce qui donnera le théorème de Fubini.
Si la famille est finie, il suffit de la compléter par des ensembles vides pour obtenir une famille dénombrable.

Exemple

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(a+b)^3}\right)_{(a,\,b)\in(\mathbf{N}^*)^2}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que $\left(\dfrac{1}{(a+b)^\alpha}\right)_{(a,\,b)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ soit sommable.

Solution :

Méthode à retenir avec les produits de Cauchy.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $C_n = \left\{(a,\,b) \in (N^*)^2,\, a+b=n\right\}$. $(C_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ forme un recouvrement disjoint de $(\mathbf{N}^*)^2$.
On peut donc écrire :

$$\sum_{(a,\,b)\in(\mathbf{N}^*)^2} \frac{1}{(a+b)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,\,b)\in C_n} \frac{1}{(a+b)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(a,\,b)\in C_n} \frac{1}{n^2}.$$

Or $\mathrm{Card}\,(C_n) = n-1$ car pour chaque $a \in [\![1,\, n-1]\!]$, il existe un unique $b \geqslant 1$ tel que $a+b=n$ et pour $a \geqslant n$, il n'existe aucun couple qui convienne.
Ainsi $\displaystyle\sum_{(a,\,b)\in C_n} \frac{1}{n^3} = \frac{n-1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente.
Donc la famille $\left(\dfrac{1}{(a+b)^3}\right)_{(a,\,b)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable.
Plus généralement, on voit que $\displaystyle\sum_{(a,\,b)\in C_n} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ est sommable si, et seulement si $\alpha - 1 > 1$ (comparaison aux séries de Riemann) c'est-à-dire $\alpha > 2$.

Exemple

Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)_{(a,\,b)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

Solution :
Ici, les produits de Cauchy ne sont pas pratiques à exhiber.
Par contre, on sait que $a^2+b^2 \leqslant (a+b)^2$, donc $\frac{1}{a^2+b^2} \geqslant \frac{1}{(a+b)^2}$.
D'après l'exemple précédent, on voit que la famille n'est pas sommable.

Théorème 9.12 *(Théorème de Fubini : Famille produit)*

Soit I et J des ensembles dénombrables d'indices.
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in J}$ sont deux familles positives, alors

$$\sum_{(i,\,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

En particulier si les deux familles sont sommables, alors la famille produit est aussi sommable. Plus généralement : si I_1, $I_2 \cdots$, I_n sont des ensembles dénombrables d'indices.
et si $(a_i^{(1)})_{i\in I_1}$, $(a_i^{(2)})_{i\in I_2}$, ... $(a_i^{(n)})_{i\in I_n}$ sont des familles positives, alors

$$\sum_{(i_1,\,\cdots,\,i_n)\in \prod_{k=1}^{n} I_k} \prod_{k=1}^{n} a_{i_k}^{(k)} = \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i\in I_k} a_i^{(k)}\right).$$

Preuve
Pour deux familles, c'est un cas particulier de la sommation par paquets avec la famille $(a_i b_j)_{(i,\,j)\in I\times J}$ où la partition est indicée par J.
Par récurrence sur le nombre de familles. ■

10 Famille sommables de nombres complexes

Commençons par un exemple pour voir la difficulté.

Exemple

La série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ est semi-convergente, mais pas absolument convergente.
Si on ne prend que les termes pairs alors on obtient la série $\sum \frac{1}{2n}$ qui diverge vers $+\infty$ (série harmonique) et de même $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge aussi vers $+\infty$.
On peut donc créer un algorithme pour réarranger les termes de manière à faire tendre la somme alternée vers une autre limite, par exemple 0.
On commence par le premier terme -1 et on rajoute ensuite les termes d'indice pair, par ordre d'indice croissant jusqu'à ce que la somme dépasse 0 (on sait que ça arrivera car la série des termes pairs diverge vers $+\infty$), puis on place ensuite les termes impairs toujours en commençant par l'indice le plus petit non encore utilisé pour revenir sous zéro, et on continue avec les termes positifs...

$$\begin{array}{ll} a_0 = -1 & S_0 \approx -1.0 \\ a_1 = 1/2 & S_1 \approx -0.5 \\ a_2 = 1/4 & S_2 \approx -0.25 \\ a_3 = 1/6 & S_3 \approx -0.083 \\ a_4 = 1/8 & S_4 \approx 0.042 \\ a_5 = -1/3 & S_5 \approx -0.292 \\ a_6 = 1/10 & S_6 \approx -0.192 \\ a_7 = 1/12 & S_7 \approx -0.108 \\ a_8 = 1/14 & S_8 \approx -0.037 \\ a_9 = 1/16 & S_9 \approx 0.026 \\ a_{10} = -1/5 & S_{10} \approx -0.174 \\ a_{11} = 1/18 & S_{11} \approx -0.119 \\ a_{12} = 1/20 & S_{12} \approx -0.069 \\ \vdots & \end{array}$$

De cette façon, on place un à un tous les termes de la somme et comme ils tendent vers 0 en valeur absolue, alors on « sent » que la somme va osciller avec des variations de plus en plus faibles autour de 0 et finalement converge vers cette valeur.
Cette idée peut tout à fait être formalisée, pour 0 ou pour toute autre valeur, voire $+\infty$ ou $-\infty$, l'algorithme est simple à écrire mais la formalisation est un peu lourde.

Nous avons vu plus haut que ce comportement est spécifique aux séries semi-convergentes car les séries absolument convergentes sont commutativement convergentes : elles convergent vers la même limite quel que soit l'ordre de sommation.
Dès que la série n'est plus à termes positifs et que l'ordre de sommation n'est plus explicite, il devient donc indispensable d'exiger l'absolue convergence pour que la somme ait un sens.

Définition 10.1 *(Famille sommable)*

Soit $(a_i)_I$ une famille de $\mathbf{C}^I$, avec I fini ou dénombrable.
La famille est dite **sommable**, si la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est elle-même sommable, c'est-à-dire si $\left\{\sum_{i\in J} |a_i|\,,\ J\subset I,\ J \text{ finie}\right\}$ est majorée dans $\mathbf{R}$.
On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indicées par I.

Théorème 10.2

Cas réel : Si une famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbf{R}^I$ est sommable, alors les familles à termes positifs $\left(a_i^+\right)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- .$$

Cas complexe : Si une famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ est sommable, alors les familles à termes réels $(\mathfrak{Re}\,(a_i))_{i\in I}$ et $(\mathfrak{Im}\,(a_i))_{i\in I}$ sont sommables et on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \mathfrak{Re}\,(a_i) + i \sum_{i\in I} \mathfrak{Im}\,(a_i).$$

On rappelle que pour un nombre réel x, les partie positive x^+ et partie négative x^-, sont définies respectivement $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$ de sorte que $x = x^+ - x^-$, un seul des deux étant non nul.

Preuve

On suppose la famille sommable, alors $\forall i \in I$, $0 \leqslant a_i^+ \leqslant |a_i|$, donc par comparaison, la famille $(a_i^+)_{i\in I}$ est sommable.
De même pour la famille $(a_i^-)_{i\in I}$.
On remarque de plus que si (a_i) est à termes positifs, alors $\forall i \in I$, $a_i^+ = a_i$ et $a_i^- = 0$, ainsi, la somme définie dans ce théorème coïncide avec la somme définie pour les familles à termes positifs.
Pour une famille à termes complexes, on utilise que $0 \leqslant |\mathfrak{Re}\,(a_i)| \leqslant |a_i|$, donc la famille $(\mathfrak{Re}\,(a_i))$ est sommable au sens des familles à termes réels quelconques (ce que l'on vient de faire) et on peut donc définir sa somme.
De même pour la famille des parties imaginaires.
On remarque également que le définition pour une famille complexe coïncide avec le cas réel, si tous les termes de la famille sont réels. ∎

Remarque : La définition de la sommabilité pour une famille correspond donc bien à **l'absolue convergence** pour une série.

On remarque également que si la famille ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls alors elle est toujours sommable.

Propriété 10.3

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors toute famille extraite est encore sommable.

Preuve

C'est simplement la reprise de de la propriété 9.9 sous forme de contraposée que l'on applique à la famille des modules. ∎

Théorème 10.4

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ une famille complexe et $(v_i)_{i\in I}$ une famille **sommable à termes positifs.**
Si $\forall i \in I$, $|u_i| \leqslant v_i$ alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Preuve

C'est le théorème de comparaison des familles à termes positifs. ■

- Dans le cas où les hypothèses du théorème sont vérifiées, on a alors
$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$
- On peut remplacer la comparaison $\leqslant$, par un petit o ou un grand O, mais comme ces généralisations ne sont pas au programme officielle on se ramènera alors aux familles à termes positifs pour les utiliser.
- On peut alléger les hypothèses du théorème précédent et supposer que la majoration est vraie sauf sur une partie finie $F \subset I$.
Mais dans ce cas, l'inégalité triangulaire généralisée sur les sommes n'est plus vraie.

Propriété 10.5

Une famille sommable $(a_i)_{i\in I} \in \mathbf{C}^I$ converge vers sa somme :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists F \subset I,\ F \text{ partie finie},\ \left|\sum_{i\in F} a_i - \sum_{i\in I} a_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

Explications

On retrouve la généralisation de la convergence d'une série vue comme une suite de somme partielles.
En effet, si une série converge alors
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|\sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right| \leqslant \varepsilon.$$
donc en particulier pour $n = n_0$, on considère $F = [\![0,\, n_0]\!]$ partie finie de $\mathbf{N}$ et on obtient $\left|\sum_{i\in F} a_i - \sum_{i\in \mathbf{N}} a_i\right| \leqslant \varepsilon$.

Preuve

On le montre dans le cas réel, la preuve se prolonge ensuite naturellement au cas complexe.

D'après la définition de la somme des familles à termes positifs : $\sum_{i\in I} a_i^+ = \sup_J \left(\sum_{i\in J} a_i^+\right)$.
Donc par caractérisation de la borne supérieure $\forall \varepsilon > 0$, il existe une partie de I finie, notée F_+ telle que
$$0 \leqslant \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in F_+} a_i^+ \leqslant \varepsilon.$$
De plus, comme la famille est à termes positif, pour toute famille finie F qui contient F_+, on a $\sum_{i\in F} a_i^+ \geqslant \sum_{i\in F_+} a_i^+$.
et par définition de la forme supérieure, on trouve donc $\sum_{i\in I} a_i^+ \geqslant \sum_{i\in F} a_i^+ \geqslant \sum_{i\in F_+} a_i^+$,
ce qui donne finalement
$$\left|\sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in F} a_i^+\right| \leqslant \varepsilon.$$
On fait de même pour $(a_i^-)_{i\in I}$ et on trouve une famille F_- telle que pour toute famille F contenant F_- on ait
$$\left|\sum_{i\in I} a_i^- - \sum_{i\in F} a_i^-\right| \leqslant \varepsilon.$$
Ainsi, on obtient, grâce à l'inégalité triangulaire que pour $F = F_+ \cup F_-$
$$\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right| \leqslant 2\varepsilon.$$
Quitte à remplacer ε par $\varepsilon/2$ dans les deux sommes précédentes, on obtient le résultat voulu. ■

Théorème 10.6 *(Convergence commutative)*

Soit I un ensemble dénombrable d'indice et $(u_k)_{k\in I}$ une famille **sommable**.
Pour toute permutation σ de I
$$\sum_{k\in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in I} u_k$$

Preuve

En utilisant le formalisme des familles sommables (et non celui des séries semi-convergentes), on a pour une famille réelle :
$$\sum_{k\in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in I} u_{\sigma(k)}^+ - \sum_{k\in I} u_{\sigma(k)}^-.$$
Or, les deux familles $\left(u_{\sigma(k)}^+\right)_{k\in I}$ et $\left(u_{\sigma(k)}^-\right)_{k\in I}$ étant des familles à termes positifs sommables, elles sont commutativement convergentes, donc
$$\sum_{k\in I} u_{\sigma(k)} = \sum_{k\in I} u_{\sigma(k)}^+ - \sum_{k\in I} u_{\sigma(k)}^- = \sum_{k\in I} u_k^+ - \sum_{k\in I} u_k^- = \sum_{k\in I} u_{\sigma(k)}.$$
■

Théorème 10.7

Les théorème de sommation par paquets et théorèmes de Fubini (famille produit) sont également vrais pour les familles sommables à termes complexes.

Théorème 10.8 *(Produit de Cauchy pour les séries)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux séries **absolument** convergentes : c'est-à-dire sommables.
On définit alors le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ par $\sum c_n$ où

$$\forall n \in \mathbf{N},\ c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i.$$

La série $\sum c_i$ est absolument convergente (sommable) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_i = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\right).$$

Preuve

Si les séries $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont absolument convergentes, alors les familles correspondantes sont sommables et d'après Fubini, la famille $(a_i b_j)_{(i,\,j)\in\mathbf{N}^2}$ est aussi sommable avec

$$\sum_{(i,\,j)\in\mathbf{N}^2} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right).$$

De plus pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $I_n = \left\{(i,\,j) \in \mathbf{N}^2,\ i+j=n\right\}$ et on remarque que $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ forme une partition dénombrable de $\mathbf{N}^2$, donc par le théorème de sommation par paquets, La série $\sum c_i$ est sommable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_i = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\right).$$

■

Exemple

La fonction exponentielle complexe est un morphisme de groupes de $(\mathbf{C},\,+)$ dans $(\mathbf{C}^*,\,\times)$.

Solution :
Soit $(x,\,y) \in \mathbf{C}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{(i,\,j)\in\mathbf{N}^2} \frac{x^i y^j}{i!j!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} \frac{x^i y^j}{i!j!} && \text{produit de Cauchy}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i y^{n-i}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} && \text{binôme de Newton}\\
&= \mathrm{e}^{x+y}.
\end{aligned}$$

On voit ensuite assez simplement d'après cette équation fonctionnelle, que s'il existait $x \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{e}^x = 0$, alors $\forall y \in \mathbf{C}$, $\mathrm{e}^{x+y} = 0$, ce qui indiquerait que la fonction est nulle sur $\mathbf{C}$. c'est faux car $\mathrm{e}^0 = 1$.

11 Annexe hors programme : dénombrabilité.

Définition 11.1 *(Ensemble dénombrable)*

Un ensemble E est **dénombrable** s'il peut être mis en bijection avec $\mathbf{N}$.
Un ensemble est ***au plus* dénombrable**, s'il est fini ou dénombrable.

Propriété 11.2 *(Ensembles dénombrables de référence)*

1. Un ensemble fini n'est pas dénombrable.
2. $\mathbf{N}$ et tous ses sous-ensembles infinis sont dénombrables.
3. $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.

Preuve

1. Soit E un ensemble fini. Si par l'absurde, il était dénombrable, alors, on pourrait construire une bijection $\varphi : E \to \mathbf{N}$. Donc $\varphi(E)$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$.
   E étant finie, $\varphi(E)$ aussi et elle contient un plus grand élément n.
   Donc $n+1 \notin \varphi(E)$. Donc φ n'est pas surjective. Absurde.
   Donc E n'est pas dénombrable.
2. Si E est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$ infini, alors, on peut construire une bijection de $\mathbf{N} \to E$, en posant $\varphi(0) = \min E$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n+1) = \min\{k \in E, k > \varphi(n)\}$.
   Cette construction consiste simplement à énumérer les éléments de E un à un dans l'ordre du plus petit au plus grand : à chaque fois, on rajoute le plus petit élément que

l'on n'a pas encore compté.
E étant infini, φ est bien définie.
φ est injective (strictement croissante).
Montrons par l'absurde qu'elle est surjective. *Cette preuve est très simple à condition de bien la visualiser.*
L'idée est donc de supposer par l'absurde qu'elle n'est pas surjective et de prendre le plus petit élément p qui n'appartient pas à son image :

- Soit c'est le premier élément de E : impossible car on l'a utilisé pour $\varphi(0)$.
- Sinon, l'élément qui le précède dans E peut s'écrire $k = \varphi(n)$ et par construction, p devrait être $\varphi(n+1)$ puisque c'est le suivant.

Donc φ est surjective. Ainsi c'est une bijection entre $\mathbf{N}$ et E : E est dénombrable.
Il en est de même pour tout sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable.

3. Pour $\mathbf{Z}$, on pose φ tel que $\varphi(n) = n/2$ si n est pair, et $\varphi(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair.
On montre (exercice facile) que φ est bijective de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$: $\mathbf{Z}$ est dénombrable.
La dénombrabilité de $\mathbf{Q}$ s'obtient avec le théorème suivant (produit cartésien) car $\mathbf{Q}$ est en bijection avec $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$.

■

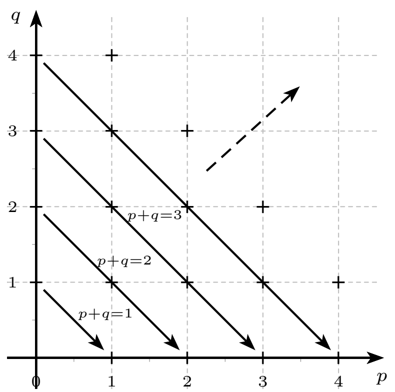
Propriété 11.3 *(Produit cartésien)*

Si E et F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.
Si E est un ensemble dénombrable, alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, E^n est dénombrable.

Remarque : c'est faux en général pour un produit cartésien *infini*.

Preuve

On le montre déjà dans le cas particulier où $E = F = \mathbf{N}$.
La généralisation sera très simple ensuite.
L'idée est de compter tous les couples (p, q) du carré infini $\mathbf{N}^2$. Cela suppose de définir un ordre dans lequel on les comptes tous, une et une fois.
Une bonne méthode est de les compter en diagonale depuis $(0, 0)$ et en s'écartant de plus en plus.



Chaque diagonale correspond à $p + q = n =$ cste (quand on augmente de 1 la valeur de p vers la droite, on diminue de 1 celle de q vers le bas).

Et la diagonale n contient exactement $n + 1$ points (aller de $p = 0$, $q = n$ à $p = n$ et $q = 0$). Ainsi, pour que la numérotation d'une diagonale à l'autre se suive sans trou ni chevauchement, on commence la diagonale n par la valeur $d_n = d_{n-1} + n$.
Comme la numération commence à 0, on pose $d_0 = 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $d_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$.
Ensuite, quand on avance sur la diagonale, on part de $p = 0$ à $p = n$: on ajoute la valeur de p pour indiquer le numéro du point sur la diagonale.

$$\frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$$

On définit donc l'application $\psi : \begin{cases} \mathbf{N}^2 & \to \mathbf{N} \\ (p, q) & \mapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p \end{cases}$ qui est bijective par construction. Ainsi $\mathbf{N}^2$ est dénombrable.
Passons au cas général de E et F dénombrables.
Il existe deux bijections $\varphi_1 : \mathbf{N} \to E$ et $\varphi_2 : \mathbf{N} \to F$.
Ainsi, l'application $\Phi : (p, q) \mapsto (\varphi_1(p), \varphi_2(q))$ est une bijection de $\mathbf{N}^2$ dans $E \times F$.
$\mathbf{N}^2$ étant dénombrable, $E \times F$ est dénombrable.
Pour E^n, on procède par récurrence. ■

Propriété 11.4

Si E contient un sous-ensemble infini non dénombrable, alors E n'est pas dénombrable.

Explications

Un ensemble n'est pas dénombrable, s'il est soit « trop petit » (c'est-à-dire fini) ou s'il est « trop gros » (on ne peut pas énumérer ses éléments un à un).
On comprend donc que si E contient un ensemble « trop gros », alors il est lui-même trop gros pour être dénombré.

Preuve

C'est la contraposée de : « si E est dénombrable, alors tout sous ensemble infini de E est dénombrable ».
On l'a démontré pour $E = \mathbf{N}$, mais par bijectivité entre E dénombrable et $\mathbf{N}$, la preuve précédente peut aussi s'appliquer à tout autre ensemble dénombrable. ■

Propriété 11.5

Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve

On note $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables, et $A = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$.
Dans un premier temps, on suppose que tous les A_i sont disjoints.
Dans ce cas, pour chaque $i \in \mathbf{N}$, on considère la bijection $\varphi_i : \mathbf{N} \to A_i$.
On peut donc construire une bijection : $\varphi : \begin{cases} \mathbf{N}^2 & \to A \\ (i, j) & \mapsto \varphi_i(j) \end{cases}$.
φ est évidemment surjective par surjectivité des φ_i et elle est injective car les applications φ_i le sont et les A_i disjoints.
Donc A est en bijection avec $\mathbf{N}^2$ qui est dénombrable (propriété 11.3), donc A est

dénombrable.
Si l'union n'est pas disjointe, alors on sait tout d'abord que A ne peut pas être fini car il contient un ensemble A_0 qui est dénombrable.
Ainsi A est *au moins* dénombrable.
On pose alors $B_0 = A_0$ et pour chaque $i \geqslant 1, B_i = A_i \setminus B_{i-1}$. On vérifie ainsi facilement par récurrence que $A = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} B_i$ et que les B_i sont deux à deux disjoints.
Quitte à rajouter des éléments dans chaque B_i qui serait fini, on peut définir une union disjointe : $\widetilde{A} = \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \widetilde{B_i}$ avec $\forall i \in \mathbf{N},\ B_i \subset \widetilde{B_i}$ et $\widetilde{B_i}$ dénombrable.
Donc $A \subset \widetilde{A}$ qui est lui-même dénombrable d'après la première étude.
Donc A est au plus dénombrable (propriete 11.4), donc A est dénombrable. ■

Propriété 11.6

Tout intervalle de $\mathbf{R}$ est non dénombrable.
En particulier, $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Explications

Sur $\mathbf{R}$, les nombres sont trop « serrés » les uns contre les autres pour que l'on puisse les dénombrer.
$\mathbf{Q}$ peut être dénombré, mais l'ajout des irrationnels rend l'ensemble trop « touffu » pour qu'il reste dénombrable.
Ce caractère « touffu » de $\mathbf{R}$ ne dépend pas de son étendue : même dans un petit intervalle, il y a trop de nombres pour pouvoir les isoler un à un en les dénombrant.

Preuve

On commence par montrer que $[0,1[$ n'est pas dénombrable, puis que tout intervalle contenant au moins de deux points peut être mis en bijection avec $[0,1[$.
Cette deuxième étape revient simplement à considérer $[0,1[$ *comme un élastique que l'on comprimerait ou étirerait pour obtenir n'importe quel autre intervalle de la même forme.*
Remarque : Si I ne contient pas au moins deux points distincts, alors il est fini, donc non dénombrable.

1. La non dénombrabilité de $[0,1[$ peut être prouvée avec l'argument de la diagonale de Cantor. Le voici :
   $[0,1[$ contient tous les nombres qui s'écrivent sous forme décimale $0,\mathrm{xxxx}\cdots$ où la suite des décimales n'est pas stationnaire à 9.
   Si par l'absurde $[0,1[$ était dénombrable, alors il existerait une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. et on pourrait écrire les nombres dans l'ordre donné par la bijection $\varphi(0)$, $\varphi(1)$...
   On construit alors le nombre x dont la n-ième décimale est égale à 1 la n-ième décimale de $\varphi(n)$ est différente de 1 et 2 sinon.
   Ainsi $x \in [0,1[$, montrons que $x \notin \varphi(\mathbf{N})$.
   Si par l'absurde $x \in \varphi(\mathbf{N})$, alors il existerait $k \in \mathbf{N}$ tel que $x = \varphi(k)$.
   En particulier, la k-ième décimale de x serait celle de $\varphi(k)$ ce qui est impossible par construction de x. Donc $x \notin \varphi(\mathbf{N})$.
   Donc φ n'est pas surjective, donc non bijective : c'est absurde. $[0,1[$ n'est pas dénombrable.
2. L'idée est de se ramener à un intervalle de la même forme que $[0,1[$ (semi-ouvert à droite) pour construire la bijection.
   Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant au moins 2 points $a < b$. Il contient donc $[a,b[$.
   On va montrer que $[a,b[$ n'est pas dénombrable en le mettant en bijection avec $[0,1[$.
   On construit
   $$f : \begin{cases} [0,1[& \mapsto [a,b[\\ x & \mapsto (b-a)x + a \end{cases}.$$
   Comme $b > a$, f réalise bien une bijection de $[0,1[$ dans $[a,b[$.
   Ainsi $[a,b[$ n'est pas dénombrable.
   (sinon, on composerait $\varphi : [a,b[\to \mathbf{N}$ avec f et on obtiendrait une bijection entre $[0,1[$ et $\mathbf{N}$, ce qui n'est pas possible car $[0,1[$ n'est pas bijectif).
   Donc I contient un sous-ensemble infini non dénombrable.
   Donc I n'est pas dénombrable.

■