Les nombres réels

« Il se peut qu'il n'y ait aucune utilité à savoir que π est irrationnel, mais si nous pouvons le savoir, il serait certainement intolérable de ne pas le savoir. »
E. C. Titchmarsh (1899-1963)

1 Construction de R

La construction des nombres réels n'est pas au programme. Nous en donnons cependant l'idée qui est riche d'enseignements. Cette construction illustre une méthode mathématique que l'on pourrait résumer ainsi :

« Ça ne marche pas ? Construisons donc un nouveau cadre dans lequel ça marche. »

- On commence par construire l'ensemble le plus *naturel* qui soit : $\mathbf{N}$.
  Il apparaît dès que l'on commence à compter. Cet ensemble est infini, et pour deux entiers quelconques, leur somme sera toujours un entier naturel.

- Vient ensuite le problème des dettes. Il faut introduire les entiers relatifs : $\mathbf{Z}$.
  Cela revient à *symétriser* l'ensemble des entiers par rapport à 0. Cette *« symétrisation »* de $\mathbf{N}$ permet de construire la soustraction, opération opposée à l'addition, sans sortir de ce nouvel ensemble de nombres.

- Puis, c'est l'héritage. À moins de tout transmettre à l'aîné, on partage la somme entre tous les enfants : c'est un quotient d'entier, $\mathbf{Q}$. De même que nous avons construit $\mathbf{Z}$ pour avoir une soustraction qui fonctionne, on a construit $\mathbf{Q}$ pour avoir une division qui ne fasse pas sortir de cet ensemble.
  En effet, on avait déjà une multiplication entre les entiers relatifs, mais en général, le quotient de deux entiers relatifs n'est plus un nombre relatif. Grossir l'ensemble des nombres pour y placer toutes les fractions résout ce problème (c'est le plus petit ensemble pour lequel ça marche).

- Le passage à la réalité $\mathbf{R}$ commence par un meurtre.
  Intuitivement, lorsque l'on a construit $\mathbf{Q}$, on a du mal à voir ce que l'on pourrait faire de plus. On arrive déjà à avoir des nombres aussi précis que l'on veut (infiniment proches les uns des autres). On peut les additionner, soustraire, multiplier, diviser... C'est une structure algébrique très riche : on parle de *corps des fractions*.
  Mais Pythagore passe par là et met tout par terre. Le pythagoricien Hippase de Métaponte trace un triangle rectangle dont les deux cathètes[1] valent 1 et il démontre que l'hypoténuse ne peut pas s'écrire comme fraction de deux entiers : ce n'est pas un nombre rationnel, $\sqrt{2}$ est incommensurable.
  D'après la légende, le scandale fut énorme car ce résultat entrait en contradiction avec la philosophie pythagoricienne. Hippase de Métaponte fut donc jeté à la mer par ses condisciples et se noya.

  Le XIX$^{\text{ème}}$ siècle fut marqué par la redéfinition des mathématiques sur des bases formelles. On s'intéressa alors à la définition de $\mathbf{R}$.
  On raisonna comme si $\mathbf{Q}$ représentait un espace poreux, dont il fallait combler les interstices. Il existe plusieurs méthodes pour cela. Les deux plus connues sont

  – les coupures de Dedekind. Cette méthode revient à couper $\mathbf{Q}$ en deux et à placer un nombre à l'emplacement de la coupure. De cette façon, on arrive à placer un nombre *irrationnel* entre deux nombres rationnels.

1. côtés adjacents à l'angle droit

  - les suites de Cauchy. Cela revient à faire converger des suites de nombres rationnels vers ces nombres manquants.

- Pour finir, on peut évoquer les nombres complexes : **C** qui viennent simplement de l'agacement des mathématiciens à ne pas avoir de solutions à l'équation $x^2 = -1$. Cela les contrariait pour résoudre les équations de degré 3 et il était désagréable de mettre à part le cas $\Delta < 0$ pour la résolution des équations du second degré. Initialement, comme ce nombre n'était qu'une vue de l'esprit pour permettre certains calculs, on qualifia donc i de nombre « *imaginaire* ». Mais dans peu de chapitres, il n'aura plus rien d'imaginaire pour vous !

2 Les intervalles

Définition 2.1 *(Intervalle)*

Un intervalle I est une partie de $\mathbf{R}$ qui vérifie :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \qquad a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I$$

En français :
« I est un intervalle, si pour tout couple de nombres (a,b) appartenant à I, I contient tout le segment $[a,b]$. »

Remarque :

- Dans la définition, a et b sont des points quelconques de l'intervalle : pas forcément ses bornes (en particulier si l'intervalle est ouvert).
- Par définition, les intervalles représentent exactement les parties **convexes** de $\mathbf{R}$.

Notation : Lorsque l'on parle d'intervalle d'entiers, on met habituellement une double barre aux crochets (« $[\![$ » et « $]\!]$ »).

Propriété 2.2

Les intervalles de $\mathbf{R}$ sont tous d'une des formes suivantes :

- $[a,b] = \{x \in \mathbf{R}, a \leq x \leq b\}$, on parle alors de **segment** ou d'intervalle **fermé**.
- $]a,b] = \{x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\}$, on dit que l'intervalle est **ouvert** à gauche (ou en a) et **fermé** à droite (ou en b).
  Nota : $a \notin]a,b]$.
- $[a,b[= \{x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\}$, on dit que l'intervalle est **fermé** à gauche (ou en a) et **ouvert** à droite (ou en b).
- $]a,b[= \{x \in \mathbf{R}, a < x < b\}$, on dit que l'intervalle est **ouvert**.
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R}, x \leq b\}$
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbf{R}, x < b\}$
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbf{R}, x \geq a\}$
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbf{R}, x > a\}$
- $]-\infty,+\infty[= \mathbf{R}$

a et b désignent des réels.

Remarque : $\pm\infty$ n'appartiennent jamais à l'intervalle car ce ne sont pas des nombres. Ils sont plutôt à considérer comme des notations pour dire que l'on peut « *aller aussi loin que l'on veut* ». On n'atteint pas l'infini (du moins, pas dans notre cadre).

Exemple

Écrire les relations suivantes sous forme d'appartenance à un intervalle :

$$x \geq 3,\ x < 17,\ x > -2,\ 2 < x \leq 8.$$

Solution :

Définition 2.3

Avec les notations de la propriété 2.2, a et b s'appellent les **bornes** de l'intervalle. Lorsque l'intervalle est infini, on parle de borne *infinie* à gauche ou à droite.

Remarque : Avec cette définition, on voit que les bornes

- ne sont pas toujours des nombres réels. Elles peuvent valoir $\pm\infty$,
- n'appartiennent pas toujours à l'intervalle (s'il est ouvert comme c'est le cas avec les bornes infinies).

3 Majorants-minorants

Définition 3.1

Soit E un ensemble de nombres **non vide**.

- On appelle **majorant** de E tout nombre M tel que $\forall x \in E,\ x \leq M$,
- On appelle **minorant** de E tout nombre m tel que $\forall x \in E,\ m \leq x$.

- Lorsque l'ensemble des majorants est non vide, s'il existe un plus petit majorant, on l'appelle **borne supérieure**.
  On note : $\sup E$.
- Lorsque l'ensemble des minorants est non vide, s'il existe un plus grand minorant, on l'appelle **borne inférieure**.
  On note : $\inf E$.

- Si la borne supérieure appartient à l'ensemble E, on parle de **maximum**.
  On note : $\max E$,
- Si la borne inférieure appartient à l'ensemble E, on parle de **minimum**.
  On note : $\min E$.

Explications
Un majorant est un nombre qui est plus grand que tous les nombres de E.
Un minorant est un nombre qui est plus petit que tous les nombres de E.

Définition 3.2

Une partie qui admet (au moins) un majorant est dite **majorée**.
De même, une partie qui admet (au moins) un minorant est dite **minorée**.
Une partie à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Remarque :

- L'existence d'un plus petit majorant ou d'un plus grand minorant est loin d'être une évidence. Cela fait appel à la propriété de la borne supérieure énoncée plus loin au théorème 3.4.
- Pour une partie $A \subset \mathbf{R}$ non majorée, on écrira parfois $\sup A = +\infty$.
  Si elle est non minorée, on écrira $\inf A = -\infty$.
  Mais c'est à considérer davantage comme une notation que comme une valeur.

⚠
- Dans la définition 3.1, l'ensemble de nombre E n'est pas supposé être un intervalle : il peut avoir n'importe quelle forme.

  Par exemple on peut prendre $E = \mathbf{Q}$, ou l'ensemble des valeurs prises par une suite (u_n),...
- Un ensemble de nombre peut ne pas avoir de majorant.

  Par exemple $[-3, +\infty[$ n'est pas majoré, de même, $\{n^2,\ n \in \mathbf{N}\}$ est un ensemble non majoré.
- Lorsqu'ils existent, le majorant et le minorants ne sont **pas uniques**, contrairement aux éventuelles bornes supérieures ou inférieures.

Propriété 3.3 *(Unicité des bornes supérieures et inférieures)*

Si la borne supérieure existe, alors elle est unique.
Si la borne inférieure existe, alors elle est unique.

Preuve
Rappelez-vous : pour démontrer l'unicité d'un objet, on suppose souvent qu'il y en a deux, et on montre qu'ils sont nécessairement égaux.
Supposons par l'absurde qu'il existe deux bornes supérieures distinctes M et M'. On peut supposer par exemple que $M < M'$.
Alors M est un majorant qui est strictement inférieur à M'. Donc M' n'est pas le plus petit majorant : c'est absurde par définition de la borne supérieure.
Donc $M = M'$, donc la borne supérieure est unique.

On fait la même preuve pour le minorant. ■

Théorème 3.4 *(Axiomes des bornes supérieures et inférieures)*

Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure.

Preuve
Admis. ■

⚠ Une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet toujours une borne supérieure, mais pas nécessairement de maximum. De même pour le minimum.

Remarque culturelle : La propriété de la borne supérieure n'est pas valable pour n'importe quel ensemble. Par exemple, elle n'est pas valable sur $\mathbf{Q}$. Ainsi , $\{x \in \mathbf{Q},\quad x^2 \leq 2\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbf{R}$, mais pas dans $\mathbf{Q}$. C'est le principe des coupures de Dedekind qui permet d'obtenir la propriété de la borne supérieure sur $\mathbf{R}$ que n'avait pas $\mathbf{Q}$.

Exemple

Soit $I = [2, 5[$.
Établir si I admet des majorants (lequels), une borne supérieure, un maximum.
De même pour les éventuels minorants, borne inférieure et minimum.
Solution :

Méthode *(Démontrer qu'un nombre est la borne inférieure – ou supérieure)*

Pour démontrer que $x = \inf E$, on raisonne souvent ainsi :

- On montre que x est un minorant de E,
  c'est-à-dire que pour $y \in E$ quelconque, on montre que $y \geq x$.
- On montre que c'est le plus grand.
  - Si on a $x \in E$, alors $x = \min E$ et a fortiori : $m = \inf E$.
  - Si $x \notin E$, alors on montre par l'absurde qu'il n'existe pas de minorant plus grand :
    On suppose qu'il en existe un plus grand : $m > x$ et on montre qu'il ne peut pas être un minorant en trouvant $y \in E$ tel que $y < m$.

Exemple

Un intervalle est non majoré, si et seulement s'il est de la forme $[a; +\infty[$ ou $]a; +\infty[$, avec $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$.

Exemple

Soit $E = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
Montrer que E admet une borne supérieure et une borne inférieure que l'on déterminera. E admet-elle un maximum ? un minimum ?
Solution :

Théorème 3.5

Toute partie non vide majorée de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément (maximum).
Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément (minimum).

En particulier, toute partie non vide de $\mathbf{N}$ est minorée (par 0).

Preuve

Se montre à partir des axiomes de Péano, en particulier le principe de récurrence. ∎

Exemple

Montrer que « tout entier positif est intéressant ».
Solution :

4 Valeur absolue

Définition 4.1 *(Valeur absolue)*

Soit $x \in \mathbf{R}$, on appelle **valeur absolue** de x le réel positif défini par

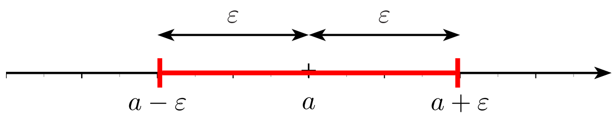
$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Explications

$|x|$ désigne la distance de x à 0, on utilisera en particulier cette fonction lors des limites où il est question de se rapprocher infiniment d'un point (distance).

Exemple *(fondamental)*

$|x - a| \leq \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$



Propriété 4.2

$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|. \qquad \forall x \in \mathbf{R}^*, \forall n \in \mathbf{Z}, \quad |x^n| = |x|^n.$

Preuve

Immédiat par disjonction des cas pour la première égalité. La deuxième se montre ensuite par récurrence sur n (en pensant à traiter les cas $n < 0$). ∎

Propriété 4.3 *(Inégalité triangulaire)*

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$,
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Preuve

$(|x|+|y|)^2 = |x|^2+|y|^2+2|xy| = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 = |x+y|^2$.
Donc par croissance de la racine carrée, on obtient l'inégalité triangulaire. ■

Corollaire 4.4

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \Big| |x|-|y| \Big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|.$

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \Big| |x|-|y| \Big| \leq |x-y| \leq |x|+|y|.$

Preuve

Pour la partie gauche :
$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y|+|y|$ d'après l'inégalité triangulaire.
Donc $|x|-|y| \leq |x+y|$ et par symétrie des rôles de x et de y on a aussi $|y|-|x| \leq |x+y|$.
Donc $\Big| |x|-|y| \Big| \leq |x+y|$. La seconde propriété est la même proposition avec $-y$. ■

5 Partie entière

Définition 5.1 *(Partie entière)*

Pour $x \in \mathbf{R}$, on appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier relatif tel que
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Explications

Cela correspond à une approximation par défaut par un entier relatif. Lorsque le nombre est positif, cela revient simplement à le tronquer à la virgule. Par contre,lorsqu'il est négatif, il faut alors prendre l'entier **inférieur**.

Preuve

Il faut prouver que cette définition a un sens : que cet entier existe et qu'il est unique.
L'existence sera prouvée juste après avec la propriété 5.2.
Pour l'unicité, on applique la même méthode que vue précédemment :
On suppose par l'absurde qu'il en existe 2 distinctes, n et n' avec par exemple $n < n'$.
Alors $n < n' \leq x < n+1 < n'+1$,
En particulier
$$n < n' < n+1 < n'+1$$
Or entre deux entiers consécutifs n et $n+1$, il ne peut y avoir aucun autre entier n'.
C'est donc absurde. Donc la partie entière (si elle existe) est unique. ■

Remarque : La partie entière est parfois notée en France $E(x)$.

Exemple

$\lfloor 2,3 \rfloor = 2$,
$\lfloor \pi \rfloor = 3$,
$\lfloor -\pi \rfloor = -4$,
$\lfloor 7 \rfloor = 7$.

⚠ En général $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$.

Exemple

Calculer $\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor$ en fonction de x.
Solution :

Exemple *(Partie entière avec Python)*

```python
def partieEntiere(x):
    if x < 0:
        return int(x)-1
    return int(x)
```

Propriété 5.2

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z}, n \leq x\}$$

Explications

La partie entière de x est le plus grand des minorants entiers de $\{x\}$.

Preuve

Sans trop détailler, ni rentrer dans les difficultés théoriques :
$E = \{n \in \mathbf{Z}, n \leq x\}$ est une partie non vide majorée (par x).
Or, toute partie non vide majorée de $\mathbf{Z}$ admet un plus grand élément : $n_0 = \max\{n \in \mathbf{Z}, n \leq x\}$.
Par définition de E, on a $n_0 \leq x$.
Et $n_0 + 1 > x$ sinon n_0+1 serait aussi un minorant entier de $\{x\}$, ce qui est absurde.
On a donc bien $n_0 \leq x < n_0 + 1$.
et par unicité (montré à la propriété précédente) : $n_0 = \lfloor x \rfloor$.
(Ce qui montre bien l'existence de la partie entière qui n'avait pas été démontrée au moment de la définition 5.1.) ■

Propriété 5.3

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

Preuve

Soient x et y deux réels, tels que $x \leq y$. Par définition, $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y$.
Donc $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à y et par caractérisation de la partie entière, il est donc inférieur ou égal au max $\{n \in \mathbf{Z}, n \leq y\} = \lfloor y \rfloor$.
Ainsi $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
On a donc montré que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \qquad x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$

La fonction partie entière est croissante. ■

⚠ La fonction partie entière n'est **pas** *strictement croissante.*

Exemple

Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, \ \forall n \in \mathbf{Z}, \ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$

Solution :

6 Rappels sur les puissances et les racines

On ne fait que de courts rappels et on se garde bien de tout justifier proprement : il s'agit uniquement de se rafraichir la mémoire.

Définition 6.1 *(Puissance)*

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la puissance n-ième de x par

$$x^n = \prod_{k=1}^{n} x$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, pour tout $n \in \mathbf{Z}_-$, on définit la puissance n-ième de x par

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

On remarque que pour $n = 0$, le produit est vide donc $x^0 = 1$ (même si $x = 0$).

Propriété 6.2 *(Règles de calcul)*

Soient $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ et $(m,n) \in \mathbf{N}^2$,

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad x^{m+n} = x^m x^n \qquad x^{mn} = (x^m)^n$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{(binôme de Newton)}$$

Définition 6.3 *(Racines n-ièmes, puissances rationnelles et réelles)*

- Soit $x \in \mathbf{R}_+$, $\sqrt{x}$ est le seul réel **positif** tel que $(\sqrt{x})^2 = x$
- Soient $x \in \mathbf{R}_+$ et $n \in \mathbf{N}$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ est le seul réel **positif** tel que $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$.
- Soient $x \in \mathbf{R}_+$ et $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.
- Soient $x \in \mathbf{R}_+^*$, et $\alpha \in \mathbf{R}$, $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$

Preuve

L'existence et l'unicité des racines sont obtenus grâce au théorème de la bijection continue, aussi appelé corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Ce qui demanderait bien sûr de vérifier auparavant que les fonctions puissances sont bien continues et strictement croissantes sur $\mathbf{R}$, mais ce n'est pas l'objet de ce chapitre.
Il faudrait également justifier que la définition avec l'exponentielle coïncide avec les définitions précédentes pour $\alpha \in \mathbf{Q}$. ■

Propriété 6.4

Les règles de calcul vues pour les puissances entières s'appliquent aux puissances rationnelles et réelles.

⚠
- La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbf{R}$.
- On ne parle de puissance rationnelle que pour des nombres **positifs**.
- On ne parle de puissance réelle (non rationnelle) que pour des nombres **strictement positifs** (à cause du logarithme).

Remarque : Pour les entiers n **impairs**, on verra que l'on peut définir la racine n-ième d'un nombre négatif.

Propriété 6.5 *(Règles de calcul)*

Soit $(x,y) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\quad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
Soit $x \in \mathbf{R}$, $\quad \sqrt{x^2} = |x|$.

⚠ Dans la deuxième formule, il ne faut pas oublier la **valeur absolue**.

7 Rappels sur les inégalités

Propriété 7.1 *(Opérations sur les inégalités)*

$$\forall a \in \mathbf{R}, \qquad x < y \iff a + x < a + y$$

La multiplication par un nombre strictement positif conserve les inégalités larges et strictes :

$$\forall a > 0, \qquad x < y \iff ax < ay$$

La multiplication par un nombre strictement négatif change le sens des inégalités larges et strictes

$$\forall a < 0, \qquad x < y \iff ax > ay$$

Le passage à l'inverse de nombres de même signe, change le sens des inégalités

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^*, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_-^*, \qquad x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

- On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens

$$\big(x < y \quad \text{et} \quad x' \le y'\big) \Rightarrow x + x' < y + y'$$

  Remarquez que l'inégalité stricte « gagne » pour la somme.

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **si tous les termes sont positifs**

$$\big(0 \le x < y \quad \text{et} \quad 0 < x' \le y'\big) \Rightarrow xx' < yy'$$

  Remarquez que l'inégalité stricte « gagne » pour le produit, à condition de ne pas multiplier par 0.

Remarque : Lorsqu'une propriété est vraie pour des inégalités strictes, elle est aussi vraie pour des inégalités larges. La réciproque est fausse.

Définition 7.2 *(Fonction croissante - décroissante)*

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $f : I \to \mathbf{R}$ une application réelle.
On dit que f est **croissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui conserve les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement croissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

En français : « Une fonction *strictement* croissante est une fonction qui conserve les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

On dit que f est **décroissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$$

En français : « Une fonction croissante est une fonction qui inverse les inégalités larges par passage à l'image. »

On dit que f est **strictement décroissante** sur I, si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

En français : « Une fonction *strictement* décroissante est une fonction qui inverse les inégalités *strictes* par passage à l'image. »

⚠ La croissance ou la décroissance d'une fonction n'est pas d'abord affaire de dérivée. On peut parler de fonction croissante ou décroissante même si celle-ci n'est pas dérivable[2] ! Penser par exemple à la fonction partie entière.

2. Il est vrai que la dérivée est un outil très pratique pour connaître les variations d'une fonction et qu'il faut en profiter. Mais ce n'est qu'un outil parmi d'autres.