Équations différentielles

Les équations différentielles sont très présentes dans tous les domaines scientifiques dès qu'il s'agit de *dynamique*. Ainsi, ces équations interviennent dans les mouvements en mécanique newtonienne, dans la cinétique chimique, les évolutions bactériologiques... Il n'est pas toujours possible de trouver une solution exacte aux équations différentielles et les études qualitatives ainsi que les méthodes numériques jouent un rôle important.
Dans ce chapitre, nous nous contenterons d'étudier les équations les plus simples : les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Nous verrons en informatique des méthodes pour résoudre des équations différentielles de façon approchée.

1 Premier ordre

A Résolution des équations du premier ordre

Définition 1.1

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on note (E_b) l'**équation différentielle**

$$(E_b) \qquad y' + ay = b$$

Lorsque $b = 0$, on parle d'équation différentielle **homogène**.
L'équation différentielle homogène associée à (E_b) est

$$(E_0) \qquad y' + ay = 0$$

f est solution de (E_b) sur l'intervalle I si f définie et dérivable sur I, et si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) + af(x) = b$$

On note S_b l'ensemble des solutions de (E_b) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

Remarque : Toutes les équations de ce cours auront des solutions sur $I = \mathbf{R}$.
Lorsque les coefficients ne sont pas constants, on peut être amené à travailler sur des intervalles plus petits.

Théorème 1.2 *(Solutions de l'équation homogène)*

$$S_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbf{R}\right\}$$

⚠ Les équations $y' + ay = 0$ et $y' = ay$ sont **différentes** ! Dans le deuxième cas, il faut enlever le moins dans l'exponentielle.
Pour être sûr de ne pas se tromper, vérifier à chaque fois en replaçant la solution dans l'équation. C'est très rapide et évite d'avoir tout le reste faux.

Preuve

Par double inclusion :

- Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose $f : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$, ainsi $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -a\lambda\,\mathrm{e}^{-ax} = -af(x)$, donc $f \in S_0$. Donc $\left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbf{R}\right\} \subset S_0$
- (*méthode de la variation de la constante*)
  Soit $f \in S_0$, montrons que f est sous la forme $x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$.
  Or l'exponentielle ne s'annule pas, donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, on peut poser $\lambda(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-ax}}$.
  c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$.
  $x \mapsto \lambda(x)$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annule pas). Donc $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} - a\lambda(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = \lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} - af(x)$.
  Or $f \in S_0$, donc $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) + af(x) = 0$, c'est-à-dire que $\lambda'(x)\,\mathrm{e}^{-ax} = 0$.
  Comme l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, alors $\forall x \in \mathbf{R},\ \lambda'(x) = 0$,
  et $\mathbf{R}$ est un intervalle, donc λ est constante.
  Donc $\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}$, donc $S_0 \subset \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbf{R}\right\}$.

Ainsi par double inclusion $S_0 = \left\{x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbf{R}\right\}$. ■

Exemple

$y' + 2y = 0\,.$

Solution :

Théorème 1.3 *(Existence d'une solution particulière)*

(E_b) admet toujours (au moins) une solution sur $\mathbf{R}$.

- Si $a \neq 0$, $\quad g_b\ :\ x \mapsto \dfrac{b}{a}\quad$ est solution particulière.
- Si $a = 0$, $\quad g_b\ :\ x \mapsto bx\quad$ est solution particulière.

Preuve

Il suffit de vérifier. ∎

Théorème 1.4 *(Structure des solutions)*

Soit $g_b \in S_b$ une solution particulière de E_b.

$$f \in S_b \iff f - g_b \in S_0$$

On peut écrire (comme pour les suites récurrentes) :

$$S_b = S_0 \text{ `}+\text{' } g_b$$

Preuve

Par linéarité :
$$\begin{aligned} f \in S_b &\iff f' = af + b \\ &\iff f' - g_b' = af + b - g_b' \\ &\iff (f-g_b)' = af + b - (ag_b + b) \quad (g_b \text{ solution particulière}) \\ &\iff (f-g_b)' = a(f - g_b) \\ &\iff f - g_b \in S_0 \end{aligned}$$
∎

On peut *généraliser le théorème précédent :*

Théorème 1.5 *(Théorème de superposition)*

Si f_1 est solution particulière de $y' = ay + b_1\,.$
Si f_2 est solution particulière de $y' = ay + b_2\,.$
alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \lambda f_1 + \mu f_2$ est solution de $y' = ay + \lambda b_1 + \mu b_2$

En particulier : si $f_1, f_2 \in S_0$ sont solutions de l'équation homogène et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors
$$f_1 + \lambda f_2 \in S_0$$

Preuve

Si $f_1 \in \mathcal{S}_{b_1}$ et $f_2 \in S_{b_2}$, alors $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$,
$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + \mu f_2)' &= \lambda f_1' + \mu f_2' \\ &= \lambda\,(f_1 + b_1) + \mu\,(af_2 + b_2) \\ &= a\,(\lambda f_1 + \mu f_2) + \lambda b_1 + \mu b_2\end{aligned}$$
Donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in S_{\lambda b_1 + \mu b_2}$ ∎

Définition 1.6 *(Problème de Cauchy)*

Soit une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(E_b) \qquad y' + ay = b$$

Pour $(x_0, y_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,
On appelle **problème de Cauchy**, la recherche d'une application $\varphi \in S_b$ vérifiant la **condition initiale** $\varphi(x_0) = y_0$.

Théorème 1.7 *(Unicité de la solution)*

Un problème de Cauchy admet une unique solution.

Preuve

Soit g_b une solution particulière (dont on a prouvé l'existence au théorème 1.3).
Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax} + g_b(x)$
φ est solution du problème de Cauchy
si et seulement si, $\varphi \in S_b$ et $\varphi(x_0) = y_0$
si et seulement si, $\exists\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax} + g_b(x)$ et $\varphi(x_0) = y_0$
si et seulement si, $\exists\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax} + g_b(x)$ et $\lambda\,\mathrm{e}^{-ax_0} + g_b(x_0) = y_0$
si et seulement si, $\varphi : x \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-ax} + g_b(x)$ avec $\lambda = (y_0 - g_b(x_0))\,\mathrm{e}^{ax_0} \in \mathbf{R}$

On a donc prouvé l'existence et l'unicité. ∎

Explications *(Interprétation poétique)*

Vous pouvez imaginer un miroir d'eau infini (imaginez, mais en gardant les yeux ouverts, sinon, vous ne pourrez pas lire la suite de l'explication).
Une brise légère souffle à la surface du miroir et la meut en une onde délicate.
Et sous les yeux de votre imagination, apparaît enfin la poésie de cette vision enchanteresse :
En chaque position du miroir, le fil du courant n'est autre que la dérivée : la variation de la position. Ainsi, vous pouvez surprendre Cauchy en train de déposer une goutte d'encre en un point du miroir et la suivre le long du courant. Il n'y a qu'une seule solution possible, qu'un seul chemin pour la goutte : celle qui s'offre à vos yeux. Si le vent n'a pas changé et que vous déposez une autre goutte au même endroit, elle suivra exactement le même chemin.
Et si je place des taches de couleurs variées en différents points du miroir, aucune des lignes imprimées à la surface du miroir n'en croisera une autre, sauf à se trouver exactement sur le même chemin, auquel cas elles se confondent.
Ces lignes formées par les gouttes d'encre s'appellent les **courbes intégrales**.

D'un point de vue plus formel :
Pour $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, les courbes des solutions de l'équation différentielle (E_b) sont les courbes intégrales de (E_b).
Elles forment une **partition** du plan :

- Par tout point, il passe une courbe intégrale,
- Deux courbes intégrales ne se croisent jamais.

Dans le cas des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, ces courbes seront simplement les courbes exponentielles auxquelles on rajoute g_b.

B Complément : la linéarité

Pour ceux qui veulent comprendre un peu plus en profondeur
Vous avez dû observer que la résolution des équations différentielles linéaires ressemble à celle des suites récurrentes. Le parallèle sera flagrant à l'ordre 2. Ceci vient du concept commun de **linéarité**.
La linéarité est centrale dans le programme de classes préparatoires. Elle permet de faire un lien entre de nombreuses notions que l'on pourrait croire très distinctes : suites récurrentes, équations différentielles, matrices...
Tout votre collège était déjà orienté par cette idée sous-jacente que l'on nommait la *proportionnalité*. C'est pareil : la linéarité est la traduction mathématique d'un lien de proportionnalité.

Définition 1.8

Soit T un opérateur sur un ensemble A , alors on dit que T est $\mathbf{R}$-linéaire, si et seulement si

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2, \qquad T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

Remarque : Opérateur est un synonyme de application. On privilégie parfois ce terme lorsque l'on travaille sur des ensembles de fonctions ou d'autres ensembles « très gros ».

Exemple

- La somme est linéaire : $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$.
- La dérivation est linéaire : $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- L'intégration est linéaire : $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.
- La limite des suites convergentes : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- ...

En reprenant les notations précédentes, On peut écrire l'équation différentielle (E_0) sous la forme $T(y) = 0$ en définissant T par $T : y \mapsto y' + ay$
On vérifie immédiatement que T est linéaire sur l'ensemble des fonctions dérivables.
Le théorème de superposition est alors la simple réécriture de la linéarité de T.

2 Second ordre

A Équation homogène

Définition 2.1

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, avec $a \neq 0$

$$(E_d) \qquad ay'' + by' + cy = d$$

(E_d) est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

$$(E_0) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

(E_0) est l'**équation homogène** associée à (E_d).

S_d désigne les solutions de (E_d) et S_0 désigne les solutions de (E_0).

On appelle **équation caractéristique** de (E_0), l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Théorème 2.2 *(Solutions de l'équation homogène)*

$$S_0 = \left\{ \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 ; (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Avec les notations précédentes, si Δ est le discriminant de l'équation caractéristique, alors

- Si $\Delta > 0$ et $r_1,\ r_2$ sont les deux racines de l'équation caractéristique
$$\varphi_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$$
$$\varphi_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2 x}$$
- Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique
$$\varphi_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$$
$$\varphi_2 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$$
- Si $\Delta < 0,\ r_\pm = \alpha \pm i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique
$$\varphi_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$\varphi_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Remarque : on dit que (φ_1, φ_2) forme une *base* de S_0.
On peut écrire $S_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

Preuve

Schéma de la preuve :

1. Chercher des solutions sous la forme $x \mapsto e^{\gamma x}$
2. Méthode de la variation de la constante en distinguant les cas selon $\Delta \geq 0$.
3. Cas particulier pour $\Delta < 0$, on résout dans $\mathbf{C}$ comme dans le point précédent, puis on cherche les solutions réelles parmi les solutions complexes.

La preuve complète est rédigée en fin de chapitre à la section E. ■

Pour $\Delta < 0$, on peut représenter les solutions avec la phase, c'est souvent utile en physique avec les phénomènes oscillatoires. ϕ représente le décalage de phase, et ω la pulsation.

Propriété 2.3 *(Rappel)*

$$\forall (A,B) \in \mathbf{R}^2,\ \exists (C,\phi) \in \mathbf{R}^2,\ \text{ tel que } \forall x \in \mathbf{R},\quad A\cos\omega x + B\sin\omega x = C\cos(\omega x - \phi)$$

Preuve

Voir le chapitre de trigonométrie. ■

B Équations avec second membre

Théorème 2.4 *(Structure des solutions de l'équation avec second membre)*

Avec les notations précédentes

1. Il existe toujours une solution particulière φ_0 à l'équation différentielle (E_d),
2. Si g_d est une telle solution et si $\varphi_1,\ \varphi_2$ sont des solutions de l'équation homogène telles que définies dans le précédent théorème,
   Alors
   $$S_d = \left\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + g_d;\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$$
   On peut aussi écrire (en comprenant le sens du signe +)
   $$S_d = S_0 \text{ ‘}+\text{’ } g_d$$

Preuve

La première partie de la preuve est admise.
La deuxième partie de la preuve utilise simplement la linéarité. Sans difficultés. ■

Théorème 2.5 *(Solution particulière)*

$(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, avec $a \neq 0$

$$(E_d) \qquad ay'' + by' + cy = d$$

Alors, il existe une solution particulière de l'équation différentielle (E_d) sous la forme

- Si $c \neq 0$, alors la fonction constante $x \mapsto \frac{d}{c}$ est solution particulière.
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors la fonction linéaire $x \mapsto \frac{d}{b}x$ est solution particulière.
- Si $b = c = 0$, alors $x \mapsto \frac{d}{2a}x^2$ est solution particulière.

Théorème 2.6 *(Théorème de superposition)*

$$\begin{gathered}\text{si } f_1 \text{ est solution particulière de } ay'' + by' + cy = d_1 \\ \text{si } f_2 \text{ est solution particulière de } ay'' + by' + cy = d_2 \\ \text{alors } \forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \lambda f_1 + \mu f_2 \text{ est solution de } ay'' + by' + cy = \lambda d_1 + \mu d_2\end{gathered}$$

Définition 2.7 *(Problème de Cauchy)*

$(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$, avec $a \neq 0$

$$(E_d) \qquad ay'' + by' + cy = d$$

Pour $(x_0, y_0, v_0) \in \mathbf{R}^3$, on appelle **problème de Cauchy**, la recherche d'une application $\varphi \in S_d$ vérifiant les **conditions initiales**

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } \varphi'(x_0) = v_0$$

Théorème 2.8 *(Unicité de la solution)*

Un problème de Cauchy admet une unique solution

⚠ Comme l'équation est du second ordre, il faut une DOUBLE condition aux limites : à la fois sur φ et sur φ'. Pour un objet en mouvement, cela correspond à fixer à la fois sa position et sa vitesse à l'instant t_0. S'il manque une de ces deux informations, on n'a pas l'unicité de la solution en général.

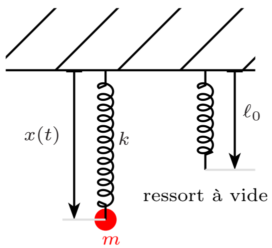
Explications *(Interprétation avec les courbes intégrales)*

Si on représente les courbes intégrales des solutions, alors l'unicité des solutions du problème de Cauchy se traduit géométriquement par le fait qu'en un point donné et pour une pente fixée, il existe une unique courbe qui passe par ce point avec cette pente. Les courbes intégrales peuvent donc se croiser, mais elle ne peuvent pas être tangentes l'une à l'autre sinon elles auraient même condition de Cauchy (même point et même dérivée).

C Exemple complet : l'oscillateur harmonique

Modélisation :

Soit une masse ponctuelle m qui oscille librement au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.
On suppose que le ressort est vertical, et que la masse pendue au ressort se déplace uniquement suivant un axe vertical.
On note $x(t)$ l'élongation du ressort à l'instant t.
$x(t)$ est donc la distance entre le point d'ancrage du ressort et la masse m.
Les forces qui s'exercent sur la masse m sont donc :



- la gravité g,
- la force de rappel du ressort $-k(x-\ell_0)$,

Dans un premier temps, les amortissements sont négligés.
Le mouvement étant vertical, on se contente d'étudier la variable d'élongation x.
L'accélération s'exprime alors comme la dérivée seconde de la position : $x''(t)$.
La seconde loi de Newton donne donc l'équation

$$mx'' = mg - k(x-\ell_0)$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, alors l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$x'' + \omega_0^2 x = g + \omega_0^2 \ell_0$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre avec second membre.

Changement de variable : On remarque que $x_0 : t \mapsto= \frac{g}{\omega_0^2} + \ell_0$ est une solution particulière constante. Mécaniquement, cette solution x_0 est la position d'équilibre du mobile : la gravité équilibre exactement la force de rappel du ressort : l'élongation est constante car le mobile ne bouge pas.
Si on pose $z : t \mapsto x(t) - x_0$, alors, on se ramène à une équation différentielle homogène. En mécanique, ce changement de variable est naturel, il correspond à choisir comme origine du repère le point l'équilibre x_0.
La nouvelle équation du mouvement est donc

$$z'' + \omega_0^2 z = 0$$

Résolution : L'équation caractéristique est $x^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont $x_1 = i\omega_0$ et $x_2 = -i\omega_0$.

$$\exists A \in \mathbf{R},\ \phi \in]-\pi,\pi[, \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \quad z(t) = A\cos(\omega_0 t - \phi)$$

ω_0 représente ainsi la pulsation d'oscillation (période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$).
L'amplitude A et la phase ϕ dépendent des conditions initiales.

Analyse énergétique : Si on multiplie l'équation initiale par $z'(t)$, on trouve

$$mz'(t)z''(t) + kz'(t)z(t) = 0$$

On reconnaît la dérivée de $\frac{1}{2}m\left(z'\right)^2 + \frac{1}{2}kz^2$ qui est donc constante (dérivée nulle).
$z' = v$ désigne la vitesse instantanée du mobile à l'instant t, on peut alors poser

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{et} \qquad E_p = \frac{1}{2}kz^2$$

La somme de E_c (énergie cinétique) et de E_p (énergie potentielle) est donc constante.
Cette somme s'appelle l'énergie mécanique et elle peut être facilement évaluée lorsque z est extrémal ($v=0$). A étant l'amplitude on trouve donc

$$E_c + E_p = E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$$

Ajout d'un amortissement : on peut rajouter un amortissement proportionnel à la vitesse. L'équation différentielle s'écrit alors

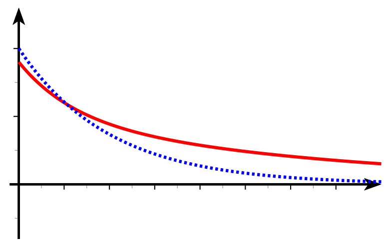
$$z'' + 2\sigma\omega_0 z' + \omega_0^2 z = 0$$

$2\sigma\omega_0 \geq 0$ représente l'amortissement (homogène à une pulsation). σ s'appelle le coefficient d'amortissement.
L'équation caractéristique est $x^2 + 2\sigma\omega_0 x + \omega_0^2 = 0$.
Son discriminant est $\Delta = 4(\sigma^2\omega_0^2 - \omega_0^2) = \left(2\omega_0\right)^2\left(\sigma^2 - 1\right)$

- Si $\sigma > 1$,
  alors $\Delta > 0$ et le régime n'est pas oscillant (l'amortissement est trop fort).
  Les solutions de l'équation caractéristique sont $x_\pm = -\omega_0\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2-1}\right)$.

  $$z(t) = \left(A\,\mathrm{e}^{\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega_0\sqrt{\sigma^2-1}\,t}\right)\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 t}$$

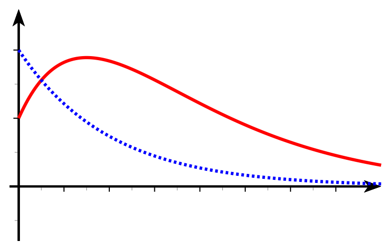
  La solution tend vers 0 de façon exponentielle.



Régime apériodique

- Si $\sigma = 1$,
  alors $\Delta = 0$ et le régime est n'est plus périodique.
  C'est un cas critique.
  La double solution de l'équation caractéristique est $x = -\omega_0$.

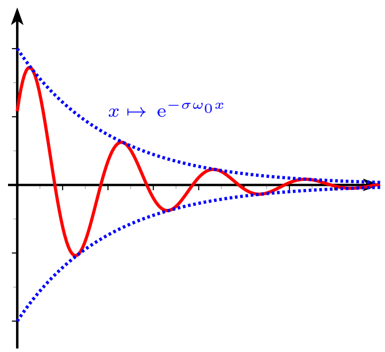
  $$z(t) = (A+Bt)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$



Régime critique

- Si $\sigma < 1$,
  alors $\Delta < 0$ et le régime est périodique amorti.
  Ainsi les solutions de l'équation caractéristique sont $x_\pm = -\omega_0\left(\sigma \pm i\sqrt{1-\sigma^2}\right)$.
  On pose $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$ la pseudo-pulsation.

$$z(t) = A\,\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 t}\cos\left(\Omega\, t - \phi\right)$$



Régime amorti

L'amortissement se traduit par « l'enveloppe » exponentielle décroissante et par une altération de la période d'oscillation.

On retrouve l'équation non amortie pour $\sigma = 0$.

Si on note $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ la pseudo-période, alors $z(t+T) = z(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma\omega_0 T}$.

Cela invite à introduire le décrément logarithmique $\delta = -\ln\frac{x(t+T)}{x(t)} = \sigma\omega_0 T$.

Le décrément logarithmique peut être obtenu expérimentalement en observant la variation d'amplitude sur une période (n'importe laquelle).

Voir le cours de physique pour des interprétations dignes de ce nom.

Régime sinusoïdal forcé : On peut imaginer que l'extrémité haute du ressort est fixé à un petit moteur qui exerce sur elle une force ou un mouvement oscillatoire sinusoïdal de période ω.
On peut alors écrire l'équation sous la forme $z'' + 2\sigma\omega_0 z' + \omega_0^2 z = K\sin(\omega t + \phi)$.
On distingue alors deux régimes

- Le régime libre (ou transitoire) : il correspond à la solution de l'équation homogène,
- Le régime sinusoïdal forcé : il correspond à la solution particulière.

Comme la solution de l'équation homogène tend exponentiellement vers 0 ($\sigma > 0$), alors pour un temps suffisamment grand (après quelques périodes), la solution sera « très proche » de la solution particulière [1]. C'est la raison pour laquelle, en physique, on se contente souvent de ne calculer que la solution particulière correspondant au régime sinusoïdal forcé.
La recherche de cette solution particulière se fait aisément avec les nombres complexes.

1. Nous pourrons donner plus tard dans l'année, une définition plus rigoureuse de « très proche » avec l'analyse asymptotique.

D Les équations fonctionnelles

Un exercice très classique consiste à résoudre une équation fonctionnelle en se ramenant à une équation différentielle.
Pour cela, la méthode habituelle est de dériver l'équation fonctionnelle une ou plusieurs fois. La preuve se fait alors par **analyse-synthèse**.

Remarques sur les hypothèses :

- Il faut souvent commencer l'exercice en justifiant que la fonction peut être dérivée le bon nombre de fois voulu. Ces hypothèses de dérivabilité s'obtiennent généralement à partir de la relation fonctionnelle elle-même.
- Même, lorsque la fonction n'est pas supposée dérivable (ou pas suffisamment), cette méthode peut-être un bon point de départ pour trouver un certain nombre de solutions et affiner son intuition en vue du cas général.

Exemple

Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Solution :

E Preuve des solutions de l'équation homogène pour l'ordre 2

1. Chercher des solutions sous la forme $x \mapsto e^{\gamma x}$
   On pose donc $\varphi : x \mapsto e^{\gamma x}$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{\gamma x} \\ \varphi'(x) &= \gamma e^{\gamma x} \\ \varphi''(x) &= \gamma^2 e^{\gamma x} \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0 &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ a\gamma^2 e^{\gamma x} + b\gamma e^{\gamma x} + c e^{\gamma x} = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ (a\gamma^2 + b\gamma + c) e^{\gamma x} = 0 \\ &\iff a\gamma^2 + b\gamma + c = 0 \qquad \text{(car l'exponentielle ne s'annule jamais)} \\ &\iff \gamma \text{ est solution de l'équation caractéristique.} \end{aligned}$$

2. Méthode de la variation de la constante en distinguant les cas selon Δ.
   Soit $f \in S_0$.
   On pose r une solution de l'équation caractéristique (quelle que soit la valeur de $\Delta \geq 0$).
   Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $\lambda(x) \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda(x) e^{rx}$ (car l'exponentielle ne s'annule jamais).
   λ ainsi définie est une fonction deux fois dérivable (comme quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda(x) e^{rx} \\ f'(x) &= \lambda'(x) e^{rx} + r\lambda(x) e^{rx} \\ f''(x) &= \lambda''(x) e^{rx} + 2r\lambda'(x) e^{rx} + r^2\lambda(x) e^{rx} \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} f \in S_0 &\iff af'' + bf' + cf = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ \big(a\lambda''(x) + 2ar\lambda'(x) + ar^2\lambda(x) + b\lambda'(x) + br\lambda(x) + c\lambda(x)\big)\ e^{rx} = 0 \\ &\iff a\lambda'' + (2ar+b)\lambda' + (ar^2 + br + c)\lambda = 0 \quad \text{(car l'exponentielle ne s'annule jamais)} \\ &\iff a\lambda'' + (2ar+b)\lambda' + (\underbrace{ar^2 + br + c}_{=0})\lambda = 0 \\ &\iff a\lambda'' + (2ar+b)\lambda' = 0 \\ &\iff \lambda' \text{ est solution de l'équation différentielle } ay' + (2ar+b)y = 0 \\ &\iff \exists \mu \in \mathbf{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbf{R},\ \lambda'(x) = \mu e^{-\frac{2ar+b}{a}x} \qquad (\text{car } a \neq 0) \end{aligned}$$

   - Si $\Delta = 0$, alors $r = -\frac{b}{2a}$, donc $2ar + b = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\lambda'(x) = \mu$, donc λ est de la forme $x \mapsto \mu_1 x + \mu_2$ avec $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$.
     f s'écrit alors $f(x) = \lambda(x) e^{rx} = \mu_1 x e^{rx} + \mu_2 e^{rx}$, ce qui est bien la forme du théorème.
   - Si $\Delta > 0$, alors $2ar + b \neq 0$ et λ s'écrit sous la forme $\mu_1 e^{-\frac{2ar+b}{a}x} + \mu_2$. (on a renommé $\mu_1 = \frac{a\mu}{2ar+b}$)
     ainsi, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \lambda(x) e^{rx} = \mu_1 e^{-(r+\frac{b}{a})x} + \mu_2 e^{rx}$.
     Or si r est une des solutions de l'équation différentielle, alors $-(r + \frac{b}{a})$ est l'autre.
     Les solutions sont donc bien sous la forme énoncée dans le théorème.

3. Le point précédent pour $\Delta > 0$ reste valable si on se place dans $\mathbf{C}$ au lieu de $\mathbf{R}$. Il faut ensuite sélectionner les solutions réelles parmi toutes celles trouvées.
   Les solutions (complexes) sont donc de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ pour $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}$ où r_1 et r_2 désignent les solutions complexes de l'équation caractéristique.
   Comme l'équation caractéristique est à coefficients réels, les deux racines sont conjuguées.
   On note donc $r = r_1$ et $\bar{r} = r_2$.
   Si f est solution réelle de l'équation, elle est a fortiori solution complexe. Donc toute solution de mon équation s'écrit nécessairement sous la forme

$$f\ :\ x \mapsto \lambda e^{rx} + \mu e^{\bar{r}x} \quad \text{avec}(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$$

   Voyons à présent à quelle condition sur λ et μ la solution f convient (c'est-à-dire est réelle).

$$\begin{aligned} f \in S &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{f(x)} = f(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{\lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{\overline{r}x}} = \lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{\overline{r}x} \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \overline{\lambda}\, e^{\overline{r}x} + \overline{\mu}\, e^{rx} = \lambda\, e^{rx} + \mu\, e^{\overline{r}x} \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \left(\overline{\lambda} - \mu\right)\, e^{\overline{r}x} = (\lambda - \overline{\mu})\, e^{rx} \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R} \quad \left(\overline{\lambda} - \mu\right)\, e^{(\overline{r}-r)x} = \lambda - \overline{\mu} \end{aligned}$$

Le membre de droite est constant, donc celui de gauche doit l'être aussi.
Or $\overline{r} - r \neq 0$ (sinon $\mathfrak{Im}\,(r) = 0$ ce qui est absurde car $\Delta < 0$).
On peut donc écrire

$$f \in S \iff \overline{\lambda} = \mu$$

(je n'ai justifié que l'implication, mais la réciproque est évidente car alors $\lambda = \overline{\mu}$)
La fonction f s'écrit donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\, e^{rx} + \overline{\lambda}\, e^{\overline{r}x} \\ &= \lambda\, e^{rx} + \overline{\lambda\, e^{rx}} \\ &= 2\,\mathfrak{Re}\,\left(\lambda\, e^{rx}\right) \end{aligned}$$

Si $r = \alpha + i\beta$ et $\lambda = u + iv$, alors

$$(u + iv)\, e^{(\alpha+i\beta)x} = (u + iv)\, e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

Donc en prenant la partie réelle :

$$f(x) = 2u\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2v\, e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \text{avec} \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2$$

Lorsque (u, v) décrivent $\mathbf{R}^2$; $(2u, -2v)$ décrivent également $\mathbf{R}^2$.
En posant de nouvelles constantes $\widetilde{\lambda} = 2u$ et $\widetilde{\mu} = -2v$, je peux écrire

$$S = \left\{ x \mapsto \widetilde{\lambda}\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \widetilde{\mu}\, e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ (\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$