GÉOMETRIE

"Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre."
Inscription au fronton de l'Académie de Platon

Extrait du programme officiel 2015[1] :
"L'approche des formes planes, des objets de l'espace, des grandeurs, se fait par la manipulation et la coordination d'actions sur des objets. Cette approche est soutenue par le langage : il permet de décrire ces objets et ces actions et favorise l'identification de premières caractéristiques descriptives. Ces connaissances qui resteront limitées constituent une première approche de la géométrie et de la mesure qui seront enseignées aux cycles 2 et 3."

Comme demandé par le programme, ce chapitre se focalise sur quelques notions élémentaires de la géométrie du plan ou de l'espace. Il s'agit des espaces dans lesquels nous évoluons (l'espace à 3 dimensions) ou qui nous servent de support à la représentation (l'espace à 2 dimensions : tableau, feuille, écran...).
Nous ne chercherons donc pas à faire preuve de grande dextérité, ni à développer des concepts théoriques compliqués. Ce chapitre servira simplement de support pour des raisonnements géométriques en physique ou en géologie et facilitera la visualisation de notions mathématiques abstraites.
Nous avons déjà eu recours à la géométrie dans plusieurs chapitres (systèmes linéaires, nombres complexes...).

Remarque : N'attendez pas une grande rigueur dans les constructions des objets mathématiques de ce chapitre. Ce n'est pas le but et cela nous emmènerait trop loin.

Notations : Dans le chapitre, on désignera habituellement par $\mathscr{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal, et par $\mathscr{E}$ l'espace de dimension 3 muni d'un repère orthonormal.

1 VECTEURS ET PRODUIT SCALAIRE

A Vecteurs et représentation matricielle

Définition 1.1 (Vecteur)
Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Un vecteur de $\mathbb{R}^3$ est un triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

On pourrait généraliser facilement à $\mathbb{R}^n$:
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Notation :
Un vecteur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, se note également $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Un vecteur $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, se note également $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Bijection avec les matrices :
Le fait de confondre les deux notations est une simplification bien pratique. En toute rigueur, on parle d'une bijection entre les deux *notations* :

Théorème 1.2 :
$$\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\\ (x,y) & \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\\ (x,y,z) & \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{cases} \quad \text{sont des bijections}$$

[1] BO spécial n°2 du 26 mars 2015, Programme d'enseignement de l'école maternelle, section 4.2

Opérations sur les vecteurs :
Ainsi, on définit les mêmes opérations (somme et produit externe) sur les vecteurs que sur les matrices. Il n'y a pas de produit interne car les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont représentés par des matrices rectangulaires et non carrées.

- Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$
- Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors le vecteur opposé de $\overrightarrow{u}$ est $-\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$
- Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda.a \\ \lambda.b \end{pmatrix}$

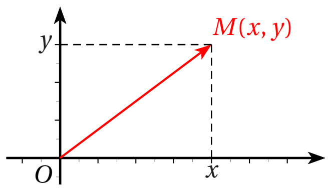
B Vecteurs et représentation euclidienne

Théorème 1.3 :
Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère **fixé**.
Il existe une bijection *canonique*[a] entre les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les points de l'espace $\mathbb{R}^n$.
À chaque vecteur correspond un unique point de l'espace :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathscr{P} \\ (x,y) & \mapsto M(x,y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathscr{E} \\ (x,y,z) & \mapsto M(x,y,z) \end{cases} \quad \text{sont des bijections}$$

Si O est l'origine du repère, on note alors $\overrightarrow{OM}$ le vecteur associé au point M.

$$\overrightarrow{OM} = (x,y) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



[a] On pourrait construire beaucoup d'autres bijections, mais celle-ci est la plus *naturelle*.

Définition 1.4 :
À tout couple de points (A,B) du plan $\mathscr{P}$, on associe un unique vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux **représentants** d'un même vecteur.

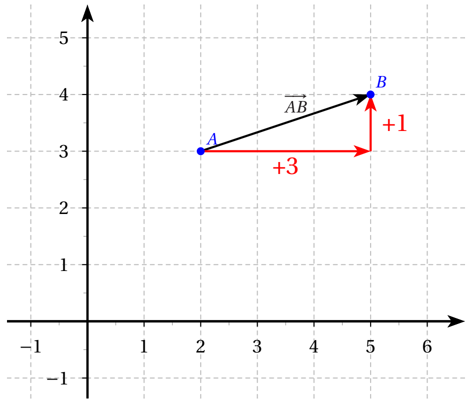
On donne une définition équivalente pour $\mathscr{E}$ l'espace à trois dimensions.

Explications :

Ces coordonnées correspondent à "la coordonnée du point d'arrivée *moins* la coordonnée du point de départ".

Exemple

Soient $A(2,3)$ et $B(5,4)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_B) = (3;1)$
Ces coordonnées traduisent la transformation qui permet de passer du point A au point B.
En effet, si j'ajoute ces coordonnées à celles de A, j'obtiens le point B.
$x_A + (x_B - x_A) = x_A + x_B - x_A = x_B$
$y_A + (y_B - y_A) = y_A + y_B - y_A = y_B$

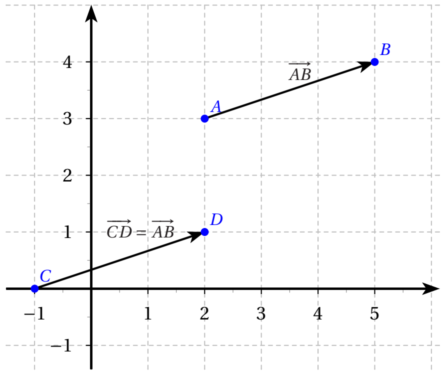


Si $C = (-1,0)$, quelles doivent être les coordonnées de $D(x_D, y_D)$ pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Solution :
Il suffit d'ajouter les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ aux coordonnées de C :

$$x_D = x_C + x_{\overrightarrow{AB}} = -1 + 3 = 2$$

$$y_D = y_C + y_{\overrightarrow{AB}} = 0 + 1 = 1$$



Théorème 1.5 (Relation de Chasles)
Soient trois points du plan A, B et C, Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Théorème 1.6 :

Un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est associé à une unique *translation* $t_{\overrightarrow{u}}$:

$$t_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} \mathscr{P} & \to \mathscr{P} \\ A(x,y) & \mapsto A'(x+a, y+b) \end{cases}$$

De même dans l'espace de dimension 3.

Explications :

On peut interpréter la *flèche* du vecteur ainsi : elle translate du point de départ vers le point d'arrivée.
Tous les couples de points correspondant à la même translation correspondent donc au même vecteur.

Définition 1.7 **(Norme d'un vecteur)**

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, la **norme** ou la **longueur** de $\vec{u}$ est égale à la distance entre son représentant canonique[a] M et l'origine du repère.

Sur $\mathbb{R}^2$:

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sur $\mathbb{R}^3$:

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**.

[a] c'est-à-dire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Remarque : La norme d'un vecteur est toujours positive, elle est nulle si et seulement si le vecteur est nul.

Exemple

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

A et B sont confondus, si et seulement si $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 0$.

Propriété 1.8 :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Preuve :

$(AB) \mathbin{/\!/} (DC)$ et $AB = DC$. ■

C Cercles du plan

Définition 1.9 **(Cercle du plan)**

Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $R > 0$. Le cercle de centre Ω et de rayon R est constitué de l'ensemble des points M situés à une distance R de Ω.

$$\mathscr{C}(\Omega, R) = \left\{M \in \mathscr{P}, \text{ tel que } \Omega M = R\right\}$$

Propriété 1.10 **(Équation implicite d'un cercle)**

Si $\Omega(x_0, y_0) \in \mathscr{P}$, alors

$$M(x, y) \in \mathscr{C}(\Omega, R) \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{C}(\Omega, R) = \left\{M(x, y) \in \mathscr{P}, \text{ tel que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\right\}$$

Réciproquement, toute courbe solution d'une équation de type

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est une équation de cercle si $a^2 + b^2 \geq 4c$ (sinon l'ensemble est vide).

Preuve :

$\Omega M = R \iff \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = R \iff \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = R^2$ car la norme est positive.
Donc $\Omega M = R \iff (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$.
Pour l'écrire sous la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
on pose alors $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ et $c = x_0^2 + y_0^2 - R^2 = \frac{a^2+b^2-4R^2}{4}$
Le cercle existe si et seulement si $R^2 \geq 0$, c'est-à-dire pour $a^2 + b^2 \geq 4c$. ■

Attention : Dans l'équation de cercle, il ne faut pas avoir de coefficient multiplicatif devant de x^2 et le y^2 (ou bien le même pour que l'on puisse se ramener à 1 en divisant). De même, on n'a pas de termes en xy.
Les équations du type $\alpha x^2 + \beta y^2 + ax + by + c = 0$ correspondent aux ellipses (si α et β sont de même signe) qui ne sont pas au programme. Cela revient à étirer le cercle dans une direction comme présenté dans le devoir de pré-rentrée.

Remarque : Si on considère le plan complexe $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$, l'équation du cercle s'écrit alors très simplement à partir de l'exponentielle complexe : $z - z_0 = R\,\mathrm{e}^{i\theta}$:

$$\mathscr{C}(\Omega, R) = \left\{z_0 + R\,\mathrm{e}^{i\theta},\ \theta \in]-\pi, \pi]\right\}$$

Cette formulation a l'avantage d'être explicite : en faisant varier θ, j'obtiens directement les points du cercle.
Au contraire, l'équation implicite de la propriété nous laisse devant à une équation à deux inconnues (x, y) qu'il faut résoudre.
Ce passage par les complexes nous indique une façon d'avoir une représentation *paramétrique* du cercle dans $\mathscr{P}$ (qui dépend d'un paramètre que l'on fait varier : ici c'est θ).

Propriété 1.11 (Représentation paramétrique d'un cercle)
Si $\Omega(x_0, y_0) \in \mathscr{P}$, alors
$$\mathscr{C}(\Omega, R) = \left\{M(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta),\ \theta \in]-\pi, \pi]\right\}$$

Preuve :

C'est le cercle trigonométrique dilaté de R puis translaté de $\overrightarrow{O\Omega}$. ■

Exemple

Donnez la forme paramétrique du cercle d'équation

$$(\mathscr{C}) :\ 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 8$$

Solution :
On cherche le centre Ω et le rayon. Pour cela on met l'équation sous forme canonique.

$$\begin{aligned}
2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 8 &\iff x^2 + y^2 + 2x - 6y = 4 \\
&\iff (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 = 4 \\
&\iff (x+1)^2 + (y-3)^2 = 14
\end{aligned}$$

Le centre du cercle est $\Omega(-1, 3)$ et le rayon est $\sqrt{14}$.
Un paramétrage du cercle est donc

$$\begin{cases} -1 & +\sqrt{14}\cos\theta \\ 3 & +\sqrt{14}\sin\theta \end{cases} \qquad \text{pour } \theta \in]-\pi, \pi]$$

D Produit scalaire et orthogonalité

Définition 1.12 (Produit scalaire)

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On définit le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On définit le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Remarque : Le produit scalaire est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est un réel et non un vecteur.

Propriété 1.13 :

Le produit scalaire est

- commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- linéaire : $(\vec{u} + \lambda \vec{u'}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda \vec{u'} \cdot \vec{v}$

Pour $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}$ trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété 1.14 (Produit scalaire et norme)

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Définition 1.15 (Orthogonalité)

Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont dit orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

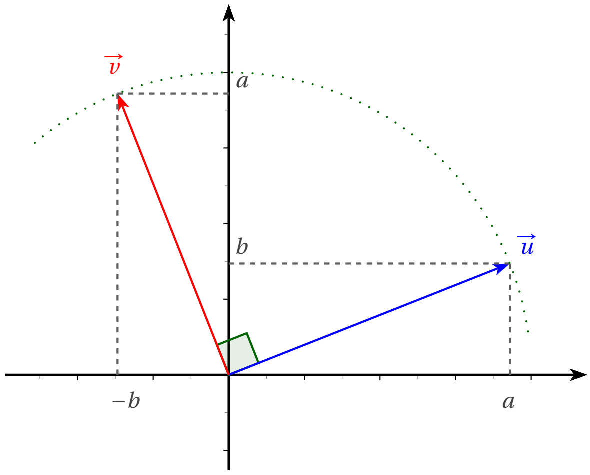
Exemple

Montrez que le seul vecteur qui soit orthogonal à tous est le vecteur nul.
Solution :
Analyse : Soit $\vec{u}$ orthogonal à tous les vecteurs.
En particulier, il est orthogonal à lui-même. Donc $\|\vec{u}\|^2 = 0$, donc $\vec{u} = \vec{0}$
Synthèse : pour tout vecteur $\vec{v}$, $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$. Donc $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Méthode (Trouver un vecteur orthogonal dans le plan)

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ lui est orthogonal (et de même norme)



Méthode (Trouver des vecteurs orthogonaux dans l'espace)

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v''} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ lui sont orthogonaux.

Preuve :

Il suffit de faire le calcul. ■

On remarque que les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ forment un plan. Il suffit donc de deux vecteurs (non colinéaires) orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ pour former un repère de ce plan. Ainsi, lorsque $b \neq 0$, on voit que $\overrightarrow{v''}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$: $\overrightarrow{v''} = \frac{c}{b}\overrightarrow{v} + \frac{a}{b}\overrightarrow{v'}$ (si $b = 0$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne forment pas une base du plan car ils sont colinéaire. On peut donc prendre $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v''}$ par exemple.)

De même, tous les vecteurs othogonaux à $\overrightarrow{u}$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois là.

2 Droites et plans

A Droites dans le plan et l'espace

Définition 2.1 (Colinéarité)

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** s'ils sont proportionnels,
c'est-à-dire, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$

Explications :

Les deux vecteurs placés à l'origine sont sur la même ligne, ou leur représentants sont parallèles (voir figure 1).

Exemple

Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, alors les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$ sont exactement tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{v}$. Nous verrons plus loin que c'est une façon de décrire une droite (propriété 2.5)

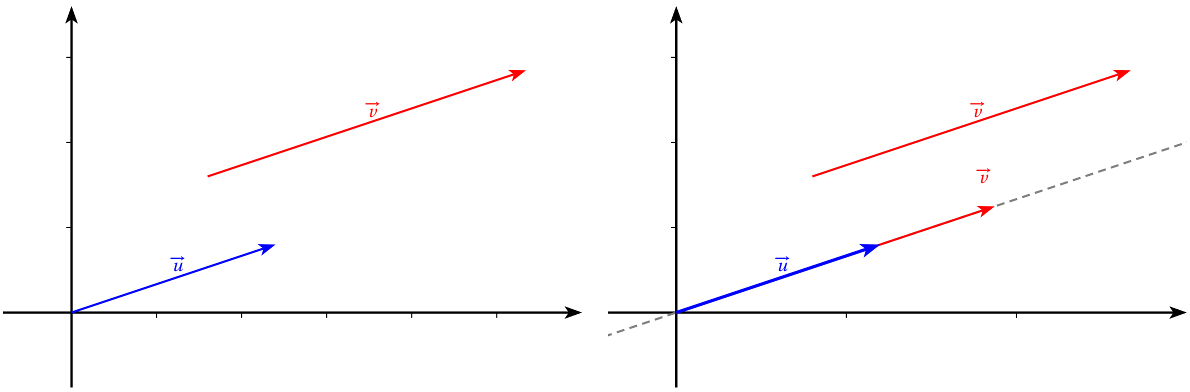


Figure 1: Géométrie : Vecteurs colinéaires

Définition 2.2 **(Droites du plan ou de l'espace)**

Une droite (d) du plan $\mathscr{P}$ est définie à partir d'un vecteur directeur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ non nul et un point $A(x_0, y_0)$ par lequel elle passe.

La droite est l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On note souvent (AB) : la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ passant par A.

Dans l'espace à trois dimension, on rajoute une troisième coordonnée z pour le point et le vecteur.

Explications :

Le vecteur $\vec{u}$ donne la direction de la droite et le point A sert à la décaler par rapport à l'origine (voir la figure 2).
On voit que l'écriture n'est pas unique : on peut prendre différents vecteurs, et différents points pour décrire une même droite. En effet, on peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite. Et $\vec{u}$ peut être remplacé par tout vecteur non nul qui lui est colinéaire (qui donne la même direction).
Cette définition doit vous rappeler les solutions des systèmes linéaires avec second membre. Lorsque la solution était une droite affine, elle s'écrivait sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \text{Vect} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur donne les coordonnées du point A et le second vecteur indique la direction de la droite.

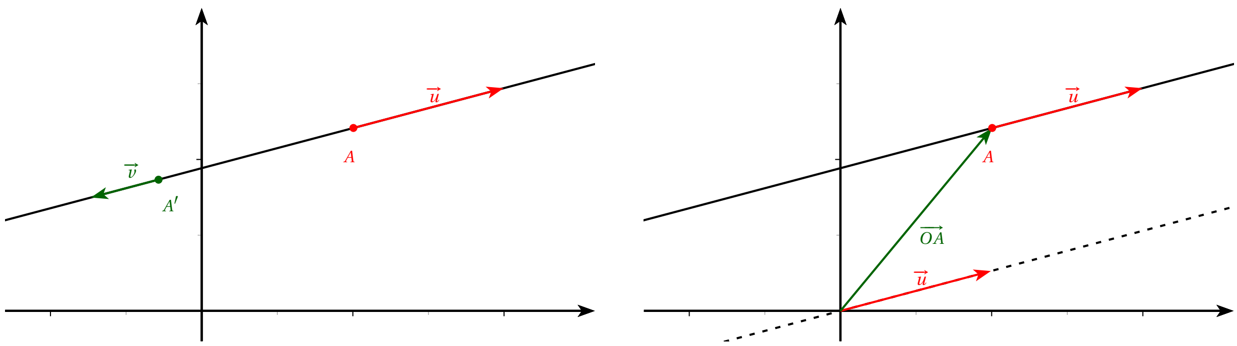


Figure 2: Géométrie : Définition d'une droite

Définition 2.3 **(Segments du plan ou de l'espace)**

Pour deux points (A, B) du plan ou de l'espace.
Le segment $[AB]$ est défini par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0, 1]$.

Explications :

Ce sont l'ensemble des points situés entre A et B.
Intuitivement : on écrit un point M du segment comme le point A auquel on rajoute une portion de $\overrightarrow{AB}$:

Propriété 2.4 (Représentation paramétrique d'une droite ou d'un vecteur du plan)

Une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et passant par le point $A\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\end{pmatrix}$ a pour équation :

$$(d)\ \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Si on restreint t au segment $[0,1]$, alors on obtient uniquement le segment $[A, t_{\overrightarrow{u}}(A)]$.

Remarque : Cette représentation n'est pas unique.

Propriété 2.5 (Équation implicite d'une droite du plan : représentation cartésienne)

Une droite (d) du plan est parfaitement décrite par un point $A(x_A, y_A)$ par lequel elle passe et un vecteur orthogonal $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$.
L'équation de cette droite est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Réciproquement, toute équation du plan de la forme $ax + by + c = 0$ désigne une droite.

Remarque : On remarque que les expressions $-x_A$ et $-y_A$ correspondent à un changement d'origine du repère : au lieu de passer par $O(0,0)$, la droite passe par $A(x_A, y_A)$.

Preuve :

Ce sont simplement l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp \overrightarrow{v}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. ■

Propriété 2.6 (Pente de la droite)

Si $b = 0$ la droite est verticale,

Sinon, la pente de la droite est donnée par $-\frac{a}{b}$. C'est la pente du vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$.

Exemple

Soit l'équation d'une droite dans le plan : $(d) :\ 5x + 3y = 4$

a) Trouvez un vecteur orthogonal à la droite (d) et un point par lequel passe (d).

b) En déduire une équation paramétrique de (d).

Solution :

a) *Vecteur normal :* $\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$

Point de la droite : si on prend $x = 0$, alors $y = \frac{4}{3}$. donc la droite passe par le point $A\begin{pmatrix}0\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$.

b) Un vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal. Donc $\begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

Une équation paramétrique de (d) est alors

$$(d) :\ \begin{cases} x = -3t \\ y = \frac{4}{3} + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

On peut aussi trouver plus rapidement une équation paramétrique, en posant $x = t$ par exemple. alors en remplaçant dans la deuxième équation, on trouve $y = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}t$ et l'équation de la droite est

$$(d) : \begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{4}{3} - \frac{5}{3}t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Les deux équations de droite sont équivalentes, à un changement de variable t près (le changement est bijectif en multipliant t par -3 ou en le divisant par cette même quantité). Le changement de variable t nous fait juste parcourir "*plus ou moins vite*" la droite (avec le premier paramétrage on va trois fois plus vite qu'avec le second, mais dans l'autre sens).

Exemple

Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$(d) : \begin{cases} x &= 7t+5 \\ y &= -t+1 \end{cases}$$

a) Trouvez un vecteur directeur à la droite (d) et un point par lequel passe (d).

b) En déduire une équation cartésienne de (d).

Solution :

a) Un vecteur directeur de (d) est $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

pour $t = 0$, la droite passe par le point $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Un vecteur normal à (d) est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.
On en déduit une équation cartésienne de (d) : $x + 7y + c = 0$
Pour trouver c, on remplace x par 5 et y par 1 et on trouve : $5 + 7 + c = 0$, donc $c = -12$.

$$(d) : \ x + 7y - 12 = 0$$

On peut aussi voir que $t = 1 - y$, que l'on remplace dans la première équation et on retrouve : $x = 7(1 - y) + 5$ c'est-à-dire $x + 7y - 12 = 0$

Exemple

Donnez une équation cartésienne de la droite passant par $A(2,0)$ et $B(-4,3)$.
Solution :
La droite passe par $A(2,0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ On peut lui substituer un vecteur colinéaire plus simple (en divisant par 3) : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Une équation cartésienne est du type :

$$(d) : \ x + 2y + c = 0$$

On sait que la droite passe par A et on peut remplacer x par 2 et y par 0. On obtient ainsi $c = -2$ pour que l'équation soit vérifiée.
La droite a donc pour équation cartésienne

$$(d) : \ x + 2y - 2 = 0$$

Remarque : On peut aussi obtenir la constante en raisonnant par translation par rapport à l'origine :

$$(d) : \ (x-2) + 2(y-0) = 0$$

Propriété 2.7 **(Représentation paramétrique d'une droite ou d'un segment de l'espace)**

Une droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et passant par le point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ a pour équation :

$$(d) \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Si on restreint t au segment $[0,1]$, alors on obtient uniquement le segment $[A, t_{\overrightarrow{u}}(A)]$

Propriété 2.8 **(Équation implicite d'une droite de l'espace : représentation cartésienne)**

L'équation d'une droite de l'espace est donnée par deux vecteurs non colinéaires qui lui sont orthogonaux.

$$\begin{cases} a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) &= 0 \\ a'(x-x_A)+b'(y-y_A)+c'(z-z_A) &= 0 \end{cases}$$

Explications :

Cette explication prend un peu d'avance sur le cours, puisqu'elle utilise la description des plans. Mais si vous avez suivi jusque là et que vous avez compris le galimatias au moment du chapitre sur les systèmes d'équations, alors vous allez voir que c'est simple.
On peut décrire une droite

- par l'intersection de deux plans.
  Nous avions vu au moment des systèmes que dans un espace de 3, les solutions d'une équation (à trois inconnues) désignent un espace de dimension $2 = 3 - 1$.
  Ainsi chaque équation désigne un plan. Si ces deux plans ne sont pas confondus ou parallèles (équations proportionnelles), alors ils sont sécants et leur intersection est une droite.
- par orthogonalité à deux vecteurs.
  Une droite est décrite à partir de deux vecteurs non colinéaires : deux vecteurs non colinéaires désignent un plan. Et la droite décrite est celle qui est orthogonale à ce plan et passe par un point A (second membre).

Ainsi, la propriété ci-dessus, peut être interprétée soit comme l'intersection de deux plans (chaque équation désigne un plan), soit comme la donnée de deux vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ qui doivent tous deux être orthogonaux à $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}$.
Bien sûr, ces deux interprétations sont équivalentes (ce sont les mêmes équations).

B Projection orthogonale sur une droite

Définition 2.9 **(Droites orthogonales)**

On dit que deux droites sont orthogonales, lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Définition 2.10 **(Projeté orthogonal)**

Soit un point A et une droite (d), le **projeté orthogonal** de A sur (d) est donné par l'unique point H tel que

- $H \in (d)$
- $(AH) \perp (d)$

Exemple

Si $A \in (d)$, alors $H = A$

Propriété 2.11 (Caractérisation du projeté orthogonal)

Le projeté orthogonal de A sur (d) est le point H de (d) qui est le plus proche de A.
c'est-à-dire que H est l'unique point tel que

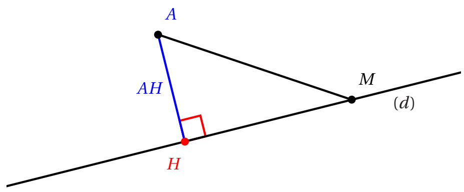
- $H \in (d)$
- $AH = \min_{M \in (d)} AM$

Preuve :

Soit $H \in (d)$ le projeté orthogonal de A sur (d).
Soit M un point quelconque de (d).
Alors d'après le théorème de Pythagore,

$$AH^2 + HM^2 = AM^2$$

Donc pour $M \neq H$, $AH < AM$.
AH est donc la distance minimale entre A et un point de (d), et cette distance n'est atteinte que pour $M = H$.

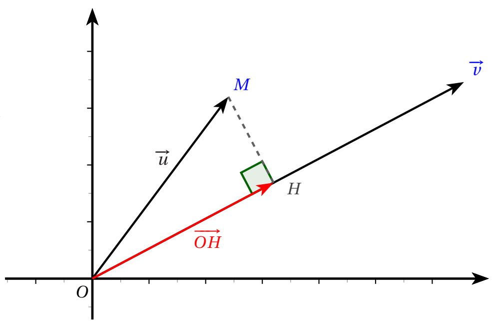


■

Définition 2.12 (Projection orthogonale entre deux vecteurs)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
On note M le représentant canonique de $\overrightarrow{u}$ et (d) la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ passant par l'origine O.
Si H est le projeté orthogonal de M sur (d), alors

le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ est $\overrightarrow{OH}$.



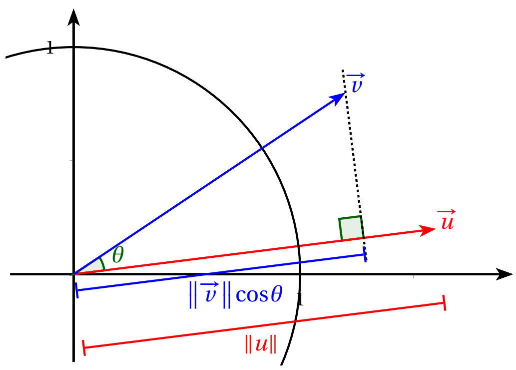
Attention : Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ n'est pas le même que le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$.
Le projeté est un vecteur. On peut montrer dans le cas général que

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2} \overrightarrow{v}$$

Propriété 2.13 (Produit scalaire et cosinus)

Soit θ l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$$



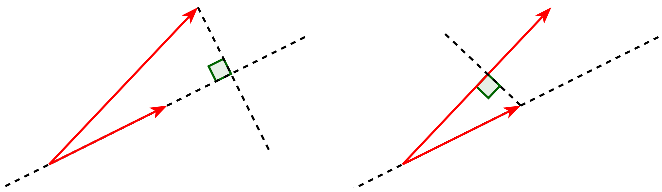


Figure 3: Géométrie : projection d'un vecteur sur un autre.

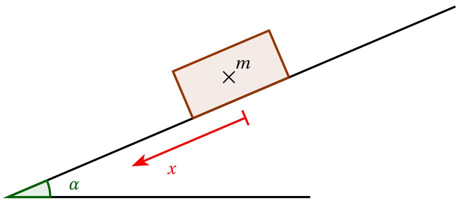
Remarque : En fait, on pourrait plutôt utiliser cette propriété comme définition de l'angle θ entre les deux vecteurs. Il faudrait encore savoir quel signe affecter à θ (car le cosinus est pair) et parler d'orientation du repère. Mais tout ceci est un peu compliqué et nous prendrait trop de temps à développer. Nous considérons donc ici, que l'on *sait* ce qu'est un angle.

Explications :

$\vec{u}.\vec{v}$ est égal à la longueur de $\vec{v}$ multiplié par la longueur du projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.
Les rôles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont symétriques. On peut interpréter que l'on projette $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ ou le contraire. On obtient le même résultat (voir la figure 3).

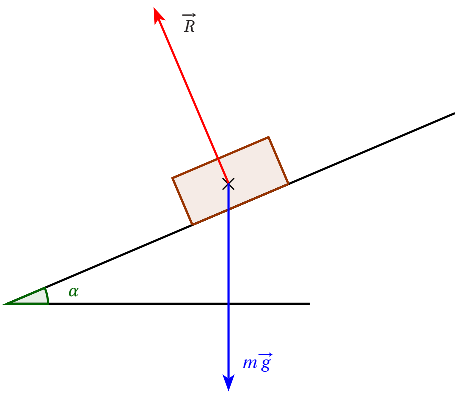
Exemple (Mécanique)

On s'intéresse à un bloc (assimilé à une masse ponctuelle m), qui glisse sur un plan incliné (angle α avec l'horizontale).
On suppose qu'il n'y a aucun frottement entre le bloc et son support. L'abscisse $x(t)$ du bloc est comptée le long de la pente dans la direction descendante.
Le bloc est lâché au temps $t = 0$, sans vitesse initiale au point d'abscisse $x = 0$.
Le but est de déterminer la position du bloc au cours du temps.



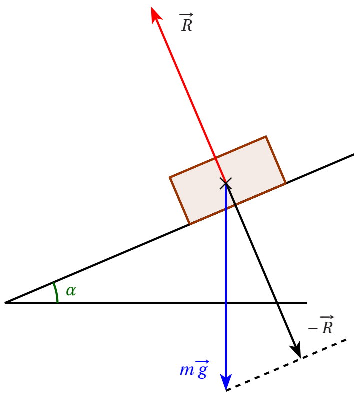
Solution :

- **Bilan des forces :**
  Il y a deux forces qui s'appliquent sur le mobile : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction du support $\vec{R}$ (on néglige les forces de frottement).



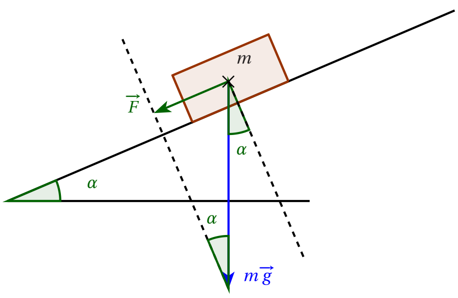
Le poids s'exerce au centre de gravité et la réaction du support au niveau du contact entre le support et la masse. Cependant, comme nous ne nous intéressons pas aux mouvements "solide-rigide" du mobile (on ne regarde pas s'il tourne sur lui-même), mais qu'on l'assimile à une masse ponctuelle, on peut appliquer toutes les forces au même point.

- **Calcul de la réaction :**
  Le calcul de la réaction n'est pas utile à l'exercice car cette force est perpendiculaire au mouvement.
  Dans d'autres modélisations, son calcul pourrait s'avérer utile pour évaluer des forces de frottement avec le support (qui dépendent en général de la vitesse du mobile et de la force de réaction). Il peut aussi servir pour vérifier la résistance du support et son éventuel enfoncement sous le poids du mobile.
  Ici, nous allons calculer $\left\|\overrightarrow{R}\right\|$ à titre d'exercice.
  La réaction du support équilibre parfaitement la composante du poids normale au support (car il n'y a ni enfoncement, ni décollement : la seconde loi de Newton projetée sur l'axe normal au support indique que la somme des forces projetées suivant cet axe est nulle).



  Comme $\overrightarrow{R}$ est perpendiculaire au support et que $\overrightarrow{g}$ est perpendiculaire à l'horizontale, alors d'après le théorème des droites perpendiculaires deux à deux, l'angle entre l'horizontale et le support est le même que l'angle entre la verticale $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{R}$.
  Par conséquent,
$$\left\|\overrightarrow{R}\right\| = mg\cos\alpha$$

- **Calcul de la force motrice :**
  On note $\overrightarrow{F}$ la force motrice. Elle correspond à la résultante des forces suivant la direction de la pente.
  D'après la propriété sur les angles alternes-internes, on retrouve l'angle α sur le nouveau triangle entre $m\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{F}$.



$$\overrightarrow{F} = mg\sin\alpha$$

- **Loi de Newton :**
  La seconde loi de Newton projetée suivant $\overrightarrow{x}$ donne alors l'équation différentielle :
$$m\ddot{x}(t) = mg\sin\alpha$$
  On résout cette équation qui donne avec $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$:
$$\forall t \geq 0, \quad x(t) = g\sin\alpha\frac{t^2}{2}$$
  C'est l'équation de la chute libre, pour laquelle la pesanteur est multipliée d'un coefficient $\sin\alpha$.

C Droite tangente à un cercle

Définition 2.14 (Droite tangente)

Une droite (d) est dite tangente au cercle $\mathscr{C}$ si elle le “touche” en un seul point, appelé point de tangence.

Propriété 2.15 :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega \in \mathscr{P}$.
Les tangentes au cercle $\mathscr{C}$ sont exactement les droites qui passent par un point de $M \in \mathscr{C}$ et qui sont orthogonales à (ΩM).

Preuve :

Le point de tangence M doit être le point de distance minimale (sinon, la droite coupera le cercle une deuxième fois). C'est donc le projeté orthogonal de Ω sur la droite. Ainsi $(\Omega M) \perp (d)$. ■

D Plans dans l'espace

Définition 2.16 (Plans dans l'espace)

Un plan $\mathscr{P}$ de l'espace $\mathscr{E}$ est défini à partir de deux vecteurs $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ non colinéaires qui donnent sa direction et d'un point $A(x_0, y_0, z_0)$ qu'il contient.

Le plan est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$ avec $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

Remarque : Le choix de A et du vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas unique. On peut remplacer A par n'importe quel autre point de la droite, et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par deux autres vecteurs non colinéaires du plans.

Explications :

A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donnent trois points non alignés de l'espace. Cela permet de définir un plan. Le plan est décrit par deux réels $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, il s'agit bien d'un espace de dimension 2. Les deux vecteurs donnent la *direction* du plan, et le point A permet de le décaler par rapport à l'origine. C'est exactement la même logique que pour la droite que nous avions déjà vu.

Définition 2.17 (Représentation paramétrique d'un plan)

Un plan $\mathscr{P}$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ a pour équation :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \qquad \text{pour } (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Remarque : Cette représentation n'est pas unique.

Propriété 2.18 (Équation implicite d'un plan : représentation cartésienne)

Un plan $(\mathscr{P})$ du plan est parfaitement décrit par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ par lequel il passe et un vecteur orthogonal $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

L'équation de ce plan est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Réciproquement, toute équation de l'espace de la forme $ax + by + cz + d = 0$ désigne une plan.

Preuve :

Ce sont simplement l'ensemble des points M tels que $(AM) \perp \vec{w}$.

■

Exemple

Soit l'équation d'un plan : $\mathscr{P}: \; x+3y+2z=4$

a) Trouvez un vecteur orthogonal au plan $\mathscr{P}$ et un point par lequel passe $\mathscr{P}$.

b) En déduire une équation paramétrique de $\mathscr{P}$.

Solution :

a) Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan.

Pour $x=y=0$, on a $z=2$, donc le plan passe par le point $A(0,0,2)$.

b) Il faut trouver deux vecteurs orthogonaux à $\vec{w}$ et non colinéaire entre eux.

On peut prendre $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ par exemple.

Ainsi un paramétrage du plan est

$$\begin{cases} x=-3t \\ y=t-2t' \\ z=2+3t' \end{cases} \qquad \text{pour } (t,t')\in\mathbb{R}^2$$

C'est ce que l'on note aussi (dans le chapitre sur les systèmes)

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$$

On pourrait aussi trouver une équation du plan en résolvant comme un système linéaire : on a un pivot x et deux paramètres y et z. On pose donc $y=t$ et $z=t'$.
Alors $x=4-3t-2t'$ et un paramétrage du plan est simplement

$$\begin{cases} x=4-3t-2t' \\ y=t \\ z=t' \end{cases} \qquad \text{pour } (t,t')\in\mathbb{R}^2$$

C'est ce que l'on note aussi

$$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Ces deux paramétrages désignent le même plan : le paramétrage n'est pas unique.

Exemple

Soit l'équation paramétrique d'une droite dans le plan :

$$\mathscr{P}:\begin{cases} x &= 2t+3t'-5 \\ y &= 4t-t'+1 \\ z &= t-1 \end{cases}$$

a) Trouvez deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ et un point par lequel il passe.

b) Donnez une équation cartésienne de (d).

c) En déduire un vecteur orthogonal à $\mathscr{P}$

Solution :

a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ sont deux vecteur non colinéaires du plan.
Le plan passe par le point $A(-5,1,-1)$.

b) Pour obtenir une équation cartésienne du plan, soit on cherche un vecteur qui est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, soit on cherche directement l'équation en résolvant le système linéaire d'inconnues t et en t' en fonction des paramètres y et z. On en déduira ensuite la valeur de x en fonction de t et t'.
Nous allons utiliser cette deuxième méthode :

$$\begin{cases}4t-t'+1 & = y\\ t-1 & = z\end{cases} \iff \begin{cases}4t-t'+1 & = y\\ t & = z+1\end{cases} \iff \begin{cases}4(z+1)-t'+1 & = y\\ t & = z+1\end{cases} \iff \begin{cases}-t'+4z+5 & = y\\ t & = z+1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}t' & = -y+4z+5\\ t & = z+1\end{cases}$$

Donc $x = 2(z+1)+3(-y+4z+5)-5 = -3y+14z+12$, une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est

$$x+3y-14z+16 = 0$$

c) Un vecteur orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{v}$ est donné par l'équation cartésienne : $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\3\\-14\end{pmatrix}$.

On peut vérifier que

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 2\cdot 1+4\cdot 3+1\cdot(-14) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = 3\cdot 1-1\cdot 3+0\cdot(-14) = 0$$

Exemple

Donnez une équation paramétrique du plan qui passe par les points $A(1,1,2)$, $B(0,1,-1)$ et $C(1,-1,-1)$.
Solution :
Les trois points ne sont pas alignés, donc ils définissent bien un plan.
Cela se traduit par le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et peuvent servir pour paramétrer le plan.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

On peut prendre $-\overrightarrow{AB}$ au lieu de $\overrightarrow{AB}$ pour trouver un paramétrage plus simple, et on obtient

$$\begin{cases}x = 1+t+t'\\ y = 1-2t'\\ y = 2+3t\end{cases} \qquad \text{pour } (t,t')\in\mathbb{R}^2$$

Exemple

Donnez une équation cartésienne du plan qui passe par les points $A(0,2,-1)$, $B(0,1,0)$ et $C(1,1,1)$.
Solution :
Les trois points ne sont pas alignés et désignent donc un plan.
On peut chercher un vecteur orthogonal à la fois à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

On cherche $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

On peut poser $c = 1$ par exemple (le vecteur $\overrightarrow{w}$ est choisit à un rapport de proportionnalité près. Choisir l'une des coordonnées, revient à fixer ce rapport de proportionnalité. Par contre, il faut faire attention, car on ne peut pas toujours prendre n'importe quoi pour cette constante, par exemple $c = 0$ ne donne pas de solutions non nulles).
On doit donc avoir

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w} & = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{w} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -b+1 & = 0 \\ a+1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b & = 1 \\ a & = -1 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient comme vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$$\mathscr{P} : \ -(x-0) + (y-2) + (z+1) = 0$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{P} : \ -x + y + z - 1 = 0$$

E Projection orthogonale sur un plan

La projection orthogonale sur un plan relève de la même philosophie que celle sur une droite. Elle revient à trouver la distance minimale entre un point A et un plan $(\mathscr{P})$. Cette distance est atteinte pour H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$, c'est-à-dire H, l'unique point de $(\mathscr{P})$ tel que (AH) soit orthogonal à $(\mathscr{P})$ (c'est-à-dire à toutes ses droites).

Définition 2.19 (Projeté orthogonal)

Soit un point A et un plan $(\mathscr{P})$, le **projeté orthogonal** de A sur $(\mathscr{P})$ est donné par l'unique point H tel que

- $H \in (\mathscr{P})$
- $(AH) \perp (\mathscr{P})$

Remarque : Ce point est bien unique car l'intersection d'un plan avec une droite perpendiculaire est unique.

Exemple

Si $A \in (\mathscr{P})$, alors $H = A$

Propriété 2.20 (Caractérisation du projeté orthogonal)

Le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$ est le point H de $(\mathscr{P})$ qui est le plus proche de A.
c'est-à-dire que H est l'unique point tel que

- $H \in (\mathscr{P})$
- $AH = \min\limits_{M \in (\mathscr{P})} AM$

Preuve :

Pythagore ■

3 Barycentres

Définition 3.1 **(Points pondérés)**

Un **point pondéré** est un point du plan ou de l'espace auquel on affecte un réel appelé **masse** : (A, α).
A est le point, et $\alpha \in \mathbb{R}$ est la masse.

Un **système de points pondérés** est un ensemble de points pondérés $\Big\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\Big\}$.
La **masse totale du système** est définie par $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Explications :

Les points peuvent désigner des positions de l'espace (ou du plan). Les masses désignent l'attraction ou la répulsion (en fonction du signe) exercées par chacune de ces positions.
Par exemple, les masses peuvent désigner la masse physique d'objets situés sur ces points, ou bien les charges électriques...
Un point de masse nulle n'aura aucune influence.

Définition 3.2 **(Barycentre d'un système)**

Soit $\Big\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\Big\}$, un système de points pondérés dont la **masse totale n'est pas nulle**.
Il existe un unique point G appelé **barycentre** du système, tel que

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

Dans la suite, on notera ce barycentre $\text{Bar}\Big\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \cdots, (A_n, \alpha_n)\Big\}$

Explications :

L'équation de la définition peut s'interpréter facilement comme la position d'équilibre d'un mobile mécanique soumis à différentes forces attractives ou répulsives depuis les points A_i comme expliqué plus haut.
Par exemple, les A_i correspondent aux points d'accroche de n ressorts. Le ressort fixé au point A_i a pour raideur α_i.
Un objet est fixé à ces différents ressorts et on cherche sa position d'équilibre.
Cette position d'équilibre est atteinte lorsque les forces des ressorts se compensent exactement (voir la figure 4).

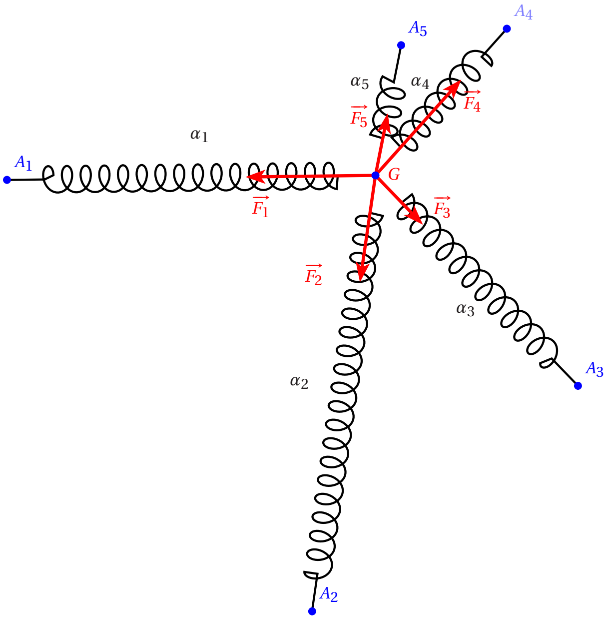


Figure 4: Géométrie : Interprétation mécanique du barycentre

Propriété 3.3 :

Soit $\left\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n,\alpha_n)\right\}$, un système de points pondérés dont la **masse totale n'est pas nulle**.
Si G est son barycentre, alors pour tout point M,

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

Explications :

C'est la formule *traditionnelle* du centre de gravité.
Vous la voyiez habituellement dans le cas où M est l'origine du repère.
Il s'agit alors de la "moyenne" des positions pondérées par les masses.

Preuve :

Il faut prouver que ce point existe et qu'il est unique. On va donc utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.

- (**Analyse**)
  Supposons que G vérifie l'équation de la définition.
  Soit M un point quelconque,
  D'après la relation de Chasles, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA_i}$.
  Alors d'après l'équation qui définit le barycentre :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}\\
\Rightarrow &\alpha_1(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA_1})+\alpha_2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA_2}\right)+\cdots+\alpha_n\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA_n}\right) = \overrightarrow{0}\\
\Rightarrow &(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{GM}+\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}\\
\Rightarrow &\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \qquad \text{(car la masse totale est non nulle)}
\end{aligned}$$

  Avec $M = O$, l'origine du repère, on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

  Ce qui définit bien G de manière unique.
  Conclusion : si le barycentre existe, alors il est unique.

- (**Synthèse**)
  Avec l'expression obtenue précédemment et $M = O$,
  on obtient bien l'existence d'un point G, dont on doit s'assurer qu'il vérifie l'équation de la définition.
  Pour cela on réutilise la relation de Chasles écrite en analyse avec $M = O$ et on trouve :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n} = (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{GO}+\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}$$

  Or, par hypothèse

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

  Donc $\overrightarrow{GO} = -\dfrac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$
  Donc

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

  Donc G est le barycentre du système.

■

Propriété 3.4 (Coordonnées du barycentre)

Les coordonnées du barycentre sont les barycentres des coordonnées.

Exemple

Soient trois points $A(2,0)$, $B(-3,5)$ et $C(1,1)$ affectés des masses respectives $3, 1$ et -2.
Calculez les coordonnées du barycentre.

Définition 3.5 (Isobarycentre)

Lorsque tous les points sont affectés de la même masse non nulle, on parle d'**isobarycentre**. Cela revient à affecter la masse 1 à chacun des points.

Exemple

L'isobarycentre de deux points est le milieu du segment.
L'isobarycentre de trois points est le centre de gravité du triangle.

Propriété 3.6 (Invariance du barycentre par changement d'échelle des masses)

Soit $\left\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n,\alpha_n)\right\}$ un système de points pondérés admettant un barycentre.
Soit $\lambda \neq 0$,

$$\mathrm{Bar}\left\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n,\alpha_n)\right\} = \mathrm{Bar}\left\{(A_1,\lambda\alpha_1),(A_2,\lambda\alpha_2),\cdots,(A_n,\lambda\alpha_n)\right\}$$

Explications :

Si on change tous les ressorts par des ressorts trois fois plus raides, cela ne change pas le point d'équilibre. C'est seulement le rapport des raideurs qui est importants pour trouver la position, pas la raideur elle-même.

Preuve :

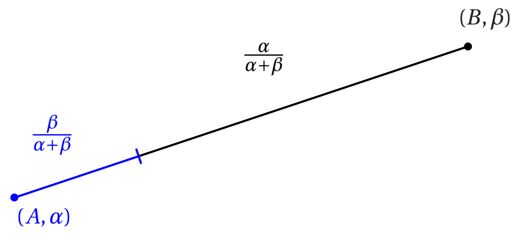
$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0} \iff \lambda\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\lambda\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\lambda\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}$$

L'équivalence nécessite $\lambda \neq 0$ ■

Propriété 3.7 (Position sur le segment)

Soient (A,α) et (B,β) deux points affectés de masses positives, non toutes nulles.
Si G est leur barycentre, alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$$



Explications :

Le point d'équilibre est d'autant plus proche du point, que sa masse est importante par rapport aux autres.

Preuve :

On remplace M par A ou B dans l'expression. ■

Propriété 3.8 (Description barycentrique du segment et de la droite)

$[AB]$ est constitué de l'ensemble des barycentres des points A, B affectés des coefficients positifs (non tous nuls).
(AB) est constitué de l'ensemble des barycentres des points A, B affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle).

Preuve :

On utilise l'expression précédente et on fait varier α en fixant β à 1 par exemple.
Puis on rajoute le dernier point en fixant avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0$. ■

Explications :

À partir de la description géométrique du segment :
On écrit un point G du segment comme le point A auquel on rajoute une portion de $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} G \in [AB] &\iff \exists t \in [0,1],\ \text{tel que } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &\iff \exists t \in [0,1],\ \text{tel que } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{A0} + t\overrightarrow{0B} \\ &\iff \exists t \in [0,1],\ \text{tel que } \overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{0B} \end{aligned}$$

G est donc le barycentre de $\Big\{(A, 1-t), (B, t)\Big\}$.

À partir de la description barycentrique du segment (propriété 3.8) :
On considère les masses α et β pour A et B. Par invariance du barycentre par changement d'échelle des masses (propriété 3.6), on peut remplacer α par la proportion $s = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et β par $t = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Alors

$$G = \mathrm{Bar}\left\{\left(A, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right), \left(B, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$$

On observe que

$$s + t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = 1$$

Donc $s = 1 - t$ et on retrouve l'expression

$$G = \mathrm{Bar}\Big\{(A, 1-t), (B, t)\Big\}$$

Ce qui permet de se ramener à $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$

Propriété 3.9 (Associativité du barycentre)

Soit $\Big\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\Big\}$ un système de trois points pondérés, on a (sous reserve d'existence des barycentres)

$$\mathrm{Bar}\Big\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\Big\} = \mathrm{Bar}\Big\{\big(\mathrm{Bar}\{(A,\alpha), (B,\beta)\}, \alpha+\beta\big), (C,\gamma)\Big\}$$

Remarque : On peut bien sûr généraliser cette propriété à un système de n points dont on en met p ensemble.

Explications :

Le point d'équilibre de trois points A, B et C de masses respectives α, β et γ ne change pas de position si je rassemble les masses A et B sur leur point d'équilibre $\mathrm{Bar}\{(A,\alpha), (B,\beta)\}$.

Preuve :

On note G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) et on note G' le barycentre de (A,α) et (B,β).

On suppose $\alpha+\beta\neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
G=\text{Bar}\Big\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\Big\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}\\
&\iff (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}}{\alpha+\beta}\right)+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}\\
&\iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GG'}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}\\
&\iff G=\text{Bar}\Big\{\big(G',\alpha+\beta\big),\big(C,\gamma\big)\Big\}
\end{aligned}$$

■

Exemple

C'est la raison pour laquelle, le centre de gravité d'un triangle est aux deux-tiers de la médiane (voir la figure 5).
En effet, le milieu I de $[AB]$ est l'isobarycentre de A et de B.
Si on lui affecte une masse de $2=1+1$, quand C a une masse de 1, le barycentre G est aux deux-tiers du segment.

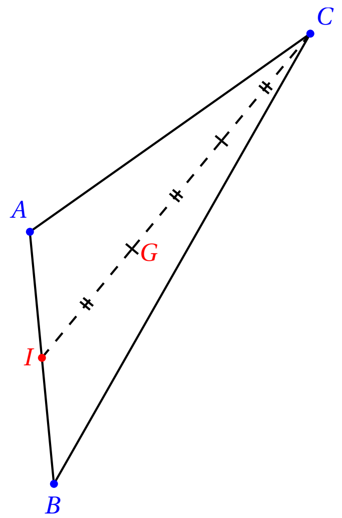


Figure 5: Géométrie : Associativité des barycentres dans le triangle

Propriété 3.10 (Description barycentrique du triangle et du plan)
Le triangle ABC est constitué de l'ensemble des barycentres des points A,B,C affectés des coefficients positifs (non tous nuls).
Le plan contenant les trois points non alignés ABC est constitué de l'ensemble des barycentres des points A,B,C affectés de coefficients quelconques (de somme non nulle).

Explications :

Lorsque les points sont alignés, on retrouve la description du segment ou de la droite.

Preuve :

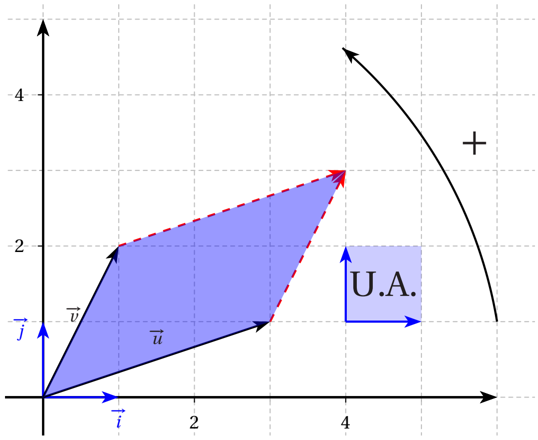
Pour le triangle, on peut “remplir” le triangle à partir des segments de type $[AI]$ avec I un point de $[BC]$.
Ainsi, pour décrire tout le triangle, je fait varier I sur $[BC]$ avec un premier barycentre, puis je prends un point sur $[AI]$ grâce à un nouveau barycentre. L'associativité des barycentres donne le résultat.
Pour avoir le plan complet, je prolonge simplement les segments en des droites. ■

4 SURFACE ALGÉBRIQUES

Définition 4.1 **(Déterminant d'un couple de vecteurs en dimension 2)**

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est égal à l'aire algébrique de la surface du parallélogramme formé par $(\vec{u}, \vec{v})$.



L'aire est algébrique, c'est-à-dire que l'échange les vecteurs donne l'opposé. On dit que le déterminant est *antisymétrique*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$$

Nous voyons ici que c'est le repère qui donne l'unitaire d'aire. En toute rigueur, il faudrait indiquer que nous calculons le déterminant dans une certaines base. Si nous changeons de base, le déterminant est également changé.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Calculez $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriété 4.2 :

Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ s'écrivent respectivement $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

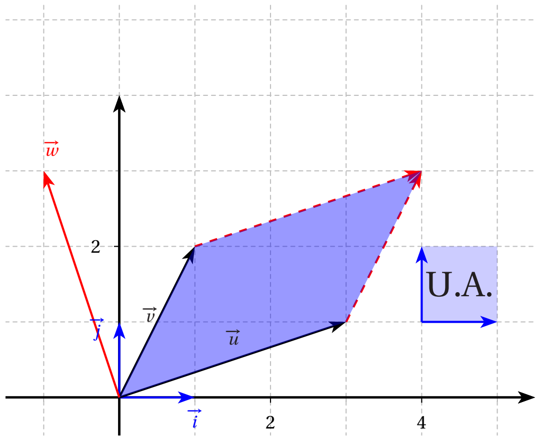
Preuve :

On introduit $\vec{w} = (-u_2, u_1)$ qui est orthogonal à $\vec{u}$.
L'aire d'un parallélogramme est égale à la longueur d'un côté multiplié par la hauteur.
Donc

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|}$$

Or $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\|$, donc

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$



■

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times 3 - 5\times 2 = -7$$

Propriété 4.3 :

Le déterminant de deux vecteurs est nul si et seulement s'ils sont colinéaires.
On dit qu'ils forment une famille **liée**.
Lorsqu'une famille n'est pas liée, on dit qu'elle est **libre**.

Explications :

L'aire du parallélogramme est nulle lorsque le parallélogramme est *aplati*.

Propriété 4.4 :

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}, \vec{v'}$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le déterminant est

a) antisymétrique : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$

b) linéaire à gauche : $\det(\lambda\vec{u} + \vec{u'}, \vec{v}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u'}, \vec{v})$,

c) linéaire à droite : $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \vec{v'}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{v'})$.

Explications :

La linéarité correspond à la notion d'additivité des aires que vous avez appris au collège.

Définition 4.5 (Déterminant d'une matrice carrée)

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2, est le déterminant de ses vecteurs colonne.
On note

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Propriété 4.6 (Critère d'inversibilité)

Une matrice carrée d'ordre 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Preuve :

Une matrice carrée est inversible
si et seulement si elle est de rang 2
si et seulement si sa transposée est de rang 2
si et seulement si ses vecteurs colonnes ne sont pas proportionnels
si et seulement si ses vecteurs colonne ne sont pas colinéaires.
si et seulement si son déterminant est non nul. ■

Remarque : On peut créer un déterminant similaire sur un espace vectoriel de dimension 3 à partir de trois vecteurs ayant chacun 3 coordonnées (volume du parallélépipède) ou dans un espace de dimension supérieure.

5 Complément hors programme : géométrie alternative

Ceci est un complément hors programme et ne pourra donc pas être utilisé au moment des concours. Il constitue néanmoins une ouverture naturelle qui prolonge le travail plus classique de ce chapitre. Seules les définitions et propriétés élémentaires vous sont données. À vous de reconstruire le reste...

Définition 5.1 (Le point)

Le point est la plus courte distance possible entre deux lignes.

Définition 5.2 (Les points parallèles)

On dit qu'un point est parallèle à deux autres points, lorsque, ce point étant convenablement disposé, si on le déplace d'un côté ou de l'autre, il n'est plus parallèle.

Théorème 5.3 (Condition suffisante de parallélisme)

La condition suffisante pour qu'un point reste bien parallèle à deux autres points est qu'il reste où il est et qu'il ne bouge pas.

Définition 5.4 (La ligne)

On appelle **lignes de première catégorie**, les lignes qui ne passent que par des points parallèles.
On appelle **lignes de deuxième catégorie**, les lignes qui ne passent que par un seul point.

Propriété 5.5 :

Toute ligne prise hors d'un point ne passe pas par ce point, ou alors, si elle y passe, c'est vraiment par hasard.

Ces éléments de géométrie sont issus de la pensée Shadok par Jacques Rouxel.