

# CONVERGENCE DES SUITES

« *L'infini n'est pas un état stable, mais la croissance elle-même.* »  
Aristote

Les suites traduisent des phénomènes par étapes. Ces processus n'avancent pas de façon continue, mais par pas de temps entiers. Dès l'antiquité, elles ont servi à Archimède pour proposer une méthode d'approximation de  $\pi$  et ont interrogé sur la notion d'*infini*.

Il faut attendre le XIX<sup>ème</sup> siècle avec Cauchy pour formaliser la notion de limite. À sa suite, Weierstrass donnera la première définition axiomatique rigoureuse de l'ensemble des réels.

*Remarque* : Dans ce polycopié, de nombreuses preuves ont été rédigées avec tout le formalisme nécessaire. Cela dépasse le niveau d'exigence normalement demandé en BCPST. Elles sont placées ici pour ceux qui voudraient aller plus loin que ce qui a été fait en classe.

## 1 DÉFINITION D'UNE SUITE

### A Opérations sur les suites

#### Définition 1.1

Une **suite réelle**  $u$  est une fonction de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

On note la suite  $u$  ou  $(u_n)$  ou  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

Lorsque la suite n'est définie qu'à partir d'un rang  $n_0$ , on note  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

L'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  s'appelle le **terme général**.

**⚠** Il ne faut pas confondre la notation  $(u_n)$  qui représente la suite toute entière, et  $u_n$  qui représente le terme  $n$  de la suite (c'est-à-dire un réel). Écrire  $u_n$ , suppose que  $n$  est un entier qui a été préalablement défini. En revanche, la notation  $(u_n) = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  comporte en elle-même la définition de  $n$  (placée en indice dans la deuxième notation, et sous-entendue dans la première).

Par exemple, il ne faut jamais écrire que  $u_n$  est croissante. C'est un non-sens ! C'est la même distinction qu'entre une fonction  $f$  et sa valeur en un point  $f(x)$ .

#### Définition 1.2

On définit les opérations  $+$ ,  $\times$ , et  $\cdot$  sur les suites par :

1. Pour toutes suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , on définit la suite **somme**  $(u_n) + (v_n)$  par

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$$

2. Pour toutes suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , on définit la suite **produit**  $(u_n) \times (v_n)$  par

$$(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$$

3. Pour toute suite  $(u_n)$  et pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on définit la suite  $\lambda \cdot (u_n)$  par

$$\lambda \cdot (u_n) = (\lambda u_n)$$

#### Explications

Les opérations sur les suites se font terme à terme.

**⚠** On peut avoir  $(u_n) \times (v_n) = 0$  alors qu'aucune des suites n'est nulle. La structure n'est pas *intégrale* et on ne peut pas simplifier une égalité par une suite, même si elle est non nulle.

#### Exemple

Trouver deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $(u_n v_n)$  soit la suite nulle, sans qu'aucune des deux ne le soit.

**Solution :**

## B Suites majorées, minorées et bornées

### Définition 1.3

Une suite  $(u_n)$  est **majorée**, s'il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$  :

$$(u_n) \text{ majorée} \iff \exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$$

$M$  est alors un **majorant** de  $(u_n)$ .

⚠ Le majorant, s'il existe, n'est pas unique, en particulier, si  $M$  est un majorant de la suite  $u$ , alors tout nombre qui lui est supérieur est aussi un majorant de  $u$ .

### Explications

Une suite est majorée, s'il existe une « barrière » qu'elle ne dépasse pas.

Par définition, une suite est majorée, si l'ensemble de ses termes est majoré :

$$\{u_n, n \in \mathbf{N}\} \leq M$$

### Exemple

Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang, est majorée.

**Solution :**

### Exemple (Notations)

Expliquer pourquoi  $u_n$  est toujours majoré.

**Solution :**

Le contraire d'une suite majorée s'obtient par la négation de l'assertion logique précédente :

### Propriété 1.4

Une suite  $(u_n)$  n'est pas majorée si

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, u_{n_0} > M$$

### Explications

De façon imagée, quel que soit le nombre  $M$  choisi (aussi grand soit-il), on trouvera toujours un terme (désigné par un indice  $n_0$ ) qui dépassera  $M$  :  $u_{n_0} > M$ .

De la même façon :

### Définition 1.5

$$(u_n) \text{ minorée} \iff \exists m \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq m$$

On dit que  $m$  est un **minorant** de  $(u_n)$ .

### Définition 1.6 (Bornes supérieures et inférieures)

Lorsque  $(u_n)$  est majorée, elle admet un plus petit majorant que l'on appelle sa **borne supérieure**.

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} u_n = \sup \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$$

Lorsque cette borne est atteinte en un terme  $u_{n_0}$ , c'est alors un **maximum**.

Lorsque  $(u_n)$  est minorée, elle admet un plus grand minorant que l'on appelle sa **borne inférieure**.

$$\inf_{n \in \mathbf{N}} u_n = \inf \{u_n, n \in \mathbf{N}\}$$

Lorsque cette borne est atteinte en un terme  $u_{n_0}$ , c'est alors un **minimum**.

### Preuve

Voir le cours sur les nombres réels. ■

### Définition 1.7

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est **bornée**, si elle est à la fois majorée et minorée.

On note  $\ell^\infty$  l'ensemble des suites bornées.

### Propriété 1.8 (Caractérisation d'une suite bornée)

$(u_n)$  est bornée si et seulement si  $(|u_n|)$  est majorée.

## Preuve

$$\begin{aligned}
(u_n) \text{ est bornée} &\iff \exists(m, M) \in \mathbf{R}^2, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, m \leq u_n \leq M \\
&\iff \exists A \in \mathbf{R}_+, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, -A \leq u_n \leq A \quad (\star) \\
&\iff \exists A \in \mathbf{R}_+, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq A \\
&\iff (|u_n|) \text{ est majorée}
\end{aligned}$$

Pour l'équivalence de  $(\star)$ , le sens direct s'obtient en prenant  $A = \max(M, -m)$  et le sens réciproque en prenant  $M = A$  et  $m = -A$ . ■

## Exemple

Pour  $a \in \mathbf{R}$ ,  $(\cos(an))_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty$

Pour  $|a| \leq 1$ , les suites définies par  $u_0 \in \mathbf{R}$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = au_n$  sont bornées.

Pour  $b > 0$ , les suites définies par  $u_0 \in \mathbf{R}$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + b$  sont minorées, mais non majorées.

## Propriété 1.9

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites bornées et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , alors  $(u_n) + (v_n)$ ,  $(u_n) \times (v_n)$  et  $\lambda(u_n)$  sont des suites bornées.

## Preuve

Si on suppose que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bornées, alors  $\exists A \in \mathbf{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq A$  et  $|v_n| \leq A$ .

(pour  $A$  on prend le maximum entre deux majorants de  $u$  et  $v$ )

Somme :

$$\begin{aligned}
|u_n + v_n| &\leq |u_n| + |v_n| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\
&\leq 2A \quad \text{par hypothèse.}
\end{aligned}$$

Donc la somme est bornée.

Produit :

$$|u_n v_n| \leq |u_n| |v_n| \leq A^2$$

Donc  $(u_n v_n)$  est bornée.

Produit avec un scalaire :

$$|\lambda u_n| = |\lambda| |u_n| \leq |\lambda| A \quad \text{car } |u_n| \leq A$$

Donc  $(\lambda u_n)$  est bornée. ■

## Exemple

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont majorées,  $(u_n) \times (v_n)$  est-elle nécessairement majorée ?

**Solution :**

## C Monotonie des suites

## Définition 1.10

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est

- **croissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$
- **strictement croissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$
- **décroissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \leq u_n$
- **strictement décroissante** si  $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} < u_n$

*Remarque :* On peut aussi définir une suite croissante ou décroissante à partir d'un certain rang  $n_0$ .

## Exemple

La suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}$  pour tout  $n \geq 1$  est croissante.

La suite définie par  $u_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \geq 1$  est décroissante.

⚠ Le contraire d'une suite croissante est une suite telle que  $\exists n_0 \in \mathbf{N}, u_{n_0+1} < u_{n_0}$ .

Cela ne veut pas dire que la suite est décroissante.

Ainsi, une suite qui n'est pas croissante, n'est pas nécessairement décroissante : il existe des suites qui ne sont pas monotones ; elles ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

## Exemple

Donner l'exemple d'une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante.

**Solution :**

## Définition 1.11

$(u_n)$  est dite **monotone**, si elle est soit croissante, soit décroissante.

$(u_n)$  est dite **constante**, si elle est à la fois croissante et décroissante.

$(u_n)$  est dite **stationnaire**, si elle est constante à partir d'un certain rang.

## Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite  $(u_n)$ , on peut

1. Étudier  $u_{n+1} - u_n$  (cas d'une suite définie avec des sommes ou une relation de récurrence linéaire)
2. Étudier  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  si la suite est de **signe constant** et **ne s'annule pas** (cas des suites avec des produits ou des puissances),
3. Si  $u_n = f(n)$ , étudier les variations de  $f$ .

## 2 THÉORÈMES DE CONVERGENCE

### A Suites convergentes

#### Définition 2.1

On dit qu'une suite  $(u_n)$  **converge** vers un réel  $\ell$  (ou admet  $\ell$  pour limite), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On dit qu'une suite  $(u_n)$  est convergente, s'il existe un réel  $\ell$  tel que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

#### Explications

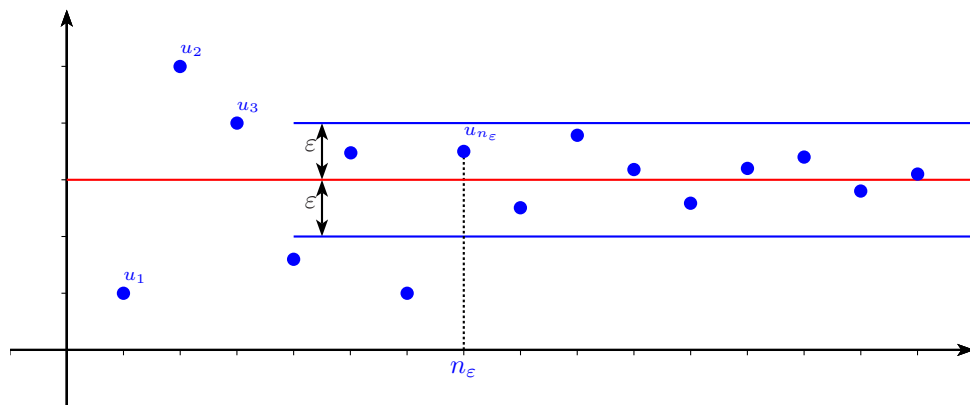
Cela veut dire que la suite s'approche de  $\ell$  autant que l'on veut. :

Si je trace un « couloir » aussi fin que je veux autour de  $\ell$ , il y aura toujours un rang à partir duquel la suite sera « coincée » dans ce couloir.

Reprenons cette phrase et traduisons-la avec la définition formelle :

Si je trace un « couloir » aussi fin que je veux autour de $\ell$ , $\varepsilon$ désigne la demi-largeur du couloir	$\forall \varepsilon > 0$
Il y aura toujours un rang $n_\varepsilon$ désigne un rang qui convient	$\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$
à partir duquel	$\forall n \geq n_\varepsilon$
la suite sera « coincée » dans ce couloir	$ u_n - \ell  \leq \varepsilon$

Contrairement à l'usage courant en français, une limite n'est pas une barrière infranchissable. Au contraire. En général, une suite passe au dessus et en dessous de la limite de nombreuses fois. La limite est davantage comme un point d'équilibre qui attire la suite et dont elle s'approche infiniment (elle peut éventuellement osciller autour, comme pour un pendule amorti).



#### Méthode

Pour montrer qu'une suite converge en utilisant cette définition, on pose  $\varepsilon > 0$  quelconque, et on cherche un  $n_\varepsilon$  qui dépend de  $\varepsilon$  tel que tous les termes après  $n_\varepsilon$  soient dans le couloir  $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ .

**Cette définition formelle ne sera utile que pour les exercices très théoriques** (rares en BCPST). Dans la très grande majorité des cas, on utilisera les théorèmes de convergence présentés plus loin pour démontrer la convergence et trouver la limite.

⚠  $n_\varepsilon$  dépend de  $\varepsilon$  (plus le couloir est étroit, plus  $n_\varepsilon$  sera grand).

Une suite qui tend vers  $+\infty$  n'est pas convergente, même si on dit que  $+\infty$  est sa limite.

#### Exemple

Trouver des exemples de suites divergentes qui ne tendent ni vers  $+\infty$  ni vers  $-\infty$ .

1. Avec une suite bornée.
2. Avec une suite ni majorée, ni minorée.

#### Solution :

#### Propriété 2.2

1. Si une suite  $(u_n)$  converge, alors sa limite est unique.
2. Une suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si et seulement si  $(u_n - \ell)$  converge vers 0.

#### Preuve

1. On suppose qu'il existe deux limites,  $\ell_1$  et  $\ell_2$  et on cherche à montrer qu'alors  $\ell_1 = \ell_2$ . On suppose par l'absurde que  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Par exemple  $\ell_1 < \ell_2$ .

#### Idée intuitive :

L'idée est de montrer que la suite ne peut pas être à la fois très proche de  $\ell_1$  et de  $\ell_2$ . Pour cela on définit deux couloirs autour de  $\ell_1$  et  $\ell_2$  de telle sorte que la suite ne puisse être dans les deux à la fois. Il suffit de choisir une largeur de couloir égale au tiers de la distance entre  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .

Puisque  $u_n \rightarrow \ell_1$ , on sait qu'à partir d'un certain rang  $n_1$ , tous les termes sont dans le couloir autour de  $\ell_1$ .

Mais  $u_n \rightarrow \ell_2$  également. À partir d'un rang  $n_2$  (a priori différent), tous les termes sont dans le couloir autour de  $\ell_2$ .

Ainsi, en allant au delà de  $n_1$  et de  $n_2$ , les termes sont à la fois dans le couloir autour de  $\ell_1$  et dans le couloir autour de  $\ell_2$ . Mais c'est impossible car nous avons vu que les deux couloirs sont disjoints. Il est donc impossible que  $(u_n)$  tende vers deux limites différentes.

**Formellement :**

On pose  $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$ .

$u_n \rightarrow \ell_1$ , donc  $\exists n_1 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ .

$u_n \rightarrow \ell_2$ , donc  $\exists n_2 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_2, |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$ .

Soit  $N = \max(n_1, n_2)$ , alors  $\forall n \geq N$ ,

$$\ell_2 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \varepsilon \quad (*)$$

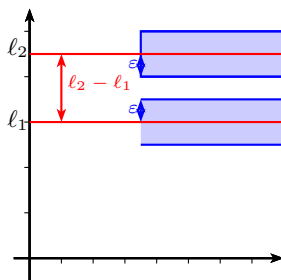
Or  $\ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{\ell_2 + 2\ell_1}{3}$ ,

Et  $\ell_2 - \varepsilon = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{2\ell_2 + \ell_1}{3}$ ,

Ainsi,  $\ell_1 < \ell_2$ ,  $\ell_1 + \varepsilon < \ell_2 - \varepsilon$ , ce qui est contradictoire avec l'équation (\*).

C'est absurde.

Donc  $\ell_1 = \ell_2$  et la limite d'une suite est unique.



2. Simplement car  $|u_n - \ell - 0| = |u_n - \ell|$ .

Intuitivement, si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors elle s'en approche infiniment. Cela veut dire que la distance entre  $u_n$  et  $\ell$  tend vers 0, c'est-à-dire que  $(u_n - \ell)$  tend vers 0.

**Exemple**

La suite définie par  $u_n = \frac{1}{n+1}$  converge vers 0.

La suite définie par  $v_n = \frac{1}{n+1} + 5$  converge vers 5.

**⚠ Tout doit disparaître :** lorsque l'on est passé à la limite, tous les «  $n$  » ont disparu. Ils tendent tous vers  $+\infty$ , et on ne doit pas en retrouver dans le résultat.

**Théorème 2.3**

Si  $(u_n)$  converge, alors elle est bornée.

*Remarque :* On utilise souvent la contraposée : si une suite n'est pas bornée, alors elle diverge.

**Preuve**

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé, par exemple  $\varepsilon = 1$ ,

si  $u_n \rightarrow \ell$ , alors

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_\varepsilon, |u_n - \ell| \leq 1$$

De plus,  $\{u_n\}_{n < n_\varepsilon}$  est un ensemble fini d'éléments. Il admet donc un maximum  $M$  et un minimum  $m$ .

Ainsi  $\forall n < n_\varepsilon, m \leq u_n \leq M$ .

Et pour  $n \geq n_\varepsilon, \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$ .

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \min(m, \ell - 1) \leq u_n \leq \max(M, \ell + 1)$$

Donc  $(u_n)$  est bornée. ■

**⚠** La réciproque est fautive. Par exemple la suite  $(\sin \frac{n\pi}{4})$  est bornée mais ne converge pas.

**Propriété 2.4**

Si  $(u_n)$  et  $(\varepsilon_n)$  sont deux suites réelles, telles que

1.  $(u_n)$  est bornée,
2.  $(\varepsilon_n)$  tend vers 0,

alors  $(u_n \varepsilon_n)$  tend vers 0.

**Preuve**

Si  $(u_n)$  est bornée, alors  $\exists M \in \mathbf{R}_+$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n| \leq M$ .

Sans restreindre la généralité, on peut supposer  $M > 0$  (sinon la suite  $(u_n)$  est nulle et le résultat trivial).

Soit  $\varepsilon > 0$ , on peut poser  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$  (car  $M > 0$ ),  
comme  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |\varepsilon_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$$

Donc  $\forall n \geq n_0, |u_n \varepsilon_n| = |u_n| |\varepsilon_n| \leq M |\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ . Donc  $(u_n \varepsilon_n)$  converge vers 0. ■

**Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  par  $\frac{\sin n}{n}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Trouver des contre-exemples lorsque l'une des deux hypothèses de la propriété 2.4 n'est pas vérifiée.

**Solution :**

## B Suites divergentes

## Définition 2.5

Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas. C'est-à-dire

$$(u_n) \text{ diverge} \iff \forall \ell \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } |u_n - \ell| > \varepsilon_0$$

## Définition 2.6

Une suite  $(u_n)$  admet  $+\infty$  pour limite si et seulement si

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_0, u_n \geq M$$

⚠ 1. Une suite qui diverge ne tend en général pas vers  $\pm\infty$ .

2. Il ne suffit pas que  $(u_n)$  ne soit pas majorée pour quelle tende vers  $+\infty$ .  
En effet, il faut en plus que  $(u_n)$  reste au dessus de  $M$  à partir d'un certain rang.

## Exemple

$u_n = (-1)^n n$  est une suite non bornée qui diverge, mais elle ne tend pas vers  $+\infty$ .

Remarque : On définit de même une suite admettant  $-\infty$  pour limite.

## Définition 2.7

La convergence ou divergence d'une suite s'appelle sa **nature**.

## Propriété 2.8

La modification d'un nombre fini de termes de la suite ne modifie pas sa nature ni son éventuelle limite.

## Preuve

Si un nombre fini de termes sont modifiés, on peut noter  $N$  le plus grand indice de ceux-ci et il suffit de choisir  $n_0 > N$  pour appliquer les définitions. ■

## C Opérations sur les limites

## Théorème 2.9

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$ , soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ .

- $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$  est convergente de limite  $\lambda\ell + \mu\ell'$  (**linéarité**).
- $(u_n) \times (v_n)$  est convergente de limite  $\ell \times \ell'$ .

## Preuve

Preuve pour  $\lambda(u_n)$  :

Si  $\lambda = 0$ , la suite est identiquement nulle et  $\lambda u_n \rightarrow 0 = \lambda\ell$ .

Si  $\lambda \neq 0$ ,

Soit  $\varepsilon > 0$ , alors  $\frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$  car  $|\lambda| > 0$ .

On peut donc appliquer la définition de la convergence de  $(u_n)$  à  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ .

Donc

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda| |u_n - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow |\lambda u_n - \lambda\ell| \leq \varepsilon$$

Donc  $\lambda(u_n)$  converge vers  $\lambda\ell$ .

Preuve pour  $(u_n) + (v_n)$  :

On utilise l'inégalité triangulaire dans la définition.

Soit  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ .

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n'_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n'_0 \Rightarrow |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour  $n \geq \max(n_0, n'_0)$ ,

$$\begin{aligned} |v_n + v_n - (\ell + \ell')| &= |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $(u_n + v_n)$  converge vers  $\ell + \ell'$ .

On en déduit la propriété de linéarité énoncé dans le théorème.

Preuve pour  $(u_n) \times (v_n)$  :

On remarque que  $u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$

Or  $(v_n)$  converge donc est bornée et  $(u_n - \ell) \rightarrow 0$ .

Donc d'après la propriété 2.4,  $(u_n - \ell)v_n \rightarrow 0$

De même,  $(v_n - \ell')u_n \rightarrow 0$ .

Donc par somme (preuve précédente),  $u_n v_n - \ell\ell' \rightarrow 0$ .

Donc  $u_n v_n \rightarrow \ell\ell'$ . ■

**Lemme 2.10**

Si  $(v_n)$  est une suite convergente de limite non nulle, alors  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang.

**Preuve**

$v_n \rightarrow \ell \neq 0$ . Si on pose  $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$ , alors  $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$ .

Par exemple, si  $\ell > 0$ , alors  $\forall n \geq n_0, 0 < \frac{\ell}{2} \leq v_n \leq \frac{3\ell}{2}$ , donc  $v_n \neq 0$ .

De même, si  $\ell < 0$ , alors  $\forall n \geq n_0, \frac{3\ell}{2} \leq v_n \leq \frac{\ell}{2} < 0$ , donc  $v_n \neq 0$ . ■

**Théorème 2.11**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$  avec  $\ell' \neq 0$

- la suite  $(\frac{1}{v_n})$  est définie à partir d'un certain rang et elle est convergente de limite  $\frac{1}{\ell'}$
- la suite  $(\frac{u_n}{v_n})$  est définie à partir d'un certain rang et elle est convergente de limite  $\frac{\ell}{\ell'}$ .

**Preuve**

Il suffit de faire la preuve pour le premier point. Le deuxième en découle à partir du théorème du produit de deux suites.

$v_n \rightarrow \ell' \neq 0$ , donc  $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_0, v_n \neq 0$ .

On peut donc définir la suite  $(\frac{1}{v_n})_{n \geq n_0}$ .

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell'} \right| = \left| \frac{\ell' - v_n}{v_n \ell'} \right| = \frac{|v_n - \ell'|}{|v_n \ell'|}$$

**Idée :**

À présent, l'idée est de montrer que  $(\frac{1}{v_n \ell'})$  est bornée (ce qui nous permettra d'utiliser la propriété 2.4).

Or, montrer que l'inverse est bornée, revient à prouver que  $v_n$  n'est pas « trop près » de 0. On utilise pour cela sa convergence pour l'écartier de au moins  $\frac{|\ell'|}{2}$  de 0 (avec le bon choix pour  $\varepsilon$ ).

**Formalisation :**

Pour  $\varepsilon = \frac{|\ell'|}{2} > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_\varepsilon, |v_n - \ell'| \leq \frac{|\ell'|}{2}$ , donc  $|v_n| \geq \frac{\ell'}{2}$ , donc  $|v_n \ell'| \geq \frac{\ell'^2}{2}$ .

Donc  $\forall n \geq \max(n_0, n_\varepsilon), \left| \frac{1}{v_n \ell'} \right| \leq \frac{2}{\ell'^2}$

La suite  $\frac{1}{v_n \ell'}$  est donc bornée et la suite  $(v_n - \ell')$  tend vers 0.

Donc  $\frac{1}{v_n} \rightarrow 0$ . ■

**Théorème 2.12 (Tableau des limites)**

$\ell$  et  $\ell'$  sont deux réels non nuls

$u_n$	$v_n$	$u_n + v_n$	$u_n \times v_n$	$\frac{u_n}{v_n}$
$\ell$	$\ell'$	$\ell + \ell'$	$\ell \ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
0	$\ell'$	$\ell'$	0	0
$\ell$	0	$\ell$	0	$\pm\infty$ pas de limite
0	0	0	0	indéterminé
$\ell$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé	0
$+\infty$	$\ell'$	$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	indéterminé	$\pm\infty$ pas de limite
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminé
$+\infty$	$-\infty$	indéterminé	$-\infty$	indéterminé

L'existence du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$  suppose que la suite  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

**Explications**

La forme *indéterminée* veut dire qu'il n'existe pas de formule générale. Mais cela ne veut pas dire qu'il faille s'en contenter. Au contraire, il faut exprimer différemment la suite pour trouver sa limite et lever l'indétermination.

⚠ Une suite de limite nulle peut ne jamais s'annuler. Par exemple  $\frac{1}{n}$  admet 0 pour limite, mais ne s'annule jamais.

**Méthode (Lever une indétermination)**

- Lorsque c'est un quotient de puissances, on factorise par les termes de plus grande puissance au numérateur et au dénominateur.
- Lorsque c'est la différence de deux racines, on utilise la quantité conjuguée.

Les croissances comparées compléteront ces méthodes.

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \frac{2n^3 - 5n + 1}{n^3 + 6n^2 + 8}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \frac{-n^3 - n^2 + n + 1}{6n^2 + 7}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Étudier la nature de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_n = \frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}}$ .

**Solution :**

**D Convergence des suites monotones****Théorème 2.13** (*Théorème de la limite monotone*)

Si  $(u_n)$  est une suite monotone, alors  $(u_n)$  admet une limite finie ou infinie.

Les deux énoncés suivants, vont nous donner des précisions sur le comportement de la suite, selon qu'elle est bornée ou non. Leur preuve permettra donc de démontrer le théorème de la limite monotone.

**Théorème 2.14**

1. Si  $(u_n)$  est une suite croissante majorée, alors  $(u_n)$  converge et sa limite est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} u_n$$

2. Si  $(u_n)$  est une suite croissante non majorée, alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$

**Preuve**

**1<sup>er</sup> cas :** si  $(u_n)$  est non majorée.

Alors par définition d'une suite non majorée :

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_M \in \mathbf{N}, \text{ tel que } u_{n_M} > M$$

Or  $(u_n)$  est croissante, donc  $\forall n \geq n_M, u_n \geq u_{n_M} > M$ .

Ainsi

$$\forall M \in \mathbf{R}, \exists n_M \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_M, u_n > M$$

C'est la définition d'une suite qui tend vers  $+\infty$ .

**2<sup>e</sup> cas :** si  $(u_n)$  est majorée, alors elle admet une borne supérieure  $M$ .

Ainsi, par définition de la borne supérieure,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } M - \varepsilon \leq u_{n_\varepsilon} \leq M$$

La première inégalité traduit que  $M$  est le plus petit majorant : s'il n'existait pas de  $u_n$  supérieur à  $M - \varepsilon$ , alors  $M - \varepsilon$  serait aussi un majorant, qui serait strictement plus petit que  $M$ . C'est absurde. D'où l'existence de  $u_{n_\varepsilon} \geq M - \varepsilon$ .

La deuxième inégalité traduit que  $M$  est un majorant, c'est-à-dire que tous les termes de la suite lui sont plus petits :  $u_{n_\varepsilon} \leq M$ .

Or  $(u_n)$  est croissante, donc  $\forall n \geq n_\varepsilon, u_n \geq u_{n_\varepsilon} \geq M - \varepsilon$ .

De plus comme  $M$  est un majorant de la suite,  $\forall n \geq n_\varepsilon, u_n \leq M$ .

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow M - \varepsilon \leq u_n \leq M \Rightarrow |u_n - M| \leq \varepsilon$$

Donc  $u_n \rightarrow M$  sa borne supérieure. ■



**Corollaire 2.15**

1. Si  $(u_n)$  est une suite décroissante minorée, alors  $(u_n)$  converge et sa limite est

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} u_n$$

2. Si  $(u_n)$  est une suite décroissante non minorée, alors  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$

**Preuve**

On utilise le théorème 2.14 avec la suite  $-u$ . ■

**Méthode** (*Utilisation du théorème de la limite monotone*)

Pour une suite monotone bornée, le théorème de la limite monotone donne l'**existence** de la limite.

Mais il est souvent difficile de trouver la valeur de cette limite avec ce théorème (la borne supérieure est difficile à trouver).

Une fois que l'on sait que la suite converge, on cherchera donc un autre moyen pour calculer la limite (si c'est demandé).

⚠ Il faut vérifier que le majorant **ne dépend pas de  $n$**  : c'est un nombre fixe.

**Exemple**

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^k}$$

Montrer que  $(u_n)$  converge (on pourra utiliser la majoration  $\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k}$ ).

**Solution :****Définition 2.16**

Deux suites  $u$  et  $v$  sont **adjacentes**, si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.

**Théorème 2.17** (*Suites adjacentes*)

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

**Preuve**

Soient  $u$  et  $v$  les deux suites adjacentes, avec  $u$  croissante et  $v$  décroissante.

★ On démontre par l'absurde que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ .

En effet, s'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $u_{n_0} > v_{n_0}$  alors on peut poser  $\varepsilon = \frac{u_{n_0} - v_{n_0}}{2}$ .

Or  $(u_n)$  croissante, donc  $\forall n \geq n_0$ ,  $u_n \geq u_{n_0}$ .

Et  $(v_n)$  décroissante, donc  $\forall n \geq n_0$ ,  $v_n \leq v_{n_0}$ .

Donc  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - v_n| = u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} > \varepsilon$ .

Donc  $(u_n - v_n)$  ne tend pas vers 0. C'est absurde.

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq v_n$$

★ On démontre que  $(u_n)$  converge

$(v_n)$  décroissante, donc  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq v_n \leq v_0$  qui est une constante qui ne dépend pas de  $n$ .  $(u_n)$  est donc croissante majorée,

D'après le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge.

★ On démontre que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.

De la même façon que pour  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  est une suite décroissante minorée, donc elle converge.

Ainsi par opération sur les limites, si on note  $u_n \rightarrow \ell_u$  et  $v_n \rightarrow \ell_v$ ,  $u_n - v_n \rightarrow \ell_u - \ell_v = 0$

Donc  $\ell_u = \ell_v$

**Exemple** (*Suite harmonique : à connaître*)

On note

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une limite commune notée  $\gamma$ .

**Solution :**

■

## E Convergence et comparaison

**Théorème 2.18** (*Conservation des inégalités par passage à la limite*)

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites convergentes telles que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

⚠ Même dans le cas d'une inégalité stricte :  $u_n < v_n$ , on conserve une inégalité *large* pour les limites.

**Corollaire 2.19**

Soit  $a \in \mathbf{R}$  une constante fixée, et  $(u_n)$  une suite *convergente*.

- si  $u_n \leq a$  à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq a$$

- si  $u_n \geq a$  à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq a$$

**Exemple** (*Théorème des segments emboîtés*)

Voici une autre formulation du théorème des suites adjacentes :

Si  $(I_n)$  est une suite de segments de la forme  $[a_n; b_n]$ , tels que

1.  $\forall n \in \mathbf{N}, I_{n+1} \subset I_n$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$

alors  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} I_n$  est un singleton

**Preuve**

On raisonne par l'absurde (la preuve ressemble beaucoup à celle de la propriété 2.2 sur l'unicité de la limite) :

Supposons que  $u_n \rightarrow \ell_u$  et  $v_n \rightarrow \ell_v$ , avec  $\ell_u > \ell_v$ . On peut alors poser  $\varepsilon = \frac{\ell_u - \ell_v}{3}$ ,

Comme  $u_n \rightarrow \ell_u$ ,  $\exists n_1 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell_u| < \varepsilon \Rightarrow u_n \geq \ell_u - \varepsilon$ .

Comme  $v_n \rightarrow \ell_v$ ,  $\exists n_2 \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_2, |v_n - \ell_v| < \varepsilon \Rightarrow v_n \leq \ell_v + \varepsilon$ .

donc  $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$ ,  $u_n \geq \ell_u - \varepsilon = \frac{2\ell_u + \ell_v}{3}$  et  $v_n \leq \ell_v + \varepsilon = \frac{\ell_u + 2\ell_v}{3}$

Comme  $\ell_u > \ell_v$ ,

$$v_n \leq \frac{\ell_u + 2\ell_v}{3} < \frac{2\ell_u + \ell_v}{3} \leq u_n$$

Or, on a supposé  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang : c'est absurde.

Donc  $\ell_u \leq \ell_v$  : les inégalité (larges) donc conservées par passage à la limite.

Pour le corollaire, il suffit de prendre  $v$  une suite constante égale à  $a$ . ■

**Théorème 2.20**

Si  $u_n \rightarrow +\infty$  et si  $(v_n)$  est une suite telle que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq v_n$

Alors

$$v_n \rightarrow +\infty$$

*Remarque* : Il existe un théorème analogue en  $-\infty$ .

**Preuve**

On utilise la définition de la limite en  $+\infty$  pour  $v$ .

Soit  $M \in \mathbf{R}$ ,

$u_n \rightarrow +\infty$ , donc  $\exists n_M \in \mathbf{N}$ , tel que  $\forall n \geq n_M, u_n \geq M$

or  $v_n \geq u_n$ , donc  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_M \Rightarrow v_n \geq M$ .

C'est la définition pour dire que  $v_n \rightarrow +\infty$ . ■

**Théorème 2.21** (*Théorème d'encadrement dit aussi théorème des gendarmes*)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de même limite  $\ell$

Si  $(w_n)$  est une suite telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq w_n \leq v_n$$

Alors  $(w_n)$  est convergente de limite  $\ell$

⚠ Pour utiliser le théorème de passage des inégalités aux limites, il faut **d'abord** montrer que les suites convergent.

Dans le théorème d'encadrement, la convergence de  $(w_n)$  est une conclusion : le théorème d'encadrement montre que la suite converge **et** donne sa limite.

**Preuve**

Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$u_n \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_1$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n$ .

$v_n \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_2$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - \ell| \leq \varepsilon \Rightarrow v_n \leq \ell + \varepsilon$ .

Donc  $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$ ,  $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq w_n \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$ .

C'est-à-dire  $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$ . Donc  $w_n \rightarrow \ell$ . ■

**F Suites extraites****Définition 2.22**

Soit  $(u_n)$  une suite.

On appelle **suite extraite d'indices pairs** de  $(u_n)$ , la suite  $(v_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = u_{2n}$$

On appelle **suite extraite d'indices impairs** de  $(u_n)$ , la suite  $(w_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n = u_{2n+1}$$

**Explications**

Cela revient simplement à ne prendre que les indices pairs ou que les indices impairs.

**Théorème 2.23**

Soit  $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

$(u_n)$  tend vers la limite  $\ell$ , si et seulement si ses suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent aussi vers  $\ell$ .

**Preuve**

Le sens direct est trivial.

Le sens réciproque (aussi).

Montrons le pour une limite finie : soit  $\varepsilon > 0$ ,

$u_{2n} \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_0$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_0, |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ .

$u_{2n+1} \rightarrow \ell$ , donc  $\exists n_1$ , tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_1, |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$ .

Donc  $\forall n \geq \max(2n_0, 2n_1 + 1)$ ,  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ .

Donc  $u_n \rightarrow \ell$ .

La preuve est semblable pour une limite infinie. ■

On utilise souvent la contraposée :

**Corollaire 2.24**

Si les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ne tendent pas vers une même limite, alors la suite  $(u_n)$  diverge.

**Exemple**

Montrer que la suite définie pour tout  $n$  par  $u_n = (-1)^n$  diverge.

**Solution :**

## G Composition avec une application

### Théorème 2.25 (Convergence et limites de fonctions)

Si  $f$  est une fonction qui admet une limite en  $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ , et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

### Corollaire 2.26 (Convergence et continuité)

Si  $f$  est une fonction **continue** en  $a$ , et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(a)$$

*Remarque :* Dans les démonstrations, il ne faut pas oublier d'écrire que  $f$  est continue pour utiliser ce théorème.

### Preuve

Admis car ces théorèmes sont liés aux définitions des limites de fonctions et de la continuité qui sont vues dans le chapitre correspondant (et dans lequel ils sont démontrés). ■

⚠ Ce n'est pas parce que la fonction n'est pas continue en  $a$  ou n'admet pas de limite en  $a$  que la suite n'en aurait pas non plus.

### Exemple

Trouver une suite  $u$  qui diverge vers  $+\infty$ , et une fonction  $f$  qui n'admet pas de limite en  $+\infty$ , mais telles que  $f(u_n)$  admette une limite en  $+\infty$ .

**Solution :**

### Exemple

Avec les mêmes hypothèses qu'à l'exemple précédent, trouver  $u$  et  $f$  telles que  $f(u_n)$  n'admette pas de limite en  $+\infty$ .

**Solution :**

### Exemple

Donner la limite de la suite  $(u_n)$  définie par  $\forall n \geq 2, u_n = \ln\left(\frac{n\sqrt{n}-1}{n^2+1}\right)$ .

**Solution :**

## 3 SUITES RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$ , et  $A$  un intervalle ou une réunion d'intervalles.

$f : A \rightarrow \mathbf{R}$  est une application.

### A Définition

Pour pouvoir calculer  $f(u_n)$ , il faut s'assurer que  $u_n$  reste dans le domaine de définition de  $f$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Voire même, que  $u_n$  reste dans un domaine sur lequel  $f$  posséderait des propriétés qui rendent l'étude plus simple.

C'est l'objet de la définition suivante : trouver un domaine stable par la fonction. Intuitivement, si un point est dans ce domaine, on peut lui appliquer  $f$  autant de fois que l'on veut, l'image reste dans ce domaine. Ainsi, on peut restreindre  $f$  à ce domaine, appelé  $A$  ici.

### Définition 3.1

On dit que la partie  $A \subset \mathbf{R}$  est **stable** par  $f$ , si  $f(A) \subset A$ .

### Exemple

Soit  $f : x \mapsto x^2$ . Montrer que  $[0, 1]$  est stable par  $f$ .  $[-1, 1]$  est-il également stable ?

**Solution :**

Un point fixe est un point qui n'est pas modifié par  $f$  : son image est égale à lui-même. Une fois sur le point fixe, on « ne bouge plus ».  
Géométriquement, un point fixe correspond à un point d'intersection entre la courbe de  $f$  et la courbe  $y = x$ .

**Définition 3.2**

Un point  $x_0 \in A$  est un **point fixe** de  $f$  si  $f(x_0) = x_0$

**Exemple**

Chercher les points fixes de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ .

**Solution :**

**Propriété 3.3**

Si  $A$  stable par  $f$ , alors les relations  $u_0 \in A$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  définissent une unique suite.

Dans ce cas,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = f^n(u_0)$  où  $f^n$  désigne la composée  $n^{\text{ième}}$  de  $f$ .

**Preuve**

Par récurrence, on montre que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \in A$ . Ainsi la suite est bien définie (et de façon unique). L'expression en fonction des composées s'obtient par la récurrence. ■

**Exemple**

Soit  $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

1. Montrer que  $\forall u_0 > 0$ , la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  définit une unique suite.
2. Montrer que les valeurs interdites pour  $u_0$  peuvent être décrites par les termes d'une suite récurrente  $(v_n)$  de premier terme  $v_0 = -1$ .

**Solution :**

**B Monotonie de la suite****Méthode**

La monotonie de la suite  $u$  dépend de la position de la courbe de  $f$  par rapport à la bissectrice  $y = x$ .

1. Si la courbe de  $f$  est au dessus de la bissectrice  $y = x$ , alors la suite est croissante.
2. Si la courbe de  $f$  est en dessous de la bissectrice  $y = x$ , alors la suite est décroissante.

On essaie de trouver un intervalle **stable** sur lequel la courbe est toujours du même côté de la bissectrice : la suite est alors monotone.

Si la suite oscille entre deux intervalles : l'un où  $C_f$  est au dessus de la courbe, et l'un où  $C_f$  est en dessous, on peut étudier les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  et essayer de montrer qu'elles sont adjacentes par exemple.

**Preuve**

$$u_{n+1} > u_n \iff f(u_n) > u_n$$

Cela correspond à  $f(x) > x$  pour  $x = u_n$  ■

**Exemple**

Voir les exercices.

**C Utilisation de la continuité de  $f$** **Théorème 3.4**

Soit  $f$  une fonction à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , continue sur une partie  $A \subset \mathbf{R}$  stable par  $f$ . On définit une suite  $(u_n)$  par  $u_0 \in A$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in A$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$ .

**Preuve**

Voir le corollaire 2.26.

L'idée est d'écrire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(\ell)$ .

Par égalité des limites on en déduit :  $f(\ell) = \ell$ . ■

⚠ La réciproque est fautive : une fonction peut avoir un point fixe sans que la suite soit convergente.

**Méthode** (*Montrer que la suite diverge*)

Pour montrer que la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par  $u_{n+1} = f(u_n)$  diverge, on peut

- Montrer que  $f$  n'admet pas de point fixe (ou pas de point fixe atteignable).
- Montrer que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ne convergent pas vers la même limite.

**Exemple**

Soit  $u_0 \in \mathbf{R}$ , et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n^2$ .

**Solution :**

## 4 RELATIONS DE COMPARAISON

### A Négligeabilité et croissances comparées

**Définition 4.1** (*Suite négligeable devant une autre*)

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles.

Si  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang, et si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$ ,

alors on note *au voisinage de*  $+\infty$

$$(u_n) \ll (v_n)$$

On dit que  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$  au voisinage de  $+\infty$ .

*Remarque :* Cette notation n'est pas au programme, mais la comparaison des suites l'est.

⚠ Ce sont les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  que l'on compare et non les nombres  $u_n$  et  $v_n$ . Ainsi, ce n'est pas  $u_n$  qui est beaucoup plus petit que  $v_n$  (il faudrait savoir ce que veut dire « beaucoup »), mais c'est la suite  $(u_n)$  qui devient infiniment petite par rapport à la suite  $(v_n)$ .

**Explications**

Cette notation est celle de Vinogradov qui est privilégiée par les physiciens. Elle se comprend ainsi :

«  $u_n$  est aussi petit que l'on veut par rapport à  $v_n$  pour  $n$  suffisamment grand. »

En mathématiques, on lui préfère souvent la notation de Landau :  $u_n = o(v_n)$ . La notation de Landau est plus abstraite, mais elle offre davantage de possibilités lorsqu'on la maîtrise bien. Cette notation sera vue plus loin dans le chapitre d'analyse asymptotique.

**Théorème 4.2**

Soient  $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$  et  $a > 1$ .

Au *voisinage de*  $+\infty$ , on a les relations suivantes :

$$(\ln^\beta n) \ll (n^\alpha) \ll (a^n) \ll (n!)$$

**Se souvenir :** Les factorielles l'emportent sur les exponentielles qui l'emportent sur les puissances, qui l'emportent sur les logarithmes.

**Preuve**

★ Pour montrer que  $(\ln^\beta n) \ll (n^\alpha)$  on utilise les croissances comparées des fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0.$$

★ Pour montrer que  $(n^\alpha) \ll (a^n)$  on utilise aussi les croissances comparées des fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

★  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n > 0$ . On peut donc passer au quotient, qui est lui-même strictement positif.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$$

Pour  $n \geq n_0 = \lfloor 2a \rfloor$ , on a

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad 0 < u_{n_0+p} \leq \frac{1}{2^p} u_{n_0} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Donc par le théorème d'encadrement  $u_n \rightarrow 0$ . Ainsi  $(a^n) \ll (n!)$  ■

**Méthode** (*Suites puissances*)

Lorsque  $n$  est dans l'exposant, il faut en général repasser par la définition de la puissance avec l'exponentielle.

**Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , par  $u_n = \frac{2^n}{n!}$ .

**Solution :**

**Exemple**

Étudier la convergence de la suite définie pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , par  $u_n = \frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n^2}$

**Solution :**

**B Suites équivalentes**

Deux suites sont dites équivalentes si elles ont le même comportement à l'infini, c'est-à-dire si leur différence est négligeable par rapport à chacune (ce que nous verrons dans le théorème de caractérisation).

**Définition 4.3** (*Relation d'équivalence*)

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont dites **équivalentes**, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

On note alors  $u_n \sim v_n$

**Exemple**

**Soit**  $\lambda \neq 0$ , alors  $u_n \sim \lambda$  si et seulement si  $u_n$  converge vers  $\lambda$ .

**⚠** c'est **faux** si  $\lambda = 0$ .

Si  $u_n \sim \frac{1}{n}$ , alors  $u_n$  converge vers 0 « à la même vitesse » que la suite  $\frac{1}{n}$ .

Si  $u_n \sim n$ , alors  $u_n$  diverge vers  $+\infty$  « à la même vitesse » que la suite  $n$ .

**Définition 4.4**

Dans le cas où la suite  $(v_n)$  s'annule une infinité de fois, on remplace la définition précédente par

$$\exists (\alpha_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_n = \alpha_n v_n$$

**Théorème 4.5**

La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence :

- (*symétrie*) :  $u_n \sim v_n \iff v_n \sim u_n$
- (*réflexivité*) :  $u_n \sim u_n$  pour toute suite  $(u_n)$ .
- (*transitivité*) : si  $u_n \sim v_n$  et  $v_n \sim w_n$  alors  $u_n \sim w_n$ .

En supposant que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

**Preuve**

- $u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1 \iff \frac{v_n}{u_n} \rightarrow 0 \iff v_n \sim u_n$
- $\frac{u_n}{u_n} = 1 \rightarrow 1$
- $u_n \sim v_n \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$  et  $v_n \sim w_n \Rightarrow \frac{v_n}{w_n} \rightarrow 1$  ; donc par produit,  $\frac{u_n}{w_n} \rightarrow 1$ .  
Donc  $u_n \sim w_n$ .

**Théorème 4.6** (*Propriétés conservées par la relation d'équivalence*)

1. Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique : elles sont de même nature et si l'une admet une limite finie ou infinie, alors l'autre possède la même limite.

**Explications**

L'intérêt des équivalents est de se ramener à des suites plus simples ayant le même comportement asymptotique.

**Preuve**

1. Si  $u_n \sim v_n$ , alors il existe une suite  $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ , telle que  $u_n = a_n v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ .

En choisissant  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  par exemple, on montre qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0, a_n \geq \frac{1}{2} > 0$ .  
donc pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe.

2. Si  $(v_n)$  admet une limite, alors par produit des limites  $(u_n) = (a_n v_n)$  admet la même limite.

La relation étant symétrique, si  $(v_n)$  n'admet pas de limite, alors  $(u_n)$  n'en admet pas non plus (sinon, on reprendrait le raisonnement précédent à partir de  $(u_n)$  pour en déduire que  $(v_n)$  admet une limite).

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \in \mathbf{R}$ , alors par produit sur les limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n v_n = \ell$ , donc  $(u_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .

Si  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors par produit des limites  $u_n = a_n v_n$  diverge également vers  $+\infty$ .

**Théorème 4.7** (*Caractérisation des suites équivalentes*)

Soient deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ,  
 $u_n \sim v_n$  si et seulement si  $(u_n - v_n) \ll (v_n)$   
 si et seulement si  $(u_n - v_n) \ll (u_n)$

**Explications**

Cette caractérisation donne une interprétation quantitative à la proximité des deux suites. C'est elle qui justifie ce qui a été dit en début de partie : que la différence entre les deux suites est négligeable devant chacune d'elle.

**Preuve**

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff \exists (a_n) \text{ bornée, telle que, } \forall n \in \mathbf{N}, u_n = a_n v_n \\ &\iff \exists (\varepsilon_n) \text{ convergeant vers } 0, \text{ telle que, } \forall n \in \mathbf{N}, u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n \\ &\iff \exists (\varepsilon_n) \text{ convergeant vers } 0, \text{ telle que, } \forall n \in \mathbf{N}, u_n - v_n = \varepsilon_n v_n \\ &\iff (u_n - v_n) \ll (v_n) \end{aligned}$$

De même avec  $(u_n)$  par symétrie. ■

**Exemple**

Si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = n^3 + n^2$  et  $v_n = n^3$ , alors  $u_n \sim v_n$ . L'écart entre les deux suites diverge ( $n^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ), mais il reste négligeable par rapport aux suites elles-mêmes.

En revanche  $n^2 \not\sim 2n^2$  car l'écart entre les deux suites est du même ordre que les suites elles-mêmes.

$$n^\alpha \sim n^\beta \iff \alpha = \beta$$

**Propriété 4.8** (*Opérations sur les suites équivalentes*)

1. On peut multiplier les équivalents :

$$\text{si } u_n \sim v_n \text{ et } u'_n \sim v'_n \text{ alors, } u_n u'_n \sim v_n v'_n$$

$$\text{si } u_n \sim v_n \text{ et } \lambda \in \mathbf{R} \text{ alors, } \lambda u_n \sim \lambda v_n$$

$$\text{si } u_n \sim v_n \text{ et } \alpha \in \mathbf{R} \text{ alors, } u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$$

2. Si  $u_n \sim v_n$  alors leurs suites extraites sont aussi équivalentes.

3. On ne peut **pas additionner** des équivalents,

4. On ne peut **pas composer les équivalents avec une fonction**.

*Remarque :* Pour les puissances,  $\alpha$  est quelconque. En particulier les équivalents passent à l'inverse avec  $\alpha = -1$ .

**Preuve**

Pour le dernier point : contre-exemple avec la composition avec exponentielle pour les suites de terme général  $n$  et  $n + 1$ . ■

**Propriété 4.9**

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré :

$$\text{si } a_p \neq 0, \quad \sum_{k=0}^p a_k n^k \sim a_p n^p$$

Le théorème suivant liste les équivalents à connaître.

**Théorème 4.10** (*Équivalents usuels*)

Si  $u_n \rightarrow 0$ ,

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n \qquad \sin u_n \sim u_n$$

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n \qquad \cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

$$\sqrt{1 + u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2} \qquad \tan u_n \sim u_n$$

$$(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \qquad \arctan u_n \sim u_n$$

avec  $\alpha \neq 0$ .

⚠ Si  $(u_n)$  ne converge pas vers 0, alors ces équivalents sont faux.

**Preuve**

Sauf pour cosinus, ce sont des limites de taux d'accroissement.

Pour le cosinus, on écrit  $\cos^2 u_n - 1 = -\sin^2(u_n) \sim -u_n^2$ .

Or

$$\cos^2 u_n - 1 = (\cos u_n - 1)(\cos u_n + 1) \sim 2(\cos u_n - 1)$$

Ainsi par quotient

$$\cos u_n - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

■