Espaces vectoriels

"Sachez seulement qu'il n'y a pas que des nombres…
il y a aussi des grandeurs, des sommes, il y a des groupes, il y a des tas,
des tas de choses telles que les prunes, les wagons, les oies, les pépins…"
La Leçon, Ionesco

Certains résultats sont hors programme et ne peuvent être réutilisés sans démonstration dans une copie. Les principaux énoncés et concepts hors programme sont signalés par l'étoile $\star$.

1 $\star$ Un peu d'algèbre

Dans un ensemble, les éléments n'ont, a priori, aucun lien entre eux. Chacun n'existe que pour ses propriétés propres, indépendamment des autres.

Le but de ce chapitre est de *donner forme* à un ensemble en créant des liens entre ses éléments : nous les faisons interagir entre eux avec des opérations. Nous classons ces ensembles en fonction des opérations qui y sont définies et des propriétés élémentaires qui s'en dégagent : les groupes, les anneaux, les corps…

Cette démarche est assez abstraite, et permet donc d'obtenir des propriétés très générales sur ces ensembles.

Par exemple, on pourrait observer que l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, se comporte de façon très similaire aux entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

- On commence donc par analyser ce qui rapproche ces deux ensembles dans leur définition.
- Ensuite, on étudie tous les ensembles (connus ou non) qui vérifient ces propriétés et on démontre les théorèmes dans le cas général.
- On applique ensuite ces résultats à $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{Z}$ qui n'en sont plus que des cas particuliers.

Ainsi, plutôt que de démontrer chaque théorème deux fois : une fois pour $\mathbb{R}[X]$ et une autre fois $\mathbb{Z}$, on les démontre une seule fois, mais de façon plus abstraite et globale.

Il faut garder en mémoire que les opérations définies ici et leurs propriétés prennent appui sur des ensembles "naturels" (on n'a pas sorti ces opérations de nulle part, mais on a cherché à généraliser au maximum celles que l'on utilisait naturellement.)

On pourrait résumer l'algèbre à une vaste opération de nettoyage : on essaie de mettre les objets mathématiques dans des boîtes en fonction de leurs propriétés. On donne des noms à ces boîtes : groupes, algèbres, d'espaces vectoriels…Ainsi on démontre chaque théorème une seule fois pour la "boîte" et on peut ensuite l'utiliser sans efforts pour chaque élément particulier suivant cette structure. L'idée est de travailler un peu plus aujourd'hui pour…travailler moins plus tard.

L'algèbre *linéaire* qui sera étudiée de façon plus spécifique dans ce chapitre, consiste en l'étude d'une de ces "boîtes", la plus simple : la linéarité. C'est ce que vous appeliez proportionnalité au collège.

Notre ambition est très limitée : parmi toutes les fonctions qui existent, nous n'étudierons que les fonctions linéaires et nous oublierons toutes les autres ! Par contre, nous les étudierons dans le détail. De façon surprenante, on arrive à faire énormément de choses rien qu'avec cela.

A Opération interne

Définition 1.1 (Opération interne)

Soit E un ensemble, une opération interne $\star$ sur E est une application de E^2 dans E, c'est à dire telle que

$$\forall (x,y)\in E^2, \qquad x\star y\in E$$

L'opération est interne pour qu'elle ne nous fasse pas "*sortir*" de l'ensemble E. On travaille en milieu clos sans avoir à se poser à chaque fois la question "suis-je ou ne suis-je pas dans l'ensemble", *that is not the question.*

Définition 1.2 (Loi associative, loi commutative)
Une loi $\star$ sur E est dite associative sur E si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \qquad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$

Une loi $\star$ sur E est dite commutative sur E si

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad x \star y = y \star x$$

Exemple

L'addition est associative et commutative,
La division est associative, mais non commutative,
La soustraction n'est ni associative, ni commutative,
La multiplication (entre réels ou complexes) est associative et commutative,
La multiplication matricielle est associative, mais pas commutative.

Définition 1.3 (Élément neutre)
Une loi $\star$ définie sur E admet un **élément neutre**, s'il existe $e \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad x \star e = e \star x = x$$

e est appelé l'élément neutre.

Propriété 1.4 (Unicité de l'élément neutre)
Si l'élément neutre existe, alors il est unique

Preuve :

Si on suppose que e et e' sont des éléments neutres pour $\star$, alors $e = e \star e' = e'$. ■

Exemple

L'élément neutre pour l'addition sur $\mathbb{Z}$ est 0. L'élément neutre pour le produit est 1.

Définition 1.5 (Symétrique)
Soit $x \in E$, x possède un symétrique, s'il existe $y \in E$ (qui dépend de x) tel que $x \star y = y \star x = e$.
y est alors appelé le **symétrique** de x pour $\star$.

Le symétrique dépend de l'opération choisie. S'il y a plusieurs opérations définies sur l'ensemble, il faut savoir de laquelle on parle.

Exemple

Le symétrique d'un nombre entier pour l'addition est son opposé. -5 est le symétrique de 5 dans $\mathbb{Z}$ pour la loi $+$.
Sur $\mathbb{N}$ muni de l'addition, seul 0 admet un symétrique (c'est la raison pour laquelle on introduit $\mathbb{Z}$. On peut alors à la fois compter les bénéfices et les pertes). Sur $\mathbb{Q}^*$ muni de la multiplication, tous les éléments admettent un symétrique.

Propriété 1.6 :
S'il existe, le symétrique d'un élément est unique quand la loi est associative.
L'élément neutre admet toujours un symétrique qui est lui-même.

Preuve :

Supposons que x ait deux symétriques y et z.

Alors $z = z \star (x \star y) = (z \star x) \star y = e \star y = y$

■

Définition 1.7 :

Lorsque la loi $\star$ est une addition, le symétrique est appelé l'opposé.
Lorsque la loi $\star$ est une multiplication, le symétrique est appelé l'inverse.

B Groupes, anneaux, corps

Définition 1.8 (Propriétés sur les opérations et structure de l'ensemble)

Soit E un ensemble (non vide)
On définit une loi $+$ sur E telle que :

a) $+$ est une loi *interne* : $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y \in E$,

b) $+$ est *associative* : $\forall (x, x', y) \in E^3,\ (x + x') + y = x + (x' + y)$,

c) $+$ est *commutative* : $\forall (x, x') \in E^2,\ x + x' = x' + x$,

d) $+$ admet un élément neutre noté 0 : $\forall x \in E,\ x + 0 = x$,

e) tout élément de E admet un symétrique pour la loi $+$: $\forall x \in E, \exists x' = (-x) \in E,$ tel que $x + (-x) = 0$,
$(-x)$ est appelé l'**opposé** de x.

$\longrightarrow$ un tel ensemble $(E, +)$ est appelé un **groupe commutatif** (ou abélien).
On définit également une loi $\times$ sur E telle que :

a) $\times$ est une loi *interne* : $\forall (x, x') \in E^2,\ x \times x' \in E$,

b) $\times$ est *associative* : $\forall (x, x', y) \in E^3,\ (x \times x') \times y = x \times (x' \times y)$,

c) $\times$ est *commutative* : $\forall (x, x') \in E^2,\ x \times x' = x' \times x$,

d) $\times$ est distributive par rapport à $+$: $\forall (x, x', y) \in E^3,\ \left(x + x'\right) \times y = x \times y + x' \times y$.

e) $\times$ admet un élément neutre (souvent noté 1) : $\forall x \in E,\ x \times 1 = x$.

$\longrightarrow$ un tel ensemble $(E, +, \times)$ est appelé un **anneau commutatif**.

Si, de plus, tout élément de $E^* = E \setminus \{0\}$ admet un symétrique pour la loi $\times$:
$\forall x \in E, \exists x' \in E,$ tel que $x \times x' = 1$ (x' est appelé l'**inverse** de x et noté $\frac{1}{x}$)

$\longrightarrow$ alors $(E, +, \times)$ est un **corps** (commutatif).

Exemple

- $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car ses éléments non nuls n'admettent pas d'inverse.
- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
- $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau (commutatif).
- $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif).

- L'ensemble des applications bijectives, munies de la loi de composition forment un groupe.
- $\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \right\}_{k \in [\![0,n-1]\!]}$, muni du produit est un groupe.
- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.
- $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.
- L'ensemble des rotations de centre O, muni de la loi de composition est un groupe.

Exercice

On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est **intègre**, si

$$\forall (x, x'), x \times x' = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x' = 0$$

Par exemple, l'anneau des polynômes réels est intègre.
Montrez que tout anneau fini intègre est un corps.
On appelle anneau fini, un anneau qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

Solution :
Cela revient à montrer que tout élément non nul de l'anneau admet un inverse.
Soit $x \in A^*$, on considère $E = \left\{ x \times x', \text{pour } x' \in A \right\}$.
E est un sous-ensemble de A car $\times$ est une loi interne. Les éléments de E sont deux à deux distincts. En effet si $x \times x' = x \times x''$, alors $x \times x' - x \times x'' = 0$ (A est un groupe, donc les éléments admettent un symétrique).
Et par distributivité $x \times (x' - x'') = 0$.
Or l'anneau est intègre et $x \neq 0$, donc $x' - x'' = 0$, donc $x = x''$.
Ainsi E contient autant d'éléments que A et il est inclus dans A.
Donc $E = A$.
En particulier $1 \in E$, donc $\exists x' \in A$ tel que $x \times x' = 1$.
Donc x admet un inverse dans A.
Remarque : $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ n'est pas un corps, bien qu'il soit intègre, en effet, l'anneau n'est pas fini.

2 Structure d'espace vectoriel

Notations : Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (même si on pourrait travailler avec d'autres corps).

A L'espace vectoriel

Définition 2.1 (Espace vectoriel)
Un ensemble E muni des opérations $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

a) (loi interne $+$) $(E, +)$ est un groupe commutatif.

b) (loi externe $\cdot$)

- $\cdot$ est une loi de $\mathbb{K} \times E$ dans E.
- $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$
- (distributivité par rapport à l'addition de E) $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- (distributivité par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$) $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- (associativité mixte) $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu . x)$

Les éléments de $(E, +, \cdot)$ sont alors appelés **vecteurs**.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.
L'élément neutre 0_E de E s'appelle le **vecteur nul**.

Remarque : E est nécessairement non vide, car $0_E \in E$.

Attention : Dans la deuxième proposition pour l'application externe, le signe "+" a deux sens différents selon qu'il s'agit du "+" dans $\mathbb{K}$ ou du "+" dans E.

Exemple

- Le plan $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* du plan.
- L'espace $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il correspond à tous les *vecteurs* de l'espace.
- L'espace $\mathbb{R}^n$ des n-uplets sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n sur $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K}_n[X],+,\cdot)$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des applications d'un ensemble Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
- L'ensemble des suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour I un intervalle, l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$: $(\mathbb{R}^I,+,\cdot)$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (avec les opérations usuelles).
- Pour I un intervalle, l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$: $(\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des matrices, $(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec les opérations définies dans le chapitre sur les matrices).

Théorème 2.2 (Règles de calcul)
Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x \in E$ alors

a) $\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

b) Le symétrique de x, noté $-x$ est égal à $(-1).x$ (on l'appelle **opposé** de x)

Preuve :

a) (sens direct),
si $\lambda.x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$, alors on peut multiplier par $\frac{1}{\lambda}$. Donc $\left(\frac{1}{\lambda}\times\lambda\right).x = \frac{1}{\lambda}.0_E = 0_E$. Donc $x = 0_E$.
On a donc montré que si $\lambda.x = 0_E$, alors $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.
(sens réciproque)

- $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$,
si on note y, le symétrique de $0.x$, alors en ajoutant y de chaque côté on obtient: $0.x + y = 0.x + 0.x + y$
donc $0_E = 0.x$
- C'est la même idée : $\lambda.0_E = \lambda.(0.0_E) = (\lambda\times 0).0_E) = 0.0_E = 0_E$

b) $x + (-1).x = 1.x + (-1).x$ Donc $(-1).x$ est le symétrique de x, et par unicité du symtrique ($E,+$ est un groupe), on a
$= (1 + (-1)).x$
$= 0.x = 0_E$
$(-1).x = -x$.

■

Définition 2.3 (Combinaison linéaire)
On appelle **combinaison linéaire** de E toute somme finie de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

où $x_1, x_2, \cdots, x_n$ représentent un nombre **fini** de vecteurs et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont des scalaires.

Propriété 2.4 :

Un espace vectoriel est *stable* par combinaison linéaire.

Preuve :

Par récurrence sur le nombre d'éléments dans la somme.
Initialisation : pour $n = 0$, si la somme est vide, alors elle est nulle.
Or E contient le vecteur nul. L'initialisation est donc vraie.
Hérédité : on suppose le résultat vrai pour toute combinaison linéaire à n éléments et on le montre pour $n+1$ éléments.
Soient $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in E$.
De plus, $x_{n+1} \in E$ et $\lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$, donc par propriété sur le produit externe, $\lambda_{n+1} x_{n+1} \in E$.
Et la somme de deux éléments de E est un élément de E, donc $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \in E$.
Donc le résultat est vrai pour toute combinaison linéaire d'après le principe de récurrence. ■

B Sous-espaces vectoriels

Définition 2.5 (Sous-espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel inclus dans E.

Exemple

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
Une droite réelle passant par l'origine peut être considérée comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.6 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$,

F est un sous-espace vectoriel de E s'il vérifie l'**une** des propriétés équivalentes suivantes :

- il est stable par combinaison linéaire et contient le vecteur nul.
- $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in F^2, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda y \in F \end{cases}$
- $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in F^2, \quad x + y \in F \\ \forall x \in F, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x \in F \end{cases}$

Preuve :

L'équivalence des trois formulations est immédiate. Nous ne la prouvons donc pas ici. Par contre, nous montrons que la deuxième formulation (par exemple) permet bien de caractériser les sous-espaces vectoriels.

Tout d'abord, il est trivial, qu'un sous-espace vectoriel vérifie cette condition.
Réciproquement, supposons qu'un sous-ensemble F de E vérifie cette condition, et montrons que c'est un sous-espace vectoriel de E.

a) $+$ est une loi interne en prenant $\lambda = 1$

b) "+" est associative et commutative car E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

c) En prenant $\lambda = -1$, chaque élément admet un symétrique, en particulier $0_E \in F$, car F non vide.

d) La loi externe est à valeurs dans F (en prenant $x = 0_E$)

e) "." est distributive par rapport à "+" suivant la loi interne et la loi externe car E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

f) $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $1.x = x$ et $(\lambda \times \mu).x = \lambda.(\mu.x)$ car E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Donc F est un espace vectoriel. ■

Méthode :
Il est beaucoup plus rapide de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un autre plutôt que de vérifier les axiomes un à un. À chaque fois que l'on vous demandera de montrer qu'un ensemble $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel, cherchez à montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace connu.

Exemple

- Un plan passant par l'origine dans l'espace, une droite linéaire du plan...
- Les solutions d'une équation différentielle linéaire *homogène* du deuxième ordre munies de l'addition et de la multiplication usuelles forment un sous-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^2$.
- Les solutions d'un système linéaire **homogène** à n inconnues forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Exemple (Contre-exemples)

- Une droite affine du plan n'est pas un sous-espace vectoriel du plan. Elle ne contient pas $(0,0)$.
- Une demi-droite du plan n'est pas un sous-espace vectoriel du plan. Elle n'est pas stable par la multiplication par -1.

C Opérations ensemblistes sur les espaces vectoriels

Théorème 2.7 (Produit cartésien d'espaces vectoriels - notations simplifiées)
Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$, deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels.
On peut munir $E \times F$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel par

$$\begin{aligned} \forall (x,x') \in E^2 \quad \text{et} \quad \forall (y,y') \in F^2, &\qquad (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ \forall (x,y) \in E \times F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, &\qquad \lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) \end{aligned}$$

$(E \times F,+,.)$ est appelé l'**espace produit**.

Remarque : De façon plus générale, les espaces E et F n'ont pas forcément les mêmes lois. Et dans tous les cas, la loi sur l'espace produit, n'est pas la même que celle sur E ou F. En toute rigueur, il faut adopter une notation spécifique pour chaque loi :

Théorème 2.8 (Notations rigoureuses)
Soient $(E,\hat{+},\hat{\cdot})$ et $(F,\bar{+},\bar{\cdot})$, deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels.
On peut munir $E \times F$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel par

$$\begin{aligned} \forall (x,x') \in E^2 \quad \text{et} \quad \forall (y,y') \in F^2 (x,y)+(x',y') = (x \hat{+} x', y \bar{+} y') \\ \forall (x,y) \in E \times F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \lambda \cdot (x,y) = (\lambda \hat{\cdot} x, \lambda \bar{\cdot} y) \end{aligned}$$

$(E \times F,+,.)$ est l'**espace produit**.

Remarque : On peut généraliser au produit cartésien d'un nombre *fini* d'espaces vectoriels (mais on ne va pas l'écrire car les notations seront vite très lourdes).

Corollaire 2.9 :
L'ensemble des n-uplets sur $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K}^n, +, .)$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
avec

- "+" définie par $(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, .., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$
- "." définie par $\lambda.(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$

Exemple

En particulier pour montrer que $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \cdots, \mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels, il suffit de montrer que $\mathbb{R}$ en est un, ce qui est évident !

Théorème 2.10 (Intersection de deux espaces vectoriels)
Si F et G sont deux sous espaces vectoriels de E, alors $(F \cap G, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Preuve :

$F \cap G \subset F$, il suffit donc de montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F.

$0_E \in F \cap G$ (car $0_E \in F$ et $0_E \in G$: ce sont des espaces vectoriels),

$\forall x, y \in F \cap G, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$x, y \in F$, donc $x + \lambda y \in F$ car F est un espace vectoriel.
$x, y \in G$, donc $x + \lambda y \in G$ car G est un espace vectoriel.
Donc $x + \lambda y \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. ■

Exemple

L'intersection de deux plans vectoriels (non confondus) dans l'espace forme une droite vectorielle.

Théorème 2.11 (Intersection quelconque)
Une intersection quelconque d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Preuve :

C'est la même preuve que pour 2 espaces. ■

Attention : En général l'union de deux espaces vectoriels $E \cup F$ **n'est pas** un espace vectoriel.

Exemple

L'union de deux droites non confondues du plan n'est pas un espace vectoriel.

Explications :

Ce théorème sur l'intersection est **CAPITAL**.
De manière générale, lorsque l'on travaille sur des ensembles en algèbre : groupes, anneaux, corps... la structure "passe très bien" à l'intersection. Cela se comprend aisément : faire l'intersection de deux ensembles, c'est cumuler les conditions de chacun : si $x \in E \cap F$, alors x vérifie *à la fois* les conditions de E et celles de F. C'est une notion très restrictive : on trie les candidats sur le volet.
En revanche, la notion passe très mal à l'union. Parce que dans l'union, il suffit de ne vérifier que l'une *ou* l'autre des conditions d'appartenance : c'est beaucoup moins rigide.
Cette idée n'est pas spécifique aux espaces vectoriels : par exemple, l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle (éventuellement vide), par contre, l'union n'en est pas un (sauf cas particulier).

D Sous espaces vectoriels engendrés

Définition 2.12 (Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel, et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle sous espace vectoriel de E engendré par $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$, le sous espace vectoriel de E composé des combinaisons linéaires des x_i.
On note

$$\text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots \lambda_n x_n,\ \text{pour}\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

Remarque : On vérifie aisément que c'est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple

- Espace vectoriel engendré par un vecteur x : $\text{Vect}\,(x) = \mathbb{R}x$ est la droite vectorielle de vecteur directeur x.
- Espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires x, y :
  $\text{Vect}\,(x, y) = \mathbb{R}x + \mathbb{R}y = \left\{\lambda x + \mu y,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est le plan vectoriel engendré par ces deux vecteurs.
- $\text{Vect}\,(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

Définition 2.13 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)

Soit E un espace vectoriel, et $\mathscr{F}$ une partie de E.
On appelle sous espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$, le plus petit[a] sous espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{F}$.
On le note $\text{Vect}\,(\mathscr{F})$.

[a] Au sens de l'inclusion : tout sous espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{F}$, contient ce sous espace.

Propriété 2.14 (Caractérisation d'un sous espace vectoriel engendré par une partie)

Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{F} \in E$,
$\text{Vect}\,(\mathscr{F})$ est égal à l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathscr{F}$.

$$\text{Vect}\,(\mathscr{F}) = \bigcap_{F \in \mathscr{S}} F$$

avec $\mathscr{S}$ l'ensemble des sous espaces vectoriels de E qui contiennent $\mathscr{F}$.

Preuve :

Il faut démontrer que cette définition a un sens, c'est à dire qu'il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace vectoriel de E qui contient F.
Pour cela, il est plus simple de démontrer la caractérisation en même temps :
L'ensemble des sous-espace vectoriels qui contiennent F est non vide, car E en fait partie.
Leur intersection est également un sous-espace vectoriel de E (voir théorème 2.11) et il contient F.
S'il existe un sous-espace vectoriel de E qui contient F, alors, il fait partie de l'intersection, donc il est plus grand (au sens de l'inclusion) que l'intersection.
La définition et la caractérisation sont donc démontrées. ■

Théorème 2.15 :

Le sous espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est égal au sous espace vectoriel engendré par la partie $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

$$\text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{Vect}\,(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$$

En d'autres termes, l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires des x_i est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient tous les x_i.

Preuve :

Cette preuve est très simple, les difficultés viennent des notations qui sont proches et qu'il faut bien comprendre. Si vous comprenez et êtes capable de refaire cette preuve, c'est certainement que la notion d'espace vectoriel engendré est comprise, sinon...

Si F est un espace vectoriel qui contient les x_i, alors il contient toutes leur combinaisons linéaires (puisqu'il est stable par combinaisons linéaires).
Donc cet espace F contient $\text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$
Ainsi, $\text{Vect}\,(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$ qui contient tous les x_i, contient $\text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$:

$$\text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n) \subset \text{Vect}\,(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\})$$

Or $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \text{Vect}\,(x_1, \cdots, x_n)$ par définition, donc

$$\text{Vect}\,(\{x_1, \cdots, x_n\}) \subset \text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

(car $\text{Vect}\,(\{x_1, \cdots, x_n\})$ est inclus dans tout espace qui contient les x_i : c'est le plus petit)
Donc par double inclusion :

$$\text{Vect}\,(\{x_1, \cdots, x_n\}) = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

■

3 Familles finies de vecteurs

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

A Familles libres et liées

Définition 3.1 (Famille libre et famille liée)

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille est **liée**, s'il existe un vecteur qui peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
On dit que la famille est **libre** si elle n'est pas liée.

Définition 3.2 (Vecteurs linéairement indépendants)

Des vecteurs sont dits **linéairement indépendants**, s'ils forment une famille libre.

Théorème 3.3 (Caractérisation des familles liées et libres)

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une **famille liée**, s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une **famille libre**, si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Propriété 3.4 (Caractérisation des familles libres)

La famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille **libre** de E, si et seulement si tout vecteur de $\text{Vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'exprime de manière *unique* comme combinaison linéaire des x_i.

Explications :

Lorsqu'une famille est libre, cela donne une unicité de l'écriture en fonction des éléments : tout élément de Vect $((x_i)_{1\leq i\leq n})$ s'écrit de manière **unique** comme combinaison des x_i. (la démonstration est triviale, on suppose qu'il existe deux combinaisons et on montre qu'elles sont identiques).

Méthode :
Pour montrer qu'une famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est libre, on suppose n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$$

Et on montre qu'alors tous les λ_k sont nuls.

Exemple

Deux vecteurs sur une même droite sont liés.
Deux vecteurs non colinéaires du plan forment une famille libre. Par contre, trois vecteurs d'un plan forment une famille liée.

Exemple (Utilisation de l'écriture matricielle)

Montrez que les trois vecteurs $(2,5,8,0)$, $(0,9,-3,1)$ et $(0,0,-1,1)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Exemple

Montrez que les trois vecteurs $(1,2,3)$, $(3,1,2)$ et $(2,3,1)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3.5 (Caractérisation des familles libres de $\mathbb{R}^n$)
Une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre, si et seulement si, la matrice composée de ses vecteurs écrits en colonne possède autant de pivots que de colonnes.

Théorème 3.6 (Ajout d'un vecteur à une famille libre)
Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre de E et $y \in E$,
Alors la famille obtenue à partir de $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ complétée par y est libre si et seulement si

$$y \notin \text{Vect } (x_i)_{1\leq i\leq n}$$

Preuve :

(sens direct) par contraposée.
Si $y \in \text{Vect}\left(\{x_i\}_{0\leq i\leq n}\right)$, alors y s'écrit comme combinaison linéaire des (x_i), donc la nouvelle famille est liée.
(sens reciproque) par contraposée.
Si la famille obtenue est liée, alors on peut trouver des vecteurs (non tous nuls) tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} y = 0_E$
Si $\lambda_{n+1} = 0$, alors la famile des x_i serait liée, ce qui est contraire à l'énoncé. Donc en divisant par λ_{n+1}, on montre que $y \in \text{Vect}\left(\{x_i\}_{0\leq i\leq n}\right)$. ■

Exemple

Montrez que la famille $x \mapsto e^{ax}$ pour $a \in \mathbb{R}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Remarque : L'exemple dépasse un peu le cadre du cours car la famille n'est pas finie.

Propriété 3.7 (Famille extraite)

Toute famille extraite d'une famille libre est libre.

B Familles génératrices

Définition 3.8 (Famille génératrice)
La famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille **génératrice** de E, si

$$E = \text{Vect}\,(x_i)_{0\leq i\leq n}$$

Théorème 3.9 (Caractérisation)
La famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille **génératrice** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des x_i.

Exemple

Famille génératrice du plan

Exemple (Trouver une famille génératrice)

Soit F le sous espace de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \left\{\left(x+y+z, x-3y+4z, y-z, -x+2z\right), (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$.
Donnez une famille génératrice de F.
Solution :
Pour cela on réécrit le vecteur sous forme de somme à partir des paramètres x, y, z.

$$\begin{aligned}(t,u,v,w)\in F \iff \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } (t,u,v,w) &= (x+y+z, x-3y+4z, y-z, -x+2y)\\ &= x(1,1,0,-1)+y(1,-3,1,0)+z(1,4,-1,0)\end{aligned}$$

$$\text{Donc la famille } \quad \big((1,1,0,-1)\,,(1,-3,1,0)\,,(1,4,-1,0)\big) \quad \text{est génératrice de } F$$

On peut aussi montrer qu'elle est libre.

Propriété 3.10 (Famille complétée)
Tout famille génératrice complétée d'un ou plusieurs vecteurs est génératrice.

C Bases

Définition 3.11 (Base)
La famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une **base** de E, si elle est libre et génératrice

Théorème 3.12 (Caractérisation)
La famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une **base** de E, si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de façon *unique* comme une combinaison linéaire des x_i.
Les coefficients de la combinaison linéaire sont alors appelés les **coordonnées** du vecteur dans la base.

Exemple

- Coordonnées dans le plan.
- Base des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 3.13 :
Tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel admet (au moins) une base.

Preuve :

Admis ■

Exemple (Décomposer un vecteur dans une base de $\mathbb{R}^n$)

Décomposer le vecteur (x, y, z) dans la base de $\mathbb{R}^3$ composée des vecteurs $e_1 = (1,5,2)$, $e_2 = (0,2,-2)$ et $e_3 = (1,3,2)$.

4 Espaces vectoriels de dimension finie

A Dimension d'un espace vectoriel

Définition 4.1 :

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Exemple

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$...

Théorème 4.2 (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, on peut extraire une base de E.

Preuve :

Soit $\mathscr{G} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille génératrice de E.
Si la famille est libre, alors c'est une base de E.
Si la famille est liée, alors un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres :
par exemple $x_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k$.
Alors la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})$ est génératrice.
On réitère ce processus en enlevant 1 à 1 les éléments surabondants de la famille jusqu'à obtenir une famille libre.
Par construction cette famille est à la fois libre et génératrice : c'est donc une base.
(Le processus aboutit bien à un certain rang, car le nombre d'éléments dans la famille décroît strictement et une famille à un seul élément non nul est toujours libre.) ■

Corollaire 4.3 :

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base (finie).

Preuve :

Par définition, l'espace vectoriel admet une famille génératrice finie.
Donc par le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base.
Cela permet de prouver un cas particulier du théorème 3.13 ■

Attention : Cette base n'est pas unique

Exemple

bases de $\mathbb{R}^2$, base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Méthode (Extraire une base)

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$, alors on peut en extraire une base avec la méthode suivante :

a) on écrit la matrice composée des vecteurs $(x_1, \cdots, x_p)$ écrits sous forme de colonne.

b) on effectue la méthode du pivot, jusqu'à obtenir n pivots.
(pas besoin d'aller jusqu'à la forme échelonnée réduite)

c) on sélectionne les x_i, dont la colonne a donné un pivot.

Théorème 4.4 (Théorème de la base incomplète ⋆)

Toute famille libre peut-être complétée en une base de E.
Les vecteurs pour compléter la famille peuvent être choisis dans une famille génératrice finie quelconque.

Preuve :

Soit $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille libre de E.
On suppose que l'on possède une famille génératrice finie quelconque $\mathscr{G} = (y_1, y_2, \cdots, y_q)$ (existe car E est de dimension finie).

- Si tout élément de $\mathscr{G}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{F}$, alors $\mathscr{F}$ est génératrice.

  En effet, si $\forall i \in [\![1, q]\!], \exists (\lambda_{i,k})_{1\le k\le p}$ tels que $y_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{i,k} x_k$

  Comme $\mathscr{G}$ est génératrice, $\forall x \in E, \exists (\mu_i)_{1\le i\le q}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$,

  Alors $$x = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} \mu_i \lambda_{i,k} x_k$$

  $\mathscr{F}$ est génératrice, c'est donc une base.

- Sinon, il existe un élément de $\mathscr{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des x_i : par exemple y_1 (quitte à réordonner).
  Alors $(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1)$ est une famille libre.

On réitère le processus en ajoutant 1 à 1 les éléments de $\mathscr{G}$ jusqu'à obtenir une famille génératrice. Alors, par construction elle sera aussi libre. Ce sera donc une base.
(Le processus s'arrête nécessairement au plus tard quand tous les éléments de $\mathscr{G}$ ont été intégrés à $\mathscr{F}$). ■

Méthode :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous espace vectoriel de E.
Si $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ est une base de F, alors en particulier c'est une famille libre de E.
Donc on peut la compléter en une base $(e_1, e_2, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ de E.
Cette base donne en outre un supplémentaire de F dans E :

$$E = F \oplus \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$$

En particulier ce théorème démontre que **tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire**.

Théorème 4.5 (Lemme de Steinitz)

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Autre formulation : Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice finie de E et $\mathscr{F}$ une famille libre de E, alors

$$\operatorname{Card} \mathscr{F} \le \operatorname{Card} \mathscr{G}$$

Explications :

Ce théorème est assez intuitif. Il énonce simplement que si on peut exprimer $n+1$ vecteurs à partir de n vecteurs différentes, alors les $n+1$ vecteurs ne peuvent pas être indépendants.

Preuve (⋆⋆)

Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est trivial (deux vecteurs d'une même droite vectorielle sont colinéaires).

En effet, si x engendre E, et $(y_1, y_2) \in E^2$. Alors $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, tels que $\lambda_1 x = y_1$ et $\lambda_2 x = y_2$.
Si $y_1 = y_2 = 0$, c'est évident, sinon, par exemple $y_1 \neq 0$ donc $\lambda_1 \neq 0$, donc $y_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2} y_1$.

On suppose le résultat vrai au rang n, et on cherche à le montrer au rang $n+1$.
Soit $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ une famille à $n+2$ éléments et $\mathscr{G}(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ une famille génératrice à $n+1$ éléments.
On suppose par l'absurde que $\mathscr{F}$ est une famille libre. Par conséquent aucun de ses éléments n'est nul.
En particulier $x_{n+2} \neq 0$.
Tout élément de $\mathscr{F}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{G}$. C'est à dire

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \exists(\lambda_{i,1}, \lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n}) \text{ tel que } x_i = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i,k} y_k$$

Comme x_{n+2} est non nul, il existe un des coefficients $\lambda_{n+2,k}$ qui est non nul. Par exemple $\lambda_{n+2,n+1}$ (quitte à réordonner les éléments).
Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on pose

$$f_i = x_i - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ f_i &= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i,k} y_k - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i,k} y_k - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{n+2,k} y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\lambda_{i,k} - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} \lambda_{n+2,k} \right) y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{i,k} y_k
\end{aligned}$$

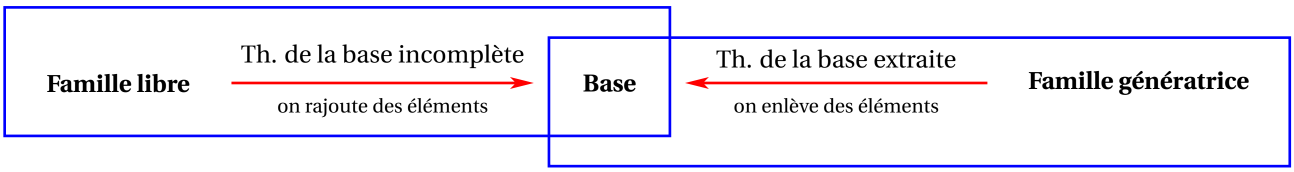
Et le coefficient de y_{n+1} dans la combinaison est nul : $\alpha_{i,n+1} = \lambda_{i,n+1} - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} \lambda_{n+2,n+1} = 0$.
Donc $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$ forme une famille à $n+1$ éléments du sous espace vectoriel $E' = \text{Vect}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$.
Or $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})$ est libre.

En effet, si $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i f_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \left(x_i - \frac{\lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2} \right) = 0$ ie $\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i x_i \right) - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \lambda_{i,n+1}}{\lambda_{n+2,n+1}} x_{n+2} = 0$
Comme la famille des x_i est libre, alors $\forall i \in [\![1; n+1]\!]$, $\mu_i = 0$. Donc la famille des f_i est aussi libre.

Par hypothèse de récurrence, toute famille à $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée : $(f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ est liée.
C'est absurde, donc $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+2})$ est liée.

Par principe de récurrence, le résultat est donc démontré pour tout $n \in \mathbb{N}$ ■

Pour se souvenir



Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Explications :

La base est un ensemble de vecteurs de E, à partir desquels, je peux exprimer tous les autres *de façon unique.*

- Le fait que je puisse exprimer tous les autres vecteurs à partir de ceux de la base traduit que la base est une famille génératrice.

- Le fait que cette expression soit unique, traduit que la base est une famille libre.

Intuitivement : Lorsque je possède une famille génératrice, si elle n'est pas libre, c'est qu'il y a une redondance d'information entre ces éléments. Je peux donc en supprimer certains tout en restant générateur. Lorsque je ne peux plus en supprimer, c'est que la famille est une base : elle est aussi libre.
De même, si une famille est libre, il me manque des informations pour pouvoir exprimer tous les vecteurs. Je peux donc compléter la famille pour obtenir une base.

Théorème 4.6 (Dimension)
Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments (lemme de Steinitz).
Ce nombre est appelé **la dimension** de l'espace.
Par convention, l'espace vectoriel nul : $\{0_E\}$ est de dimension 0.

Preuve :

Si E admet une base à n éléments. Cette base est une famille génératrice, donc toute famille libre de E admettra au plus n éléments.
Donc toutes les autres bases admettent au plus n éléments.
Si on suppose qu'il existe une autre base admettant strictement moins que n éléments, alors en échangeant les rôles, on voit que la première base qui contient n éléments ne peut pas être libre. C'est absurde. ■

Explications :

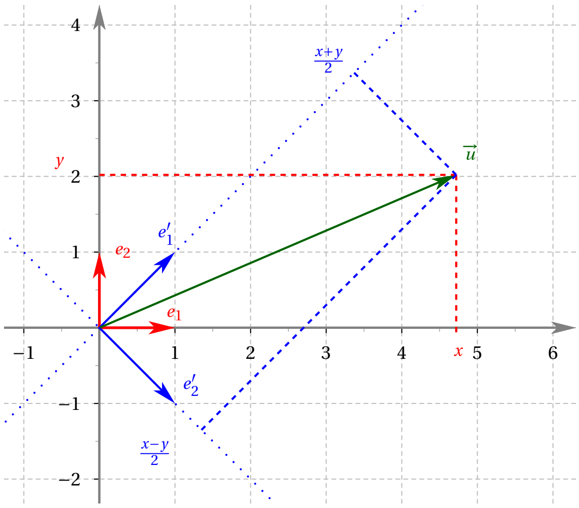
En dimension finie, la dimension d'un espace est le nombre d'éléments d'une de ses bases.
Cela correspond au nombre minimal d'informations qui faut donner pour décrire parfaitement les objets de l'espace. Ainsi, lorsque l'on vous demande la dimension d'un espace, posez-vous la question du nombre d'informations (minimales) qui vous sont nécessaires pour connaître chaque vecteur : c'est la dimension.
Chaque élément de la base correspond alors à une de ces informations.
Géométriquement, une base est un repère de l'espace.

Exemple

- L'espace nul est de dimension 0 : on n'a besoin d'aucune information pour connaître le vecteur dont on parle puisqu'il n'y en a qu'un seul possible. On est sûr qu'il s'agit du vecteur nul.
- La droite $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. En effet, pour savoir de quel vecteur on parle, il me faut connaître son abscisse : une information.
- Le plan $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Pour connaître un vecteur, il me faut au minimum deux informations. Par exemple l'abscisse et l'ordonnée. L'espace est de dimension 2, et pour construire une base, je prends deux vecteurs (e_1, e_2), tel que e_1 serve à donner l'abscisse : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, l'ordonnée.

  Un vecteur (x, y) du plan est alors décrit par $xe_1 + ye_2$.

  Je peux aussi choisir une autre base (cela revient à changer de repère). Par exemple, prendre $e_1' = (1,1)$ et $e_2 = (1,-1)$. Le vecteur (x, y) s'écrit dans cette base $(x, y) = \frac{x+y}{2}e_1' + \frac{x-y}{2}e_2'$



- Dans $\mathbb{R}^3$, il faut trois coordonnées : dimension 3.
- $\mathbb{C}$ est une droite vectorielle sur $\mathbb{C}$, par contre, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
- $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Il faut n informations pour connaître le n-uplet.

  Une base très simple (mais on peut en faire d'autres) est $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, avec e_i le n-uplet qui n'a que des zéros partout, sauf à la position i, où il y a 1.

  On appelle cette base, la base canonique.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n sur $\mathbb{R}$. Pour connaître un tel polynôme, il suffit donc de connaître ses $n+1$ premiers coefficients a_0, $a_1, \cdots, a_n$.

  Ainsi, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$ ⚠.

  La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $1, X, X^2, \cdots, X^n$.
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. En effet, il me suffit de connaître chacun des coefficients de la matrice pour la connaître complètement (et je ne peux me satisfaire de moins d'informations).
  Si on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne contient que des 0, sauf à la position i, j, où le coefficient vaut 1, alors cela forme une base (dite base canonique).

Méthode (Déterminer la dimension d'un espace)
En général, pour déterminer la dimension d'un espace, on lui trouve une base. Il faut alors montrer qu'elle est à la fois libre et génératrice.

Propriété 4.7 :
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie,

$$\dim(E\times F)=\dim E+\dim F$$

Preuve :

On note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E, et $(f_1, f_2, \ldots, f_q)$ une base de F.
Alors on pose pour $i \leq p, b_i = (e_i, 0_F)$ et pour $p+1 \leq i \leq p+q, b_i = (0_E, f_{q-i})$.
$(b_i)_{1\leq i\leq p+q}$ est une base de $E\times F$ ■

Propriété 4.8 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n,
Soit $\mathscr{F}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie.

$$\operatorname{Card}\mathscr{F}\leq n\leq \operatorname{Card}\mathscr{G}$$

Théorème 4.9 (Caractérisation des bases)
Si E est de dimension finie n, et $\mathscr{F}$ une famille de n **vecteurs** de E,
Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathscr{F}$ est une base,

b) $\mathscr{F}$ est génératrice,

c) $\mathscr{F}$ est libre.

Preuve :

- Si $\mathscr{F}$ est une base, alors elle est génératrice.
- Si $\mathscr{F}$ est génératrice. Si elle était liée, alors on pourrait lui enlever un vecteur et elle resterait génératrice. C'est absurde car alors il existerait une famille génératrice à $n-1$ éléments (qui est moins que le nombre d'éléments de la base qui forme une famille libre). Donc $\mathscr{F}$ est libre.
- Si $\mathscr{F}$ est libre. Alors elle peut être complétée en une base. Mais si on lui rajoute des vecteurs elles ne peut plus être libre (car elle aura plus d'éléments que la famille génératrice). C'est donc déjà une base.

■

Méthode (Montrer qu'une famille est une base)
Lorsque l'on travaille dans un espace E dont on connaît la dimension :n.
Pour montrer que $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base, il suffit de vérifier qu'elle est à le bon nombre de vecteurs, et de prouver qu'elle est **soit** libre, **soit** génératrice.
En général, le plus simple est de montrer qu'elle est **libre**.

Méthode (Montrer qu'une famille est génératrice)
Dans beaucoup d'exercice, on veut montrer qu'un certain type de vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire d'une famille d'autre vecteurs.

En général, cette famille formera une base de l'espace. Il suffit donc de montrer qu'elle a le bon nombre d'éléments et qu'elle est libre.

La propriété suivante indique l'intérêt essentiel de travailler avec des bases.

Propriété 4.10 (Coordonnées d'un vecteur dans une base)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E.
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme une combinaison des e_i.

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

C'est à dire que la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ décrit parfaitement x.

Attention : Si on change la base de E, alors les (λ_i) sont également changés.

B Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Les propriétés qui suivent ressemblent beaucoup à celles vues avec les ensembles finis. La différence est que l'on raisonne avec la dimension au lieu de compter le nombre d'éléments (en général les espaces vectoriels même de dimension finie sont infinis).

Comme la base permet de décrire parfaitement l'espace vectoriel, compter les éléments de la base revient intuitivement à compter les éléments de l'espace (au nombre d'éléments du corps près - certes infini dans ce chapitre).

Propriété 4.11 :

Si F est un sous-espace vectoriel de E, avec $\dim E = n$,
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

$$\dim E = \dim F \quad \Longleftrightarrow \quad E = F$$

Preuve :

Si $F = \{0_E\}$ c'est terminé,
Sinon, on considère l'ensemble X composé des familles libres d'éléments de F. X est un ensemble a priori infini, mais le nombre d'éléments de chaque famille libre est majoré par n (lemme de Steinitz).
Une famille libre de cardinal maximal sera une base de E (théorème de la base incomplète).
Donc la dimension de F est finie et $\dim F \leq \dim E$.
Cas d'égalité :
Si $\mathscr{F}$ est une base de F, c'est une famille libre de E et elle peut être complétée en une base de E (théorème de la base incomplète).
Or $\dim F = \dim E$, donc la famille est déjà une base de E. Donc $F = E$ ∎

Exemple

Une droite d'un plan ou de l'espace...

Méthode (Égalité de deux espaces vectoriels)

Pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont égaux, il suffit de montrer que $F \subset E$ et que $\dim F \geq \dim E$.

Définition 4.12 (Nature de sous-espaces particuliers)

Soit E un espace de dimension finie n et F un sous espace de E,

- Si $\dim F = 1$, alors F est une **droite vectorielle.**
- Si $\dim F = 2$, alors F est un **plan vectoriel.**
- Si $\dim F = n - 1$, alors F est un **hyperplan vectoriel.**

C Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4.13 (Rang d'une famille de vecteurs)

Le rang d'une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Méthode (Calcul du rang par le pivot)

Le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est égal au nombre de pivot de la matrice formée des vecteurs colonnes correspondants.

Exemple **(exercice type)**

Dans $\mathbb{R}^4$, on définit les vecteurs

$$v_1 = (1,2,1,0) \qquad v_2 = (-1,1,1,0) \qquad v_3 = (1,5,3,0)$$
$$v_4 = (3,3,1,0) \qquad v_5 = (0,1,0,1) \qquad v_6 = (-1,3,3,-1)$$

On note $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

a) Dire sans calculs si la famille $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ est libre.

b) Extraire de cette famille, une sous famille de rang maximal que l'on noter $\mathscr{E}$.

c) Quelle est la dimension de F ?

d) Completer $\mathscr{E}$ en une base de $\mathbb{R}^4$. On notera cette base $\mathscr{B}$.

e) Exprimer les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base $\mathscr{B}$.

Solution :

a) La famille contient 6 vecteurs dans un espace de dimension 4, elle est donc nécessairement liée (lemme de Steinitz).

b) Une sous famille libre de rang maximal sera une base de l'espace vectoriel engendré.
En effet, la famille est génératrice de F, mais elle est liée. On peut donc en extraire une base qui sera libre et génératrice (et aura autant d'éléments que la dimension de F). Ce sera une famille de rang maximal, car s'il existait une sous-famille libre de rang supérieure, alors cela contradirait le lemme de Steinitz dans F.
Pour trouver cette sous-famille, on effectue le pivot de Gauss sur les matrices colonne correspondants au vecteurs de la famille.
En effet, résoudre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5 + \lambda_6 v_6 = (0,0,0,0)$, cela revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les vecteurs $v_1, v_2, \cdots, v_6$ ont été écrit sous forme de matrices colonne et accolés.
Pour que la famille soit libre, il faut que le système n'ait qu'une seule solution : que ce soit un système de Cramer en ayant autant de pivots que d'inconnues.

On effectue donc la méthode du pivot de Gauss en opérant sur les lignes[1]

	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$ $L_3 \leftarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le système a trois pivots, il est de rang 3, F est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.
Pour obtenir une famille libre de cardinal maximal, on peut prendre les trois vecteurs qui donnent des pivots dans la matrice échelonnée : v_1, v_2, v_5.
En effet, si on considère la matrice qui n'est composée que des trois colonnes correspondantes, et que l'on effectue les même opérations que précédemment, on obtient les trois même pivots (lors des opérations sur les lignes, les colonnes ne sont pas "mélangées") et la famille est donc libre. C'est donc une base de F (qui est de dimension 3).
C'est une famille de cardinal maximal, car s'il y avait une famille libre avec plus d'éléments, alors son cardinal serait supérieur à la dimension de l'espace F ce qui n'est pas possible.

c) (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de F, donc de $\mathbb{R}^4$. On peut donc la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 3, il suffit de rajouter un quatrième vecteur qui n'appartient pas à F. Cela formera alors une famille libre à 4 éléments dans un espace de dimension 4 : c'est une base.
On cherche donc un vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ qui n'appartienne pas à F. Pour cela on reprend la matrice précédente (on ne garde que les colonnes des v_1, v_2 et v_5) et les même opérations sur les lignes que précédemment en ajoutant le second membre (x, y, z, t).

	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 3 & 1 & -2x+y \\ 0 & 2 & 0 & -x+z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$ $L_3 \leftarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z \\ 0 & 3 & 1 & -2x+y \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x-y+\frac{3}{2}z+t \end{pmatrix}$

[1] Il existe une méthode duale qui consiste à travailler sur les colonnes, mais dans le cadre de notre cours, nous avons préféré concentrer toutes nos manipulations sur les lignes des matrices correspondants.

Ainsi, le vecteur n'appartient pas à l'espace si et seulement si on a un pivot à la dernière colonne. On peut donc prendre le vecteur $v_7 = (0,0,0,1)$ par exemple.
Ainsi, mis, dans la matrice, cela donne 4 pivots : c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

d) Pour exprimer un vecteur (x,y,z,t) comme combinaison linéaire des éléments de la base $\mathscr{B}$, on cherche $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x,y,z,t) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_5 v_5 + \lambda_7 v_7$.
On a donc un nouveau système linéaire à résoudre, que l'on obtient directement avec les même calculs que précédemment :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x-y+\frac{3}{2}z+t \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x-y+\frac{3}{2}z+t \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour le premier vecteur de la base canonique $e_1 = (1,0,0,0)$, on prend $x = 1$, et $y = z = t = 0$.
On trouve donc $e_1 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_5 + \frac{1}{2}v_7$.
On peut écrire

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(e_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$