LIMITES ET CONTINUITÉ

COURS APPROFONDI

Qui franchit une ligne continue, risque de perdre l'adhérence.

Avertissement : Ce cours est plus développé que celui proposé en classe. Il permet aux étudiants qui le souhaitent d'aller un peu plus loin.
En particulier, certains résultats sont hors programme et ne peuvent être réutilisés sans démonstration dans une copie.
Les éléments et parties **hors programme** sont signalés par une étoile : $\star$.

Ce chapitre contient beaucoup de définitions abstraites, mais dans la pratique, il n'y a que quelques théorèmes d'usage courant. Et nous les avons déjà presque tous vus au premier semestre.

Notations : Dans ce chapitre I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, non réduits à un point.
f désigne une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 $\star$ VALEURS D'ADHÉRENCE ET VOISINAGES

Notions au programme

Pour une intervalle I donné, on notera $\overline{I}$ l'intervalle fermé correspondant.
Par exemple pour $I = [3,7[$, on a $\overline{I} = [3,7]$.

Lorsque l'intervalle I est de la forme $I =]-\infty, b]$, alors $\overline{I} =]-\infty, b] \cup \{-\infty\}$.
On procède de même lorsque l'intervalle n'est pas borné à droite.

$\overline{I}$ s'appelle **l'adhérence** de I ; lorsque $a \in \overline{I}$, on dit que a est **adhérent** à I.
Dans le cours l'expression **au voisinage de** a désigne un intervalle (ouvert) proche de a.
Par exemple $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est un voisinage de 0.
On étant la notion, avec $]n, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.

Toute la suite de cette partie sur les voisinages et valeurs d'adhérence est hors programme.

Définition 1.1 (Valeur d'adhérence)
Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$,
on dit que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de A si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

si $a = +\infty$, alors a est adhérent à A si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad]M, +\infty[\cap A \neq \emptyset$$

si $a = -\infty$, alors a est adhérent à A si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad]-\infty, M[\cap A \neq \emptyset$$

Explications :

a est tellement proche de A, que dès que l'on prend un intervalle ouvert qui le contient, aussi petit soit-il, il rencontre A.
En se référant au terme *adhérence*, on peut imaginer que a est adhérent à A, s'il lui est "collé".
S'il existait le moindre petit espace entre a et A, alors a ne serait pas adhérent à A. En effet, on pourrait alors noter $\varepsilon_0 > 0$ la longueur de cet espace et dans ce cas, $]a-\varepsilon_0; a+\varepsilon_0[\cap A = \emptyset$ ce qui montre bien que a ne serait pas adhérent.

Exemple

$+\infty$ est valeur d'adhérence de $[5;+\infty[$
$+\infty$ est valeur d'adhérence de $\mathbb{N}$.
La borne supérieure d'une partie majorée de $\mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de cette partie.

Propriété 1.2 :

Tous les éléments de A sont des valeurs d'adhérence de A.

Preuve :

$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ a \in]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\cap A$, donc $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.
Donc a est adhérent à A. ■

Définition 1.3 (Adhérence d'un ensemble)

On appelle **adhérence** d'un ensemble A et on note $\bar{A}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de A.

Attention : Il ne faut pas confondre avec le complémentaire d'un ensemble. Même si la notation est identique, ces deux notions n'ont rien à voir. Le contexte devra permettre de lever toute ambiguïté.

La propriété 1.2, peut donc s'écrire

$$A \subset \overline{A}$$

Exemple

Lorsque I est un intervalle ou une réunion d'intervalles, chercher l'adhérence revient à "fermer" le ou les intervalles.

$$\overline{]-7;3]} = [-7;3]$$

Notation :

L'adhérence de $\mathbb{R}$ est notée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que c'est *la droite réelle achevée*.

Exemple

$\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}}$

Propriété 1.4 (Caractérisation séquentielle des valeurs d'adhérence)

a est une valeur d'adhérence de A si et seulement si, il existe *une* suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

Preuve :

Sens direct, on construit la suite en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et u_n un élément de $]a-\varepsilon; A+\varepsilon[\cap A$ supposé non vide.
Sens réciproque, on désigne une telle suite par u_n.
Alors par définition de la limite de la suite, $]a-\varepsilon; A+\varepsilon[\cap A$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang, donc est non vide. ■

Dans ce chapitre, on utilisera de nombreuses **caractérisations séquentielles** :
Les suites sont un moyen de s'approcher infiniment d'un point adhérent au domaine. Cela revient à remplacer $\varepsilon > 0$ par $\frac{1}{n}$ (ou tout autre suite strictement positive qui tend vers 0) : on discrétise ε.

Définition 1.5 (Voisinage)

Pour un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$,
On dit qu'une propriété est vraie au voisinage d'un point $a \in \overline{A}$
s'il existe $\eta > 0$ tel que la propriété soit vraie sur $A \cap]a-\eta, a+\eta[$.
Dans le cas où $a = \pm\infty$, on remplace par un intervalle du type $]M;+\infty[$ ou $]-\infty;-M[$

Pour montrer qu'une proposition est vraie dans un voisinage, il suffit d'exhiber **un** intervalle ouvert contenant ce point et sur lequel elle est vraie.

Le fait d'imposer que l'intervalle soit ouvert, empêche que ce soit un singleton, car tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ admet au moins 2 points. En général A est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) et on peut alors montrer que $A\cap]a-\eta, a+\eta[$ contient un intervalle ouvert, et donc au moins deux points (donc une infinité).

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2$ est bornée au voisinage de chacun de ses points. Mais elle n'est pas bornée au voisinage de l'infini.
La fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas bornée au voisinage de 0.

2 Limites

Remarque : Les définitions avec ε énoncées dans cette partie seront très rarement utilisées en exercice (sauf pour des exercices assez théoriques).
En revanche, les **propriétés séquentielles** seront d'usage courant (voir les devoirs de début d'année avec les résolutions d'équations fonctionnelles).

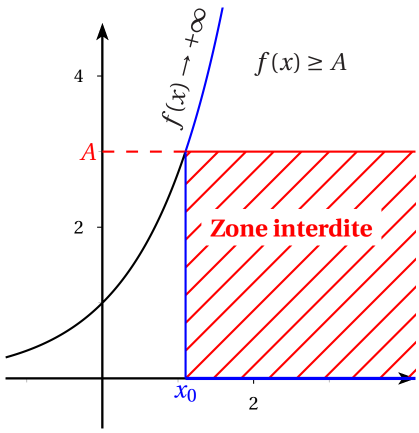
A Limites à l'infini

Définition 2.1 (Limite infinie à l'infini)

Soit f définie sur I, un intervalle non majoré,
On dit que f admet $+\infty$ comme limite finie en $+\infty$ si

$$\forall M>0,\ \exists A>0,\ \forall x\in I,\quad x\geq A \Rightarrow f(x)\geq M$$

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



Propriété 2.2 (Propriété séquentielle)

Soit f définie sur I non majoré, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Si $(u_n)\in I^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $\big(f(u_n)\big)$ tend vers $+\infty$

Remarque : ($\star$) Il existe aussi une réciproque :

Si, pour **toute** suite $(u_n)\in I^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, $\big(f(u_n)\big)$ tend vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

La propriété séquentielle et sa réciproque forment “la caractérisation séquentielle” de la limite infinie : cela peut être considéré comme une définition alternative.

Pour utiliser cette réciproque, il ne suffit pas de montrer que c'est vrai pour une seule suite, mais pour *toutes* les suites. Cela rend cette réciproque difficile à utiliser sauf dans le cadre d'exercices “théoriques”.

Méthode (Utilisation de la propriété séquentielle)

En général, on utilise la propriété séquentielle :

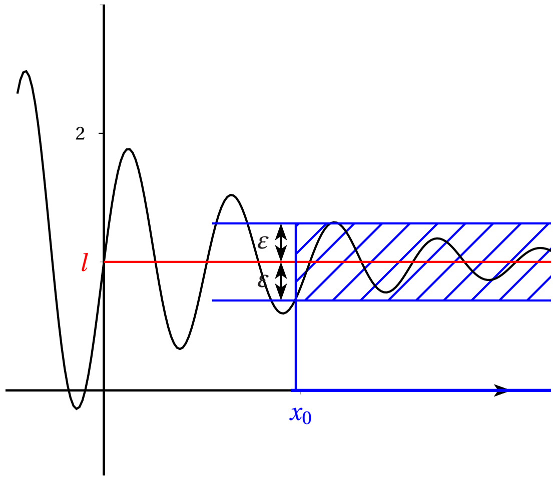
- soit pour montrer qu'une suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers $+\infty$:
  on sait que f tend vers $+\infty$, alors si $u_n \to +\infty$, $\big(f(u_n)\big) \to +\infty$
- soit avec la contraposée pour montrer qu'une fonction f ne tend pas vers $+\infty$:
  on trouve une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ telle que $\big(f(u_n)\big) \not\to +\infty$.

Définition 2.3 (Limite finie à l'infini)

Soit f définie sur I un intervalle non majoré,
On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



Propriété 2.4 (Propriété séquentielle)

Soit f définie sur I non majoré, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
Si $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ

Remarque : On peut rédiger une réciproque comme pour la limite infinie.

Exercice

Énoncez les autres définitions en $\pm\infty$ et leurs propriétés séquentielles.

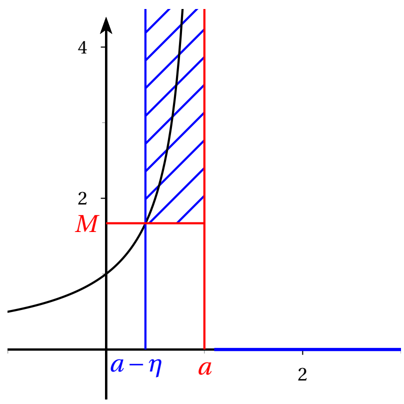
B Limites en un point

Définition 2.5 :

Soit $a \in \overline{I}$, $a \notin I$. On dit que f admet $+\infty$ comme limite en a si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



Propriété 2.6 (Propriété séquentielle)

Soit $a \in \overline{I}, a \notin I$, tel que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
Si $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tend vers a alors $\big(f(u_n)\big)$ tend vers $+\infty$

⋆ On peut énoncer la propriété avec la réciproque pour obtenir la caractérisation séquentielle (hors programme)

Caractérisation séquentielle :
Soit $a \in \overline{I}$, et $a \notin I$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour *toute* suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers $+\infty$

On définit de même pour $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple

Montrez que $x \mapsto \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$ n'admet ni $+\infty$, ni $-\infty$ comme limite en 0.

Définition 2.7 (Limite en un point)

Soit f définie sur I, et $a \in \overline{I}$, a fini.
On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Propriété 2.8 (Unicité de la limite)

La limite d'une fonction en un point est unique.

Preuve :

C'est la même preuve que celle de l'unicité de la limite pour les suites :
On suppose qu'il y a deux limites distinctes : ℓ et ℓ' et on considère $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3}$.
Alors les valeurs de $f(x)$ ne peuvent être à la fois proche de ℓ et de ℓ' à ε près. ■

Propriété 2.9 (Propriété séquentielle de la limite)

Soit f définie sur I et $a \in \overline{I}$, telle que f admette ℓ pour limite en a,
Si $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

⋆ **Caractérisation séquentielle :**
Soit f définie sur I, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Preuve :

propriété séquentielle : Soit $\varepsilon > 0$, alors, par hypothèse, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x-\eta| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - a| \leq \eta$.
Donc pour $n \geq n_0$ $|f(u_n)-\ell| \leq \varepsilon$. Donc la limite de $\big(f(u_n)\big)$ est bien ℓ.
⋆ Réciproque pour démontrer la caractérisation séquentielle : par contraposée, je suppose que f n'admette pas ℓ pour limite.
Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta = \frac{1}{n} > 0, \exists x_n \in I$ tel que $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n)-a| > \varepsilon$.
On a construit une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a et telle que $\big(f(x_n)\big)$ ne converge par vers ℓ ■

Méthode :
Pour montrer que f n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne convergent pas vers la même limite.

Exemple

Montrez que $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0.
Solution :
La suite définie par $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ converge vers 0 et $f(u_n)$ est constante à 0.
Si je prends la suite $v_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$ alors la suite $\big(f(v_n)\big)_n$ est constante égale à 1.
Donc f n'admet pas de limite en 0.

En utilisant les notions (hors programme) d'adhérence et de voisinage, on peut résumer toutes les définitions précédentes en une seule

Définition 2.10 (hors programme)

f est définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. $a \in \overline{I}$ (éventuellement infini) et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f admet ℓ pour limite en a, si, pour tout voisinage de ℓ $\mathcal{V}_\ell$, il existe un voisinage de a : $\mathcal{V}_a$ tel que

$$x \in \mathcal{V}_a \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathcal{V}_\ell$$

Cette définition est plus abstraite que celle avec les quantificateurs, et ne les remplace pas pour vous. Cela permet néanmoins de voir comment on peut définir des objets un peu plus abstraits et généraux pour trouver des définitions plus globales (sans avoir à traiter tous les cas un par un comme nous n'avons fait plus haut).

3 Continuité

A Continuité en un point

Définition 3.1 (Continuité en un point)

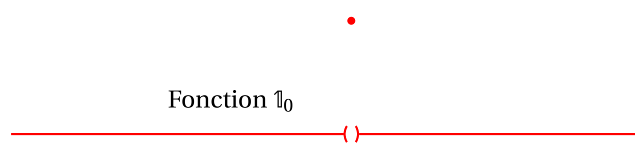
Soit f une fonction définie sur I, et $a \in I$ (pas l'adhérence).
On dit que f est continue en a si et seulement si $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$
C'est-à-dire si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Explications :

C'est exactement la définition de la limite, mais on impose que le point appartienne à I et non à l'adhérence. Une fonction qui est continue en a est simplement une fonction dont on peut "prévoir" la valeur $f(a)$ quand on s'approche infiniment de a. Cela suppose qu'il n'y ait aucun "saut" en arrivant sur a. C'est l'idée que l'on vous avait donné en terminale selon laquelle, on n'a pas besoin de lever le crayon.

Exemple



La fonction $\mathbb{1}_0$ est continue en tout point sauf en 0.

Propriété 3.2 **(Propriété séquentielle de la continuité)**

Soit f continue en $a \in I$,
Si $(u_n) \in I^N$ tend vers a, alors $\left(f(u_n)\right)_n$ tend vers $f(a)$

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

⋆ **Caractérisation séquentielle :**

f continue en $a \in I$ si et seulement si pour *toute* suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, $\left(f(u_n)\right)_n$ converge vers $f(a)$.

Preuve :

C'est la même preuve que pour la limite. ■

En pratique, cette propriété séquentielle veut dire que l'on peut "entrer" et "sortir" la limite d'une fonction continue.

Exemple

$\mathrm{e}^{\frac{n^2-3n+1}{2n^2-1}}$ tend vers $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ par continuité de l'exponentielle en $\frac{1}{2}$.
Par contre, la suite $\left(\left\lfloor -\frac{1}{n}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers $\lfloor 0\rfloor = 0$, mais vers -1 (la suite est constante égale à -1). Cela montre que la fonction $x \mapsto \lfloor x\rfloor$ n'est pas continue en 0.

Définition 3.3 **(Continuité sur un intervalle)**

Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Explications (⋆ **Notion locale, locale partout, globale)**

La notion de continuité reste locale. C'est en chaque point que la fonction est continue, et indépendamment de ce qui se passe ailleurs.
Parler de continuité nécessite des œillères : on est tellement myope que l'on ne peut voir les choses que localement, à proximité immédiate du point considéré.
La continuité sur un intervalle est donc une notion de type "local partout". Elle ne doit pas être confondue avec une notion globale qui elle dépend de toute la fonction "d'un coup", avec une forme de solidarité entre les différents points de notre fonction.
Par exemple, le caractère borné d'une fonction est une notion globale : elle dépend de tous les points à la fois.

Lorsque la fonction admet une limite finie en un point (**sans être définie en ce point**), on peut la prolonger par continuité par sa limite. Cela revient à dire que notre crayon va *jusqu'au point* au lieu de s'en approcher infiniment sans l'atteindre. On rajoute le point qui prolonge *naturellement* la fonction.

Propriété 3.4 **(Prolongement par continuité)**

- Si f est définie et continue sur I et a un point adhérent à I mais qui n'appartient pas à I.
- Si la limite $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ existe (et est finie).

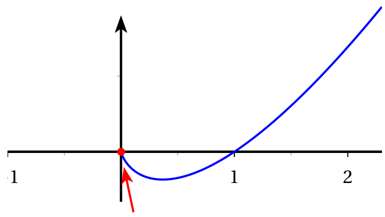
Alors on peut prolonger f par continuité en une fonction $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f}(a) = \ell$.

Attention : Bien sûr, $a \notin I$: la fonction ne doit pas avoir été déjà définie en a car on ne peut pas définir deux images à un point.

Remarque : On peut définir d'autres prolongements que celui par continuité.

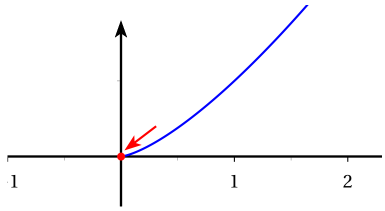
Exemple

La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0,
mais elle peut être prolongée par continuité par la valeur $f(0) = 0$.



Exemple

Pour $\alpha > 0$, les fonctions $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ ne sont pas définies 0, mais peuvent être prolongées par continuité par la valeur $f_\alpha(0) = 0$.



4 Limite et continuité à gauche ou à droite

Attention : Les notions présentées sont difficiles lorsqu'on les écrit avec des quantificateurs. Il est donc primordiale d'avoir en tête des exemples avec des graphiques pour comprendre et être capable de retrouver les définitions quantifiées.

Définition 4.1 **(Limite finie à gauche)**

Soit $a \in \overline{I}$, un réel fini.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ à gauche de a, si

a) $\forall \eta > 0, [a - \eta; a[\cap I \neq \emptyset$

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in [a - \eta; a[\cap I, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

On note habituellement

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$$

On définit de la même façon la limite à droite de a.

Attention : a est exclu des valeurs possibles pour x, même si f est définie en a.
L'intervalle est ouvert en a : la valeur de la limite peut être différente de la valeur de $f(a)$.

Intuitivement, la limite à gauche de a consiste à s'approcher infiniment de a sans jamais l'atteindre. Cela suppose évidement que la fonction soit définie sur un voisinage à gauche de a, c'est la raison de la première condition de la définition.

Exemple **(Différence entre limite et limite à gauche)**

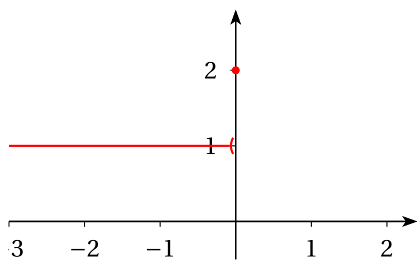
On pourrait noter la limite à gauche $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$, et la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \leq a}} f(x)$.

- Si f est définie sur $]-\infty, a[$ (ouvert en a), alors la définition de la limite de f en a et celle de la limite à gauche en a coïncident.
  En effet, l'inégalité stricte et l'inégalité large reviennent au même car $a \notin I$.
- Par contre, si f est définie sur $]-\infty, a]$ (fermé en a), alors les définitions sont différentes.

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f admet une limite à gauche de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$.

Par contre, f n'admet pas de limite en 0 (car il y a un "saut").



Définition 4.2 **(Limite à droite)**

Soit $a \in \overline{I}$.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ à droite de a, si

a) $]a; a+\eta] \cap I \neq \emptyset$

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in]a; a+\eta] \cap I, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

On note habituellement

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \ell$$

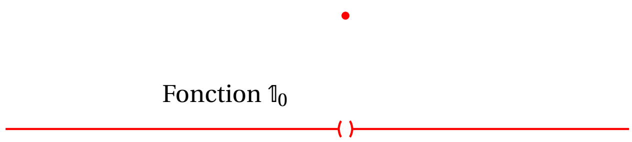
Propriété 4.3 :

Soit $a \in \overline{I}$ tel que f soit définie au voisinage de a à gauche et à droite.
Si f admet une limite finie en a alors f admet une limite finie à gauche et à droite en a et ces limites sont égales.

Attention : La réciproque est vraie si $a \notin I$, mais elle est fausse si $a \in I$.
En effet, il existe des fonctions qui admettent des limites à gauches et à droite de a sans admettre de limite en $a \in I$ (c'est à dire sans être continues en a) : il ne suffit pas que de montrer que les limites à gauche et à droite existent et sont égales pour justifier de la continuité.

Exemple

La fonction $\mathbb{1}_0$.
$\lim\limits_{x\to 0^-} \mathbb{1}_0(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathbb{1}_0(x) = 0$
mais $f(0) = 1$.



Propriété 4.4 :

Soit $a \in I$, tel que $\exists \varepsilon > 0,\ [a-\varepsilon; a+\varepsilon] \subset I$.
f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Définition 4.5 **(Continuité à gauche)**

Soit $a \in I$.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue à gauche de a si

a) $\forall \varepsilon > 0,\ ]a-\eta; a[\cap I \neq \emptyset$

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in [a-\eta; a] \cap I,\ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Formulation équivalente : f est continue à gauche de a si f admet une limite à gauche en a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Remarque : Ici, contrairement à la limite à gauche, a fait partie de l'intervalle dans la définition : l'intervalle est fermé en a. La notion de continuité n'a de sens que lorsque a fait partie de l'intervalle de définition : il faut atteindre le point.

Définition 4.6 **(Continuité à droite)**

Soit $a \in I$.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue à droite de a si

a) $I \cap]a; a+\eta[\neq \emptyset$

b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ tel que $\forall x \in [a; a+\eta] \cap I,\ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Formulation équivalente : f est continue à droite de a si f admet une limite à droite en a et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Propriété 4.7 :

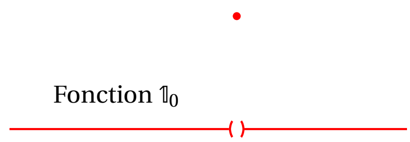
Soit $a \in I$, tel que $\exists \varepsilon > 0,\ ]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset I$.
f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Explications :

C'est un énoncé très proche de celui de la propriété 4.4. La seule différence est que la notion de continuité à gauche ou à droite contient déjà l'idée que la limite est égale à la valeur au point. La formulation de la propriété s'en trouve donc allégée.

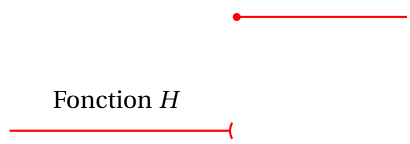
Exemple

La fonction $\mathbb{1}_0$.
$\lim\limits_{x \to 0^-} \mathbb{1}_0(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \mathbb{1}_0(x) = 0$
par contre la fonction n'admet pas de limite en 0.
La fonction n'est continue, ni à gauche, ni à droite de 0.



Exemple

La fonction de Heavside : $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.
$\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = 1$
$H(0) = 0$
La fonction n'admet pas de limite en 0.
La fonction est continue à droite en 0, mais n'est pas continue à gauche (et n'est pas continue en 0).



Explications :

Pour reprendre l'image donnée au lycée : quand je trace une fonction continue à gauche de a, je n'ai pas besoin de lever mon crayon pour arriver sur $f(a)$ depuis la gauche. Il suffit que le crayon suive la trajectoire donnée par la limite jusqu'au point.
Avec les exemples précédents :
Pour la fonction $\mathbb{1}_0$: que je m'approche par la gauche, ou par la droite, je suis dans tous les cas obligé de faire un saut pour rejoindre le point $\mathbb{1}_0(0) = 1$. La fonction n'est donc continue, ni à gauche, ni à droite, et n'est donc pas continue en 0.
En revanche, la fonction admet une limite à gauche, car je peux m'approcher infiniment de $x = 0$ en suivant la courbe et sans lever le crayon tant que $x < 0$. De même à droite.
Pour la fonction de Heavside : la situation à gauche est identique à celle de $\mathbb{1}_0$. Par contre H est continue à droite. En effet, je peux atteindre le point $H(0)$ en suivant la courbe et sans lever le crayon depuis la droite.

5 Propriétés sur les limites

On arrive sur les théorèmes "importants"

A Opérations sur les limites

Théorème 5.1 :
Les opérations sur les limites vues avec les suites sont valables pour les applications (multiplication, quotient, combinaison linéaire).
En particulier si $f, g \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$, telle que g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$

Corollaire 5.2 :
$\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ est stable par somme, produit, et multiplication par un réel.

Théorème 5.3 (Composition des limites)
Soit u définie sur I, à valeurs dans J, et f définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.

- si $\lim_{x \to a} u(x) = b$, alors $b \in \overline{J}$
- et si de plus $\lim_{u \to b} f(u) = \ell$,

Alors
$$\lim_{x \to a} f(u(x)) = \ell$$

Preuve :
$b \in \overline{J}$ en exercice (par l'absurde).
Pour la deuxième partie de la preuve, l'idée est qu'il faut partir de l'arrivée et remonter la composition.
Soit $\varepsilon > 0$,
Alors comme $\lim_{u \to b} f(u) = \ell$,
$$\exists \eta > 0, \forall u \in J, |u - b| \leq \eta \Rightarrow |f(u) - \ell| \leq \varepsilon$$
Or $\lim_{x \to a} u(x) = b$, donc
$$\exists \eta_2 > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \Rightarrow |u(x) - b| \leq \eta$$
Donc en remontant :
$$\forall x \in I, |x - a| \leq \eta_2 \Rightarrow |u(x) - b| \leq \eta \Rightarrow |f(u(x)) - \ell| \leq \varepsilon$$
■

Corollaire 5.4 :
Si $f \in \mathscr{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathscr{C}^0(J, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$

Théorème 5.5 (Fonctions usuelles)
Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition

B Limites et relations d'ordre

Les preuves de cette parties sont similaires à leur homologues sur les suites. Essayer de faire ces preuves est un bon exercice pour voir si on a compris celles avec les suites (dépasse le niveau d'exigence requis en BCPST).

Propriété 5.6 :
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

a) Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

b) Si f admet une limite finie non nulle en a alors f est du même signe que sa limite au voisinage de a.

Preuve :

Exercice ■

Théorème 5.7 (Stabilité des inégalités larges)

Soient f, g deux applications définies sur I et $a \in \overline{I}$. On suppose que $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$.
Si f et g admettent des limites en a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Explications :

On dit que "les inégalités **larges** passent aux limites".
Si au départ on a $f(x) < g(x)$, on a quand même des inégalités larges sur les limites.
Pour I, il suffit de choisir un voisinage de a, on n'est pas obligé de prendre l'intervalle sur lequel sont définies les fonction en entier.

Preuve :

Par l'absurde. Si la limite de f est strictement supérieure à celle de g, alors on pose $\varepsilon = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) > 0$. Et on aboutit à une contradiction dès que l'on s'approche à η près de a (en choisissant bien η) ■

Corollaire 5.8 (Théorème d'encadrement ou des gendarmes)

Soient φ, ψ, f trois fonctions définies sur I, et $a \in \overline{I}$. On suppose que

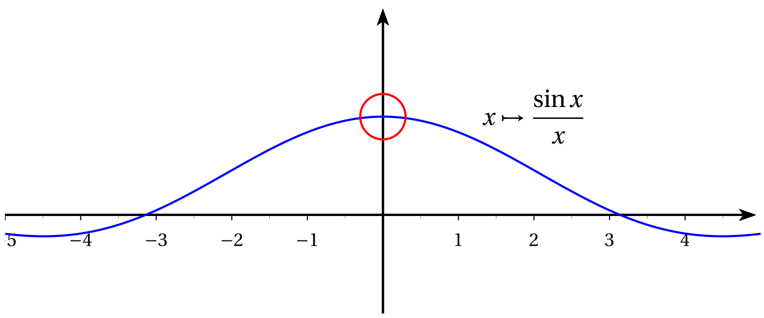
- $\forall x \in I, \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$,
- φ et ψ admettent une limite finie commune ℓ en a,

Alors f admet une limite en a et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Exemple

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ en encadrant $x - \frac{x^2}{2} \leq \sin(x) \leq x$.



Corollaire 5.9 **(Théorème de majoration/minoration)**

Soient φ, f deux fonctions définies sur I, et $a \in \overline{I}$. On suppose que

- $\forall x \in I, \varphi(x) \leq f(x)$,
- $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = +\infty$

Alors f admet une limite en a et

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On a une propriété similaire pour $-\infty$ en remplaçant la minoration par une majoration.

Théorème 5.10 **(Théorème de la limite monotone – simplifié)**

Soit $I =]\alpha; \beta[$ un intervalle **ouvert**, et f une fonction **croissante** sur I.
f admet une limite en α et une limite en β (éventuellement infinies)

Théorème 5.11 **($\star$ Théorème de la limite monotone – complet)**

Soit $I =]\alpha; \beta[$ un intervalle **ouvert**, et f une fonction **croissante** sur I.
Alors

a) f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de I

b) $\forall a \in I, \quad \lim\limits_{x \to a-} f(x) \leq f(a) \leq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$

c) Si $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \ell$ alors f est continue en a et $f(a) = \ell$

Et f admet une limite en α : $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \inf\limits_{x \in I} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
Et f admet une limite en β : $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = \sup\limits_{x \in I} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Preuve :

Il suffit d'adapter le théorème de la limite monotone vu pour les suites. On considère $J = I \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$ car I ouvert. Donc $f(J)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Comme f est croissante, elle est majorée par $f(a)$. Elle admet donc une borne supérieure.
Il suffit ensuite de montrer avec les quantificateurs que cette borne est la limite (c'est le plus petit des majorants).
On fait de même à droite et aux bornes de l'intervalle (mais ici ce n'est pas majoré ou minoré). ■

Remarque : On a un énoncé analogue pour f décroissante, il suffit de prendre $-f$ croissante pour le démontrer.

6 Fonctions continues sur un intervalle

Les deux théorèmes qui suivent sont FONDAMENTAUX

Théorème 6.1 **(Théorème des valeurs intermédiaires)**

Si f est continue sur un intervalle I contenant $[a, b]$, alors f prend toutes les valeurs situées entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autre formulation : L'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Corollaire 6.2 **(Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires)**

Si f est continue sur un intervalle I telle qu'il existe $(a, b) \in I$, avec $f(a)f(b) \leq 0$ (de signes contraire).
Alors f s'annule entre a et b.

Preuve :

On suppose f continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. On cherche à démontrer que $f(I)$ est également un intervalle.
C'est-à-dire que si $y_1 < y_2$ dans $f(I)$, et $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$.
(Lorsque l'on a deux points quelconques de l'image, tous les points situés entre eux sont également dans l'image).

$y_1 \in f(I)$ donc $\exists a \in I$ tel que $f(a) = y_1$. De même $\exists b \in I$ tel que $f(b) = y_2$. On suppose par exemple que $a < b$ (ne nuit pas à la généralité de la preuve).
Alors on cherche $c \in I$ tel que $f(c) = y$.
Preuve 1 (constructive) :
On crée deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0 = a$ et$b_0 = b$. Pour construire les autres termes, on pose à chaque fois $\frac{a_n+b_n}{2} = a_{n+1}$ si son image par f est inférieure à y et b_{n+1} sinon.
La suite (a_n) est croissante, et la suite (b_n) est décroissante. De plus leur différence tend vers 0 par construction (la distance est inférieure à $\frac{|b-a|}{2^n}$. Donc elles sont adjacente.
D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent toutes les deux vers $c \in [a, b]$.
Par continuité de f, puis passage des inégalités à la limites, on a $f(c) = f(\lim_{n\to+\infty} a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq y$.
De même avec (b_n), $f(c) \geq y$,
Donc $f(c) = y$
Preuve 2 (plus abstraite) :
On note

$$A = \left\{x \in I | f(x) \leq y\right\}$$

A est un ensemble non vide de I (car $a \in A$) et il est majoré (par b). Il admet donc une borne supérieure que l'on note c.
f étant continue sur I, on a $f(c) \leq y$ (il suffit de créer une suite d'éléments de I qui convergent vers c avec la caractérisation de la borne supérieure, puis d'utiliser le passage à la limite des inégalités).

a) si $c = b$ alors $f(c) \geq y$ donc par double inégalité, $f(c) = y$

b) sinon, $c < b$, alors $]c, b]$ et tous les éléments de cet intervalle vérifient $f(x) \geq y$. Donc par passage à la limite, $f(c) \geq y$. D'où le résultat voulu.

■

Théorème 6.3 (Théorème des bornes atteintes)
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum.
Autre formulation : L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Preuve :

⋆ (preuve hors programme)
La preuve se base sur le théorème de Bolzano-Weierstrass (hors programme) : Toute suite bornée admet une suite extraite qui converge.

> Une suite extraite de u est une suite dont on n'a pris que certains indices. Cela se formalise en choisissant une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante pour sélectionner les indices voulus.
> Par exemple, la suite extraite d'indices pairs correspond à la fonction d'extraction $\varphi : n \mapsto 2n$,
> Cette fonction φ est bien strictement croissante (pour éviter de prendre plusieurs fois le même terme ou de revenir en arrière dans la suite).
> On note $(u_{2n}) = (u_{\varphi(n)})$.
> De même, la suite extraite d'indices impairs correspond à la fonction d'extraction $\varphi : n \mapsto 2n + 1$.
> On peut définir par exemple la suite (u_{n^2}) avec $\varphi : n \mapsto n^2$...

Soit J le segment, $f(J)$ est un intervalle non vide (théorème des valeurs intermédiaires).
On note $M = \sup f(J)$, éventuellement infini. Alors, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n) \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $f(u_n)$ converge vers M (diverge vers $+\infty$ si M est infini).
Comme (u_n) est bornée (elle est à valeur dans un segment), on peut en extraire une suite $u_{\varphi(n)}$ qui converge vers un réel $d \in \overline{J} = J$.
Alors par continuité de f en d $f(d) = M$, donc M est fini et atteinte par f en d.
On fait de même pour la borne inférieure (avec $-f$) ■

Exercice

a) Prouver le théorème suivant :

Soit f une fonction **monotone** sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle si et seulement si f est continue sur I.

b) Trouver une fonction non monotone, telle que $f(I)$ soit un intervalle, mais f non continue.

Définition 6.4 ($\star$) **(Homéomorphisme)**

Soit f définie sur I à valeurs dans J.
On dit que f est un **homéomorphisme** de I sur J, si

- f est bijective de I sur J,
- f est continue sur I,
- f^{-1} est continue sur J.

Explications ($\star$)

L'idée de l'homéomorphisme est de déformer "continument" une partie de $\mathbb{R}$ en une autre.
Ainsi, le deuxième exemple qui suit, montre comment on peut passer de l'intervalle $]1;3[$ à $\mathbb{R}$ tout entier avec une bijection continue et à réciproque continue. D'une certaine façon, on arrive à étirer l'intervalle $]1;3[$ jusqu'à lui donner la taille de $\mathbb{R}$ tout entier. La continuité veut dire que l'on n'a pas besoin pour cela de déchirer l'intervalle ou de recoller plusieurs intervalles entre eux pour y arriver. Il faut imaginer l'intervalle comme un élastique que l'on peut étirer à l'infini (c'est possible grâce à la topologie de $\mathbb{R}$ qui dit qu'entre deux points, il en existe toujours une infinité d'autres).
De façon tout à fait contre-intuitive, on a réussi à associer chaque élément de l'intervalle $]1;3[$ à un unique élément de $\mathbb{R}$. En ce sens, on *pourrait dire que* $]1;3[$ *aurait le même nombre d'éléments que* $\mathbb{R}$ *tout entier !*
(Culture mathématique) Lorsque l'on peut créer une homéomorphie entre deux éléments, on dit qu'ils sont homéomorphes. Par exemple, $\mathbb{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert, par contre, il n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^*$ (car il faudrait alors recoller des morceaux). Cette notion peut-être généralisé à des ensembles plus complexes. Par exemple deux objets de l'espace sont homéomorphes si on peut passer de l'un à l'autre sans déchirure ou sans colle. Par exemple, une sphère est homéomorphe à un cube, mais elle n'est pas homéomorphe à un plan...

Exemple ($\star$)

$x \mapsto \frac{1}{1+x}$
$x \mapsto \tan\left(\frac{2(x-2)}{\pi}\right)$ de $]1;3[$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 6.5 **(Théorème de la bijection continue)**

Si f est une application continue et strictement monotone sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$,
Alors f est un bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est également bijective, continue et de même monotonie que f.

Remarque : Une fonction dérivable peut être *strictement* monotone même si sa dérivée s'annule.
Par exemple $x \mapsto x^3$ est strictement monotone et pourtant sa dérivée s'annule en 0. Pour vérifier la stricte monotonie, il suffit de revenir à la définition : l'application conserve l'ordre strict.

$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Preuve :

$\star$ (hors programme)
f est continue, donc $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
f est surjective sur $f(I)$ par définition, elle est injective par stricte monotonie. Donc elle est bijective.
f^{-1} a la même monotonie que f (par l'absurde).
Donc f^{-1} est continue d'après le théorème précédent. ■

Remarque : Lorsque l'on travaille sur $\mathbb{R}$ et que I et J sont des intervalles, alors si f est bijective, elle est injective, donc strictement monotone.
La continuité est redondante avec la surjectivité car J est un intervalle. (théorème plus haut) : il suffit d'une seule de ces deux hypothèses.
Alors, on sait que f^{-1} est continue d'après le théorème précédent.

On pourrait donc simplifier la définition de l'homéomorphisme pour I et J deux intervalles en ne considérant que les applications bijectives.
Cependant cette définition est valable dans un cadre beaucoup plus général que celui-ci et il est donc important de connaître une définition qui n'est pas spécifique à notre situation particulière.

Définition 6.6 **(Fonction racine)**

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ désigne l'application réciproque de $x \mapsto x^n$ sur son domaine de bijectivité.

Propriété 6.7 **(Domaine de défintion des racines)**

$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ impair.
$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in \mathbb{N}$ pair.

Exemple

cos est continue est monotone (décroissante) sur $[0;\pi]$, elle admet donc une réciproque que l'on note arccos elle-même décroissante sur $[0;1]$
Fonctions exponentielle et logarithme.
Fonction arctan.

7 Comparaisons de fonctions

Rappels : revoir les croissances comparées du chapitre sur les fonctions usuelles.

A Fonctions équivalentes en un point ou à l'infini

Définition 7.1 **(Fonctions équivalentes)**

Soit f, g définies sur I et $a \in \overline{I}$ tel que g ne s'annule pas au voisinage de a.
Les fonctions f et g sont équivalentes en a, si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On note $f \underset{a}{\sim} g$

Théorème 7.2 **(Propriétés conservées par la relation d'équivalence)**

a) Deux fonctions équivalentes en a sont de même signe sur un voisinage de a.

b) Deux fonctions équivalentes en a ont le même comportement asymptotique : si l'une admet une limite, alors l'autre possède la même limite.

Attention : Ces propriétés *découlent* de l'équivalence. Elle ne permettent pas de montrer que deux fonctions sont équivalentes.

Propriété 7.3 **(Opérations sur les fonctions équivalentes)**

a) On peut multiplier les équivalents :

$$\begin{array}{llll} \text{si} & f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\sim} g_2 & \text{alors,} & f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2 \\ \text{si} & f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} & \text{alors,} & \lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g \\ \text{si} & f \underset{a}{\sim} g \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} & \text{alors,} & f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha \end{array}$$

b) Si $f \underset{a}{\sim} g$, et $u \underset{b}{\sim} a$ alors $f \circ u \underset{b}{\sim} g \circ u$

c) On ne peut **pas additionner** des équivalents,

d) On ne peut **pas composer les équivalents avec une fonction à gauche**.

Remarque : Pour les puissances, α est quelconque. En particulier les équivalents passent à l'inverse avec $\alpha = -1$.

La composition par une fonction u à droite revient à faire un changement de variable en posant $u = u(x)$. Par exemple, si $x \to 0^+$, alors $u(x) = \sqrt{x} \to 0^+$, et on peut poser $X = u(x) = \sqrt{x}$ et trouver l'équivalent pour $X \to 0$.

Théorème 7.4 (Approximation affine)

Soit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Preuve :

C'est une reformulation de la définition de la dérivabilité lorsque la dérivée est non nulle :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \iff f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

■

Attention : En général, l'équivalent est **faux** si $f'(x_0) = 0$.

Théorème 7.5 (Équivalents usuels en 0)

$$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \tan x \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \qquad \arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

avec $\alpha \neq 0$.

Preuve :

Sauf pour le cosinus, ces formules résultent de l'application directe du théorème7.4.
La formule pour le cosinus s'obtient comme pour les équivalents de suites en utilisant le théorème de Pythagore.

■